2016年度桂田研究室卒業レポート

ボウリングの数理モデル

明治大学　総合数理学部　現象数理学科

片倉孝規

指導教員　桂田祐史　准教授

2017年2月10日

目次

第 1 章　はじめに

私の卒論の目的はボウリングの球の軌道を数式で表すことである。まず準備として仮定条件をあげていく。1 ポンドは 0.454kg である。1 インチは 2.54cm ボウリングのボールは剛体とみなし、ボールの最大重量は 16 ポンド(7.25kg)であり、最大半径は 8.8 インチ(21.8cm)である。ボールにおける中心と重心は同じとして考える。また、ファウルラインから先頭のピンまでのレーンの長さは 18.29m であり、レーンの幅は 106.6cm である。ボールに働く力として、重力、垂直抗力、摩擦を考える。角速度ベクトルは、ボールがレーンを走行する時に方向を変えるがこれはボールと摩擦によるものである。固定された座標軸を XYZ とおく。X=0 がガター、Y=0 がファウルライン、Z=0 は地面に平行な平面で、Z 軸は地面に垂直である。慣性主軸と主慣性モーメントはわかるとする。もし、仮に中心の位置と重心の位置がずれていれば重力と垂直抗力についても考える必要があるがここでは中心と重心の位置が同じと仮定しているので垂直抗力と重力の力の和は 0 になる。

Normani[1]と松田[2]を参考にした。

第 2 章　ニュートンに運動の第二法則

物体に外力 f が作用すると、物体には f に比例した、f と同じ向きの加速度 a が生じる。すなわち次式が成り立つ。

$$f = ma$$

（m：質量）

ボウリングにおいてボールの中心の加速度を

$$a_C = \begin{pmatrix} a_{CX} \\ a_{CY} \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、次式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} F_{SX} \\ F_{SY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{CX} \\ ma_{CY} \end{pmatrix}$$

第 3 章　オイラーの方程式

3.1 モーメント

モーメントとは定点に対する物理量の回転の能力を示すもので、定点からの方向性を考慮して位置ベクトル$\vec{r}$との積で表される。
力のモーメント($\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$)は、力と力に垂直な定点からの距離の積で回転の強さを表す。また、角運動量($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$)も同様に、運動量ベクトル$\vec{p}$の物体の回転する勢いである。慣性モーメントは質量と回転軸に垂直な距離の 2 乗の積であり、物体の回転に対して示す慣性（動きにくさ）の程度を表す。

3.2 角運動量

角運動量とは回転運動の特徴を表す基本量である。質点では位置ベクトルと運動量ベクトルの外積で運動量のモーメントに相当する。一般に、

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

と表される。また、剛体では

$$\vec{L} = \sum_j \left(\overrightarrow{r_j} \times \overrightarrow{p_J} \right)$$

となる。

3.3 角速度

角速度とは、物体がある直線の周りを回転する速さの程度を表す量である。この直線を回転軸といい$\vec{\omega}$の向きで回転軸の向きを表し、$|\vec{\omega}|$の大きさで回転の速さ（単位時間の角度の変化）を表している。また、ボウリングにおいて

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix}$$

とおく。

3.4 慣性テンソル

一般に角運動量$\vec{L}$と角速度ベクトル$\vec{\omega}$の間に次のような関係式が成り立つ。

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ} \end{pmatrix}$$

このような I を慣性テンソルという。慣性テンソルは慣性モーメントのように剛体固有の量ではないので変数である。

3.5 慣性主軸、主慣性モーメント

慣性テンソル I は実対称行列なので実直行行列$T = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$で対角化できる。

$${}^tTIT = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

この時の$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$を慣性主軸といい、$I_x, I_y, I_z$を主慣性モーメントという。慣性主軸は慣性テンソルの固有ベクトルであり、主慣性モーメントは慣性テンソルの固有値である。ボウリングのボールの場合、ボールの向きによって慣性テンソルは異なるが、主慣性モーメントは定数になる。

3.6 回転軸の変化

慣性主軸は剛体に固定された固定軸なのでボールとともに移動し変化するため、固定軸の変化を式にして計算する必要が出てくる。固定軸の計算には次の式を用いる。

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{x}$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{y}$$

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{z}$$

3.7 オイラーの方程式

剛体に作用するトルク$\vec{T}$を

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

とするとき

$$T_1 = I_x \frac{d\omega_x}{dt} - \left(I_y - I_z\right)\omega_y\omega_z$$

$$T_2 = I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

$$T_3 = I_z \frac{d\omega_z}{dt} - \left(I_x - I_y\right)\omega_x\omega_y$$

が一般に成り立つ。これをオイラーの方程式という。ただし、

$$\omega_x = \vec{\omega} \cdot \vec{x},\quad \omega_y = \vec{\omega} \cdot \vec{y},\quad \omega_z = \vec{\omega} \cdot \vec{z}$$

である。
ボウリングの数理モデルを作るにあたってトルク$\vec{T}$を求めることが必要になる。

第 4 章　摩擦力

この章では、摩擦力を考える。ボウリングの球の摩擦を考えるとき 2 パターンが考えられる。ボウリングの球が転がるときと滑るときである。結論から先に言ってしまえば、ボールが転がるときは静止摩擦で、ボールが滑るときは動摩擦である。
ボール上の点で、レーンと接触しているものを P と表す。P の速度（レーンから見た相対速度でもある）を$\overrightarrow{V_p}$と表す。この時

$$\overrightarrow{V_p} = \overrightarrow{V_c} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CP}$$

$$= \begin{pmatrix} V_{CX} \\ V_{CY} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{CX} - R\omega_Y \\ V_{CY} - R\omega_X \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。滑らずに転がってるとき$\overrightarrow{V_p} = \vec{0}$である。

4.1 静止摩擦（転がり摩擦）

物体が面に対して静止しているとき($\overrightarrow{V_p} = \vec{0}$)、面が物体に及ぼす力のうち、面に平行な成分の力を静止摩擦という。転がる球に働く力は静止摩擦である。ボウリングの場合について考える。ボウリングにおいてボールが転がる条件は次の式が成り立つときである。

$$\left|\overrightarrow{F_S}\right| \leq \mu_S N$$

このとき、ボウリングのトルクは

$$\vec{T} = \overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{F_S} = \begin{pmatrix} RF_{SY} \\ -RF_{SX} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

4.2 動摩擦（滑り摩擦）

一般に、動摩擦（滑り摩擦）とは物体が他の物体の表面にそって動くときに働く力である。ボウリングにおいてボールが滑る条件は

$$\left|\overrightarrow{F_S}\right| > \mu_S N$$

（μ_S：静止摩擦係数, N：垂直抗力）

である。このときボールは滑るので動摩擦である。このとき次式が成り立つ。

$$\overrightarrow{F_S} = -\mu_k N \frac{\overrightarrow{V_p}}{\left|\overrightarrow{V_p}\right|}$$

（μ_k：動摩擦係数）

第５章　結論・まとめ

ボウリングの中心の座標を

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{pmatrix}$$

とおく。また、ボールの中心の速さを

$$\overrightarrow{V_C} = \begin{pmatrix} V_{CX} \\ V_{CY} \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\frac{d}{dt}\vec{C} = \overrightarrow{V_C}$$

が成り立つ。さらに中心の加速度を

$$\overrightarrow{a_C} = \begin{pmatrix} a_{CX} \\ a_{CY} \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{a_C}$$

が成り立つ。ボールの角加速度を

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_X \\ \alpha_Y \\ \alpha_Z \end{pmatrix}$$

とおく。

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$$

が成り立つ。

以上より数理モデルとしてつねに（転がる場合も、滑る場合も）次の①～⑤が成立。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C_X \\ C_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{CX} \\ V_{CY} \end{pmatrix} \quad ・・・①$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V_{CX} \\ V_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{CX} \\ a_{CY} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} F_{SX} \\ F_{SY} \end{pmatrix} \quad ・・・②$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_X \\ \alpha_Y \\ \alpha_Z \end{pmatrix} \quad ・・・③$$

$$\begin{pmatrix} RF_{SY} \\ -RF_{SX} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y \end{pmatrix} \cdot\cdot\cdot ⑤$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{x},\ \frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{y},\ \frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{z} \cdot\cdot\cdot ④$$

転がると仮定すると

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix} F_{SX} \\ F_{SY} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \alpha_Y \\ -\alpha_X \end{pmatrix} \cdot\cdot\cdot ⑥$$

これと⑤を連立させると$\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z, F_{SX}, F_{SY}$が求まる。静摩擦の条件

$$\sqrt{F_{SX}^2 + F_{SY}^2} \leq \mu_s mg \cdot\cdot\cdot (※)$$

をチェックし、これが成立していれば、実際にボールは転がる。この$\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z, F_{SX}, F_{SY}$を用いて①②③④という運動方程式を解ける。

(※)が成立しないときは、ボールは転がらず滑るとわかる。

$$\overrightarrow{F_S} = -\mu_k N \frac{\overrightarrow{V_P}}{\left|\overrightarrow{V_P}\right|}$$

$$\overrightarrow{V_P} = \begin{pmatrix} V_{CX} - R\omega_Y \\ V_{CY} + R\omega_X \\ 0 \end{pmatrix}$$

によりF_{SX}, F_{SY}が求まる。

⑤に代入して$\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z$が求まる。

この$\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z, F_{SX}, F_{SY}$を用いて①②③④という運動方程式を解ける。

まとめ

ボウリングにおいてボールが曲がる理由を考え知ることができた。ただ、この

式からプログラミングでシミュレーションをして結果を出せたわけではないのでこれらの式だけで解けるかは分からないのが今後の課題である。また、空気抵抗が与える影響はごく小さいものなので無視して考えたが果たしてその通りなのか数字で検証するのも１つの課題である。今回は、中心と重心の位置が同じとして考えたが中心と重心の位置が異なるときについて考えるとより現実世界のボウリングに近いシミュレーションができるようになると考えられる。

参考文献

1. Franco Normani, The physics of Bowling
   http://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-bowling.html
2. 松田 諒, ボウリングの力学的シミュレーション,
   南山大学　数理情報学部,
   2014 年度卒業論文
3. 馬場 敬之, スバラシク実力がつくと評判の力学キャンパス・ゼミ　改訂４, マセマ出版社（平成 28 年度 11 月 25 日）
4. 大島 隆義, 自然は方程式で語る力　学読本, 名古屋大学出版会（2012 年）