2016年度桂田研究室卒業研究レポート

ケプラーの法則

～２体問題より～

明治大学 総合数理学部 現象数理学科
川田 愛

2017年2月15日

目次

０　イントロダクション

このレポートのメインは２体問題を考え解き進める中で，ケプラーの法則がどのように導かれるか理解することである．これに先立って球殻の外側と内側に質点があるとき，それぞれ球殻から受ける力がどうなるか考えまとめた．これは福島[１]を読み始め，重力のページを開いたとき，重力について理解を深めたいと思ったのがきっかけである．２体問題に興味をもち，福島[１]の$p135$から$p151$を読み解いた後，$p108$，109に重力ポテンシャルを用いて天体を質点に置き換えてよいか議論があるのを見つけた．$p93$から$p109$はニュートン力学の解説も含めて，２体問題と質点が球殻から受ける力について理解を深める手助けとなった．議論で用いる公式，用語を初めに紹介し議論を始める．

１　準備

1.1　万有引力の法則

質量のある物体，すなわち質点は全て引きつけ合う性質をもつ．その引力の大きさFは２質点の質量m_1，m_2の積$m_1 m_2$に比例し，質点間の距離rの２乗に反比例する，という法則．万有引力定数Gを用いて次のように表される，

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}.$$

ニュートンによって提唱された．

1.2　ベクトルの外積

３次元ベクトル$\mathbb{A} \equiv (A_x，A_y，A_z)^T$，$\mathbb{B} \equiv (B_x，B_y，B_z)^T$について，外積$\mathbb{C}$は

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \mathbb{A} \times \mathbb{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}.$$

また，$\mathbb{A}$と$\mathbb{B}$のなす角をϑとすると，$|\mathbb{C}| = |\mathbb{A}||\mathbb{B}| \sin\vartheta$が成り立つ．ゆえに，$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = -\mathbb{B} \times \mathbb{A}$．$\mathbb{A}$と$\mathbb{B}$が平行ならば$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbf{0}$.

1.3　ベクトル三重積の公式

３次元のベクトル$\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$，$\mathbb{C}$の外積について，

$$(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{C} = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})\mathbb{C}.$$

これをベクトル三重積と呼ぶ．各ベクトルの要素を任意の実数として左辺，右辺それぞれ計算すると結果が同じになり，証明となる．

1.4　スカラー三重積の公式

３次元のベクトル$\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$，$\mathbb{C}$について，

$$\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = \mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{A}) = \mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}).$$

これをスカラー三重積と呼ぶ．$\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$，$\mathbb{C}$を要素が任意の実数として$\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C})$，$\mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{A})$，$\mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B})$を計算すると全て等しく，証明は完成する．

1.5　角運動量

質量m'，位置ベクトル$\mathbb{r}'$，速度ベクトル$\mathbb{v}'$の質点の運動について，$\mathbb{p}' \equiv m'\mathbb{v}'$と定義される$\mathbb{p}'$は運動量と呼ぶ．$\mathbb{L}' \equiv \mathbb{r}'\times\mathbb{p}'$と定義される$\mathbb{L}'$を角運動量と呼ぶ.

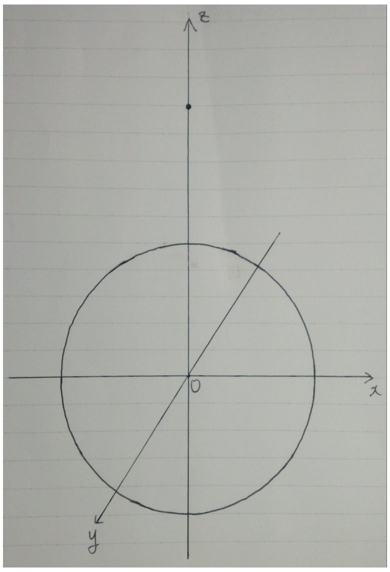
1.6　軌道要素，昇交点，近点について

軌道要素とは，軌道を表すのに必要な変数のことをいう．xy平面と軌道が交わる２点のうち，南半球から北半球に向かって交差する点を昇交点と呼ぶ．軌道運動する天体が軌道の中心に最も近づく点を近点と呼ぶ.

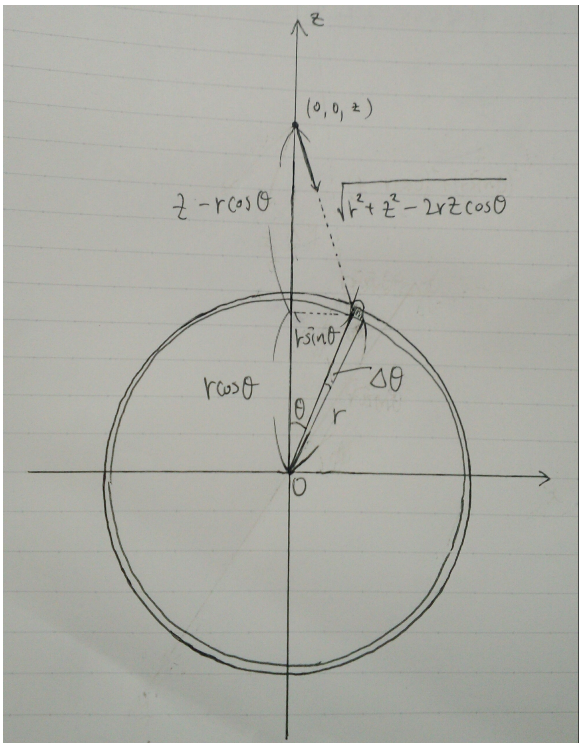
２　質点が球殻から受ける力

2.1　地球の質量が中心に集中していると考えられるか

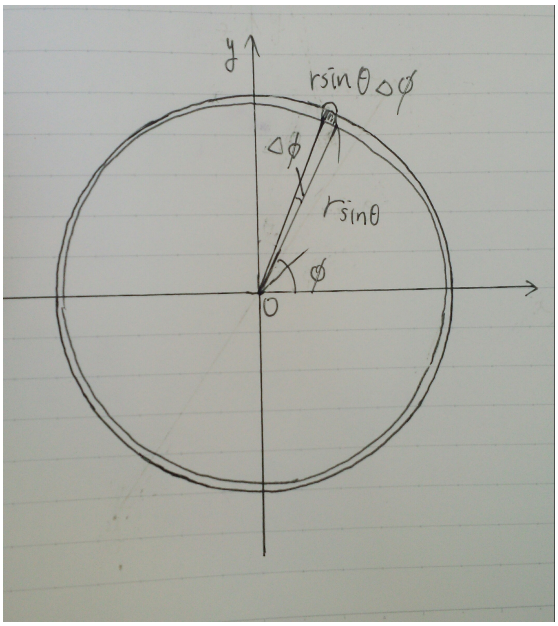
まず，回転対称な天体が天体の中心に全ての質量が集中する場合，天体を質点とみなせるとする．回転対称な天体は薄い球殻に分割したとき，密度はどこでも一定．密度が一様な球殻について，球殻の外側にある質点が球殻から受ける力について考える．



面積密度をρ，球殻の半径をrとする．球殻の面積は$4\pi r^2$，質量$4\pi r^2\rho$とわかる．球殻の中心を原点とするxyz座標をとり，質点の位置を$(0,\ 0,\ z)$とする．



質点の質量はm. 球殻の任意の点とz軸正方向のなす角を$\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$, 点を$xy$平面に垂直に下ろした点と$x$座標正方向のなす角を$\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$とすると，微小面積は$r^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\phi$，微小質量は$r^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\phi\rho$となる.



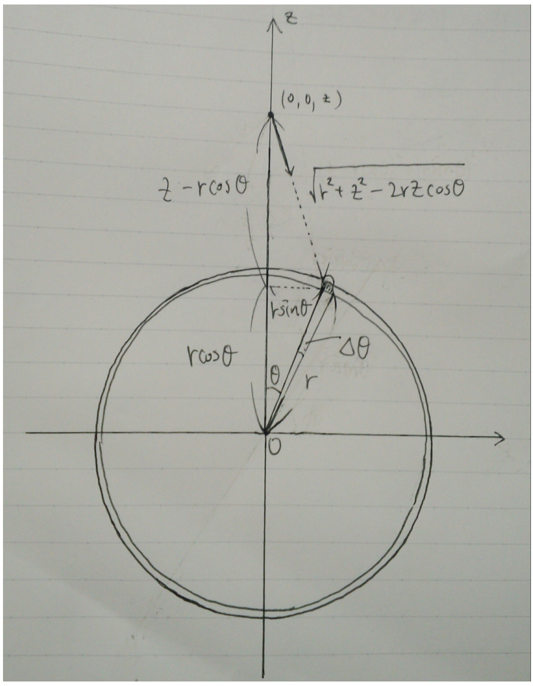
微小区域のz座標は$r\cos\theta$，x座標は$r\sin\theta$であるから，質点と微小区域の距離は

$$\begin{aligned}\sqrt{(z - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} &= \sqrt{z^2 - 2rz\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{z^2 + r^2 - 2rz\cos\theta}\,.\end{aligned}$$

万有引力の法則から質点が球殻の微小区域からうける力Fの大きさは

$$F=\frac{G(r^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\phi\rho)m}{(\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta})^2}.$$

Gは万有引力定数である.



力Fのz軸成分F_zは

$$F_z=F\times\frac{z-r\cos\theta}{\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta}}.$$

このF_zは微小区域から受ける下向きの力の大きさであるから, 質点が球殻から受ける上向きの力は

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}-F_z\,d\phi d\theta=-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{G(r^2\sin\theta\rho)m}{(\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta})^2}\times\frac{z-r\cos\theta}{\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta}}d\phi d\theta$$

$$=-Gm\rho\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2(z-r\cos\theta)}{(z^2+r^2-2rz\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\ d\phi d\theta$$

$$=-2\pi Gm\rho r^2\int_0^{\pi}\frac{z-r\cos\theta}{(z^2+r^2-2rz\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\,d\theta.$$

$t=\cos\theta$とおくと,

$$d\theta=\frac{-1}{\sin\theta}dt.$$

$0\leq\theta\leq\pi$に$1\geq t\geq -1$が対応するから,

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} -F_z\, d\phi d\theta = -2\pi G m\rho r^2 \int_1^{-1} \frac{z-rt}{(z^2+r^2-2rzt)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta \left(\frac{-1}{\sin\theta}\right) dt$$

$$= 2\pi G m\rho r^2 \int_1^{-1} \frac{z-rt}{(z^2+r^2-2rzt)^{\frac{3}{2}}}\, dt.$$

$u = z^2 + r^2 - 2rzt$とおくと，

$$t = \frac{z^2+r^2-u}{2rz}.$$

ゆえに，

$$dt = \frac{-1}{2rz} du.$$

$1 \geq t \geq -1$に$(z-r)^2 \leq u \leq (z+r)^2$が対応する．ゆえに，

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} -F_z\, d\phi d\theta = 2\pi G m\rho r^2 \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \frac{z - \frac{z^2+r^2-u}{2z}}{u^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-1}{2rz}\right) du$$

$$= -\frac{2\pi G m\rho r^2}{2rz} \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \frac{\frac{1}{2z}(2z^2-z^2-r^2+u)}{u^{\frac{3}{2}}}\, du$$

$$= -\frac{\pi G m\rho r^2}{rz\cdot 2z} \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \frac{(z^2-r^2+u)}{u^{\frac{3}{2}}}\, du$$

$$= -\frac{\pi G m\rho r^2}{rz\cdot 2z} \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \left((z^2-r^2)u^{-\frac{3}{2}} + u^{\frac{-1}{2}}\right) du$$

$$= -\frac{\pi G m\rho r^2}{2rz^2} \left[-2(z^2-r^2)u^{-\frac{1}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}}\right]_{(z-r)^2}^{(z+r)^2}$$

$$= -\frac{\pi G m\rho r^2}{rz^2} \begin{bmatrix} \{(z^2-r^2)(z+r)^{-1} + (z+r)\} \\ -\{(z^2-r^2)(z-r)^{-1} + (z-r)\} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\pi G m\rho r^2}{rz^2}\{(z-r) + 2r - (z+r)\}$$

$$= -\frac{\pi G m\rho r^2}{rz^2}(-4r)$$

$$= -\frac{4\pi G m\rho r^2}{z^2}$$

$$= -\frac{4\pi r^2 \rho G m}{z^2}$$

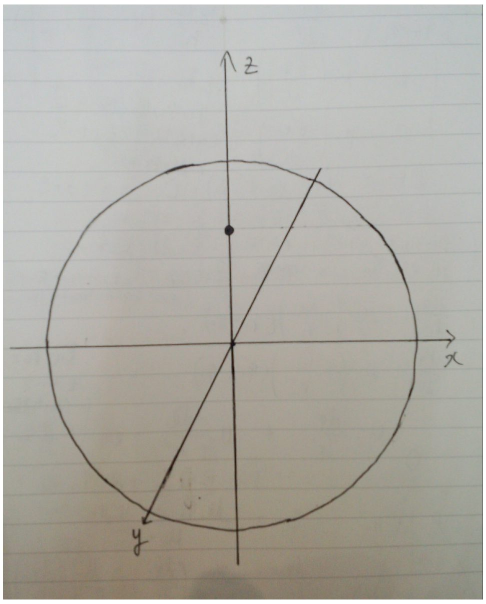
球殻の質量$4\pi r^2\rho$をMとして

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} -F_z\, d\phi d\theta = -\frac{MGm}{z^2}.$$

よって，密度一様の球殻の外にある質点が球殻から受ける力は，球殻の中心に球殻の全ての質量が集中している場合の万有引力に等しい．つまり，天体を質点とみなした場合の万有引力であるから，天体を質点とみなせると判明した．

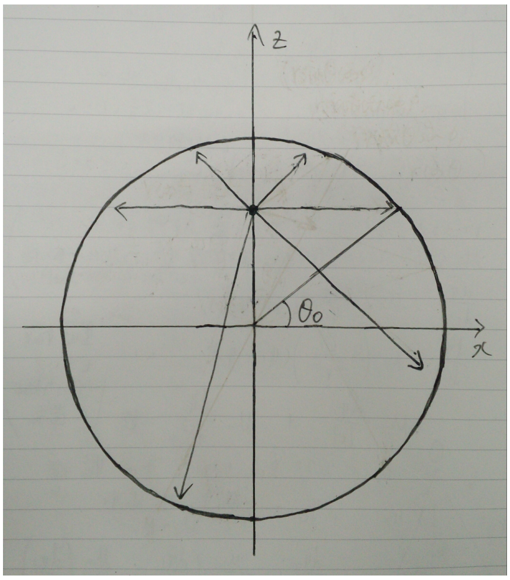
2.2　地球の内部で重力はどうなるか

2.1 で用いた球殻(面積密度ρ，半径r，面積は$4\pi r^2$，質量$4\pi r^2\rho$)を用いて，球殻の中にある質点が球殻から受ける力を考える．



2.1 同様，球殻の中心が原点になるようxyz座標をとり，質点はz軸上にあり，位置を$(0, 0, z)$，質量mとする．球殻にある点とz軸正方向のなす角を$\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$，点を$xy$座標に垂直におろしたとき$x$軸正方向となす角を$\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$とする．また，質点から$x$軸が正の方向に向かって$x$軸と平行な線をひいたとき，球殻に到達した点と$z$軸正方向のなす角を$\theta_0$とすると，

$$cos\theta_0 = \frac{z}{r}.$$



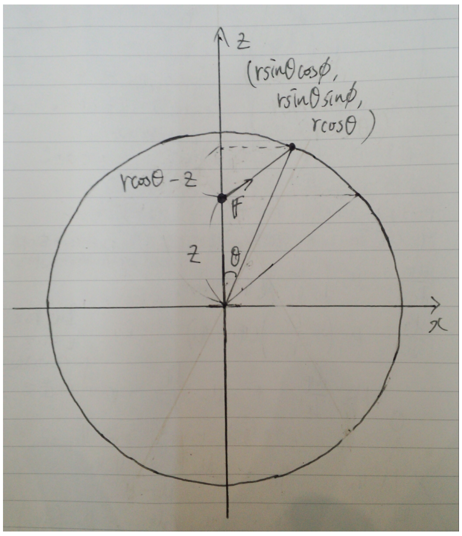
質点が球殻の微小区域から受ける力を考える．微小区域の面積は$r^2\Delta\phi\Delta\theta\sin\theta$，質量は$r^2\Delta\phi\Delta\theta\sin\theta\rho$. 微小区域の座標は$(r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$であるから，微小区域と質点の距離は

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(r\sin\theta\cos\phi)^2+(r\sin\theta\sin\phi)^2+(r\cos\theta-z)^2} \\
&=\sqrt{r^2\sin^2\theta cos^2\phi+r^2\sin^2\theta\sin^2\phi+r^2\cos^2\theta-2rz\cos\theta+z^2} \\
&=\sqrt{r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta-2rz\cos\theta+z^2} \\
&=\sqrt{r^2-2rz\cos\theta+z^2}.
\end{aligned}
$$

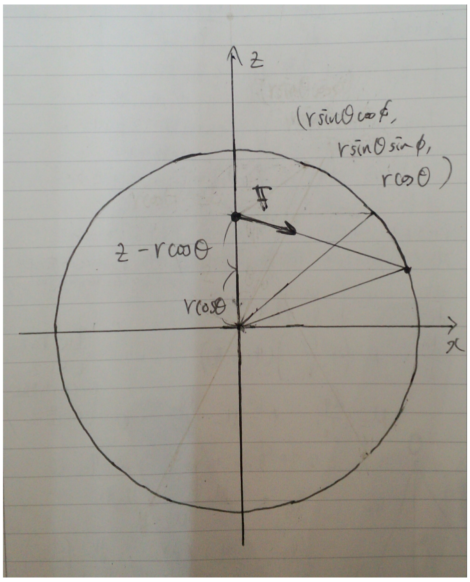
よって，万有引力の法則から質点が微小区域から受ける力Fは

$$F=\frac{G(r^2\Delta\phi\Delta\theta\sin\theta\rho)m}{r^2-2rz\cos\theta+z^2}.$$

Fのz軸成分F_zは，微小区域のz座標が質点z座標より大きい場合$(0\le\theta\le\theta_0)$上向き, 小さい場合は下向き$(\theta_0\le\theta\le\pi)$であるため, 分けて考える. 上向きの$F$の$z$軸成分を$F_{z上}$，下向きの$F$の$z$軸成分を$F_{z下}$とする.



$$F_{z上} = F \times \frac{r\cos\theta - z}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}}.$$



$$F_{z下} = -F \times \frac{z - r\cos\theta}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}}.$$

質点が球殻から受ける力はそれぞれ積分した$F_{z上}$と$F_{z下}$の合計である．

$$\int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} F_{z上}\, d\phi d\theta = \int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} F \times \frac{r\cos\theta - z}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}} d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} \frac{G(r^2\sin\theta\rho)m}{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2} \times \frac{r\cos\theta - z}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}} d\phi d\theta$$

$$= r^2 Gm\rho \int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} \frac{r\cos\theta - z}{(r^2 - 2rz\cos\theta + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta\, d\phi d\theta$$

$$= 2\pi r^2 Gm\rho \int_0^{\theta_0} \frac{r\cos\theta - z}{(r^2 - 2rz\cos\theta + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta \, d\theta$$

$t = \cos\theta$とおいて,

$$d\theta = -\frac{dt}{\sin\theta}.$$

$0 \leq \theta \leq \theta_0$に$1 \geq t \geq \frac{z}{r}$ が対応するから,

$$\int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} F_{z上} \, d\phi d\theta = 2\pi r^2 Gm\rho \int_1^{\frac{z}{r}} \frac{rt - z}{(r^2 - 2rzt + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta \left(\frac{-dt}{\sin\theta} \right)$$

$$= -2\pi r^2 Gm\rho \int_1^{\frac{z}{r}} \frac{rt - z}{(r^2 - 2rzt + z^2)^{\frac{3}{2}}} dt.$$

$u = r^2 - 2rzt + z^2$とおく.

$$t = \frac{r^2 + z^2 - u}{2rz}$$

であるから,

$$dt = \frac{-du}{2rz}.$$

$1 \geq t \geq \frac{z}{r}$ に$(r - z)^2 \leq u \leq r^2 - z^2$が対応するから,

$$\int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} F_{z上} \, d\phi d\theta = -2\pi r^2 Gm\rho \int_{(r-z)^2}^{r^2-z^2} \frac{\frac{r^2 + z^2 - u}{2z} - z}{u^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-du}{2rz} \right)$$

$$= \frac{\pi r^2 Gm\rho}{2rz^2} \int_{(r-z)^2}^{r^2-z^2} \frac{r^2 + z^2 - u - 2z^2}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= \frac{\pi r^2 Gm\rho}{2rz^2} \int_{(r-z)^2}^{r^2-z^2} \left\{ (r^2 - z^2) u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} \right\} du$$

$$= \frac{\pi r^2 Gm\rho}{2rz^2} \left[-2(r^2 - z^2) u^{-\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right]_{(r-z)^2}^{r^2-z^2}$$

$$= \frac{\pi r^2 Gm\rho}{2rz^2} \left\{ \begin{array}{c} -2(r^2 - z^2)(r^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} - 2(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \\ +2(r^2 - z^2)(r - z)^{-1} + 2(r - z) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\pi r^2 Gm\rho}{rz^2} \left\{ -(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} + (r + z) + (r - z) \right\}$$

$$= \frac{\pi r^2 Gm\rho}{rz^2}\left\{2r - 2(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{2\pi r^2 \rho Gm}{z^2} - \frac{2\pi r (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \rho Gm}{z^2}.$$

$$\int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} -F_{z下} d\phi d\theta = -\int_{\theta_0}^{\pi}\int_0^{2\pi} F \times \frac{z - r cos\theta}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}}$$

$$= -\int_{\theta_0}^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{G(r^2 \sin\theta \rho)m}{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2} \times \frac{z - r\cos\theta}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}} d\phi d\theta$$

$$= -Gr^2 \rho m \int_{\theta_0}^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z - r\cos\theta}{(r^2 - 2rz\cos\theta + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta \, d\phi d\theta$$

$$= -2\pi r^2 \rho Gm \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{z - r cos\theta}{(r^2 - 2rz\cos\theta + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta \, d\theta.$$

$t = \cos\theta$とおく.

$$d\theta = \frac{-dt}{\sin\theta}.$$

$\theta_0 \leq \theta \leq \pi$に$\frac{z}{r} \geq t \geq -1$が対応する．ゆえに,

$$\int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} F_{z下} d\phi d\theta = -2\pi r^2 \rho Gm \int_{\frac{z}{r}}^{-1} \frac{z - rt}{(r^2 - 2rzt + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta \left(\frac{-dt}{\sin\theta}\right)$$

$$= 2\pi r^2 \rho Gm \int_{\frac{z}{r}}^{-1} \frac{z - rt}{(r^2 - 2rzt + z^2)^{\frac{3}{2}}} dt.$$

$u = r^2 - 2rzt + z^2$とおく.

$$t = \frac{r^2 + z^2 - u}{2rz}$$

であるから,

$$dt = \frac{-du}{2rz}.$$

$\frac{z}{r} \geq t \geq -1$に$r^2 - z^2 \geq u \geq (r+z)^2$が対応するから,

$$\int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} F_{z下} d\phi d\theta = 2\pi r^2 \rho Gm \int_{r^2 - z^2}^{(r+z)^2} \frac{z - \frac{r^2 + z^2 - u}{2z}}{u^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-du}{2rz}\right)$$

$$= \frac{-\pi r^2 \rho Gm}{2rz^2} \int_{r^2 - z^2}^{(r+z)^2} \frac{2z^2 - (r^2 + z^2 - u)}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= \frac{-\pi r^2 \rho G m}{2rz^2} \int_{r^2-z^2}^{(r+z)^2} \frac{z^2 - r^2 + u}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= \frac{\pi r^2 \rho G m}{2rz^2} \int_{r^2-z^2}^{(r+z)^2} \left\{ (r^2 - z^2) u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} \right\} du$$

$$= \frac{\pi r^2 \rho G m}{2rz^2} \left[-2(r^2 - z^2) u^{-\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right]_{r^2-z^2}^{(r+z)^2}$$

$$= \frac{\pi r^2 \rho G m}{rz^2} \left\{ \begin{array}{c} -(r^2 - z^2)(r+z)^{-1} - (r+z) \\ +(r^2 - z^2)(r^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} + (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\pi r^2 \rho G m}{rz^2} \left\{ -(r - z) - (r + z) + 2(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= \frac{\pi r^2 \rho G m}{rz^2} \left\{ 2(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - 2r \right\}$$

$$= \frac{2\pi r (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \rho G m}{z^2} - \frac{2\pi r^2 \rho G m}{z^2}.$$

以上より球殻の内側にある質点が球殻から受ける力は

$$\int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} F_{z上} \, d\phi d\theta + \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} F_{z下} \, d\phi d\theta$$

$$= \frac{2\pi r^2 \rho G m}{z^2} - \frac{2\pi r (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \rho G m}{z^2} + \frac{2\pi r (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \rho G m}{z^2} - \frac{2\pi r^2 \rho G m}{z^2}$$

$$= 0$$

よって，質点が質点の外にある球殻から受ける力が０になるとわかった.

３　２体問題

3.1　運動方程式と第一積分

天体を質点とみなし，原点と２つの質点について考える．質点１は質量M_1，位置ベクトル$\mathbb{r}_1$, 速度ベクトル$\mathbb{v}_1$, 加速度$\mathbb{a}_1$, 質点２は質量M_2, 位置ベクトル$\mathbb{r}_2$，速度ベクトル$\mathbb{v}_2$，加速度$\mathbb{a}_2$とする．ここでr_{12}を

$$r_{12} = |\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2|$$

とおく．万有引力の法則から質点２が質点１から受ける力は

$$\mathbb{F}_{12} = -\left(\frac{G M_1 M_2}{r_{12}^3} \right) (\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2).$$

また,

$$\mathbb{F}_{12} = M_1 \mathbb{a}_1 = M_1 \frac{d\mathbb{v}_1}{dt} = M_1 \frac{d^2 \mathbb{r}_1}{dt^2}$$

であるから,

$$M_1 \frac{d^2 \mathbb{r}_1}{dt^2} = -\left(\frac{GM_1 M_2}{r_{12}^3}\right)(\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2).$$

ゆえに天体 1 の運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbb{r}_1}{dt^2} = -\left(\frac{GM_2}{r_{12}^3}\right)(\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2). \tag{2-1}$$

同様にして

$$\mathbb{F}_{12} = M_2 \mathbb{a}_2 = M_2 \frac{d^2 \mathbb{r}_2}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 \mathbb{r}_2}{dt^2} = -\left(\frac{GM_1}{r_{12}^3}\right)(\mathbb{r}_2 - \mathbb{r}_1). \tag{2-2}$$

ここで,

$$\begin{cases} \mathbb{F}_{12} = M_1 \dfrac{d^2 \mathbb{r}_1}{dt^2} \\ \mathbb{F}_{12} = M_2 \dfrac{d^2 \mathbb{r}_2}{dt^2} \end{cases}$$

を解いて$\mathbb{r}_1$, $\mathbb{r}_2$, $\mathbb{v}_1$, $\mathbb{v}_2$をそれぞれtの関数として表したい.
定数Cを用いて

$$f(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2) = C$$

とできるとき, 関数fを運動方程式の第一積分という. ここで第一積分は 12 個.
(2-1)より,

$$\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2 = -\left(\frac{r_{12}^3}{GM_2}\right)\frac{d^2 \mathbb{r}_1}{dt^2}.$$

(2-2)より,

$$\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2 = \left(\frac{r_{12}^3}{GM_1}\right)\frac{d^2 \mathbb{r}_2}{dt^2}.$$

よって,

$$-\left(\frac{r_{12}^3}{GM_2}\right)\frac{d^2 \mathbb{r}_1}{dt^2} = \left(\frac{r_{12}^3}{GM_1}\right)\frac{d^2 \mathbb{r}_2}{dt^2}.$$

左辺にまとめて

$$M_1 \frac{d^2 \mathbb{r}_1}{dt^2} + M_2 \frac{d^2 \mathbb{r}_2}{dt^2} = \mathbf{0}. \tag{2-3}$$

ここで，重心$\mathbb{r}_G$は

$$\mathbb{r}_G \equiv \frac{M_1 \mathbb{r}_1 + M_2 \mathbb{r}_2}{M_1 + M_2}.$$

時間tで微分して，

$$\frac{d\mathbb{r}_G}{dt} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\left(\frac{d\mathbb{r}_1}{dt}\right) + \frac{M_2}{M_1 + M_2}\left(\frac{d\mathbb{r}_2}{dt}\right).$$

さらにtで微分して，

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbb{r}_G}{dt^2} &= \frac{M_1}{M_1 + M_2}\left(\frac{d^2\mathbb{r}_1}{dt^2}\right) + \frac{M_2}{M_1 + M_2}\left(\frac{d^2\mathbb{r}_2}{dt^2}\right) \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2}\left(M_1 \frac{d^2\mathbb{r}_1}{dt^2} + M_2 \frac{d^2\mathbb{r}_2}{dt^2}\right) \\ &= \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

よって，

$$\frac{d^2\mathbb{r}_G}{dt^2} = \frac{d\mathbb{v}_G}{dt} = \mathbf{0}.$$

重心の加速度が 0 とわかった．積分すると

$$\mathbb{v}_G = \mathbb{v}_{G_0}$$

$$\mathbb{r}_G = \mathbb{v}_{G_0} t + \mathbb{r}_{G_0}. \tag{2-4}$$

重心は等速直線運動をしているとわかる．$\mathbb{v}_{G_0}$，$\mathbb{r}_{G_0}$は積分定数ベクトルで，それぞれ重心の速度ベクトル，時刻$t = 0$における重心の位置ベクトルである．この２つの積分定数ベクトルは第一積分で，重心積分と呼ぶ．第一積分は 6 個である．

3.2　一体問題に還元

　質点 1 を原点として，質点 1 に対する質点 2 の相対運動を考える．相対位置ベクトル$\mathbb{r}$は

$$\mathbb{r} = \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2.$$

$r = |\mathbb{r}|$とおく．運動方程式をたてる．ベクトル$\mathbb{r}$を２階微分して，

$$\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}=\frac{d^2\mathbb{r}_1}{dt^2}-\frac{d^2\mathbb{r}_2}{dt^2}$$

$$=-\left(\frac{GM_2}{r_{12}^3}\right)(\mathbb{r}_1-\mathbb{r}_2)+\left(\frac{GM_1}{r_{12}^3}\right)(\mathbb{r}_2-\mathbb{r}_1)$$

$$=-\left(\frac{GM_2}{r^3}\right)\mathbb{r}-\left(\frac{GM_1}{r^3}\right)\mathbb{r}$$

$$=-\frac{G(M_1+M_2)}{r^3}\mathbb{r}.$$

$\mu=\ G(M_1+M_2)$とおくと，

$$\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}=-\frac{\mu}{r^3}\mathbb{r}. \tag{2-5}$$

これにより天体２の相対運動は，原点に質量M_1+M_2が存在し，天体２の質量が無視できる位小さい場合と同様に考えることができる．式(2-5)が運動方程式，時刻$t=0$での$\mathbb{r}$，$\mathbb{v}$が初期条件の相対運動の問題が解けて$\mathbb{r}$，$\mathbb{v}$が得られたとき，$\mathbb{r}_G\equiv\frac{M_1\mathbb{r}_1+M_2\mathbb{r}_2}{M_1+M_2}$より

$$\mathbb{r}_1=\frac{M_1+M_2}{M_1}\mathbb{r}_G-\frac{M_2}{M_1}\mathbb{r}_2$$

$$=\frac{M_1+M_2}{M_1}\mathbb{r}_G-\frac{M_2}{M_1}(\mathbb{r}_2-\mathbb{r}_1)-\frac{M_2}{M_1}\mathbb{r}_1$$

$$=\frac{M_1+M_2}{M_1}\mathbb{r}_G+\frac{M_2}{M_1}\mathbb{r}-\frac{M_2}{M_1}\mathbb{r}_1.$$

$$\frac{M_1+M_2}{M_1}\mathbb{r}_1=\frac{M_1+M_2}{M_1}\mathbb{r}_G+\frac{M_2}{M_1}\mathbb{r}.$$

よって，

$$\mathbb{r}_1=\mathbb{r}_G+\frac{M_2}{M_1+M_2}\mathbb{r}.$$

同様にして

$$\mathbb{r}_2=\mathbb{r}_G+\frac{M_1}{M_1+M_2}\mathbb{r}.$$

ゆえに$\mathbb{r}_G$から$\mathbb{r}_1$と$\mathbb{r}_2$，$\mathbb{v}_1$，$\mathbb{v}_2$が得られる．3.1 より，初め第一積分は 12 個だったが，相対運動で第一積分が 6 個になった． 6 つの第一積分を求めていく．

3.3　ケプラーの第二法則

天体２の角運動量は(2-5)より

$$\mathbb{r}\times\frac{d\mathbb{v}}{dt}=-\mu\frac{\mathbb{r}\times\mathbb{r}}{r^3}=0.$$

よって$\mathbb{r}$と$\frac{d\mathbb{v}}{dt}$は並行．角運動量を時間tで積分すると，

$$\mathbb{r}\times\mathbb{v}=\mathbb{h}. \tag{2-7}$$

$\mathbb{h}$は積分定数ベクトルで，３つの第一積分を角運動量ベクトルという．$\mathbb{h}=0$が成り立つのは$\mathbb{r}$と$\mathbb{v}$が平行なときで，即ち２体の運動が直線上に限定され，衝突が起こりうる特殊なケースである．よって$\mathbb{h}\neq 0$として考える．(2-7)より$\mathbb{r}$と$\mathbb{v}$が張る平面は常に一定で，天体の運動は平面上の二次元運動に制限される．また，$|\mathbb{h}|$の半分は天体２が平面上で掃く単位時間あたりの面積で，一定ということはケプラーの唱えた第二法則，面積速度一定の法則を示している．

3.4　５つの第一積分

$\mathbb{h}$と$\frac{d\mathbb{v}}{dt}$の外積を求めると，

$$\begin{aligned}\mathbb{h}\times\frac{d\mathbb{v}}{dt}&=-\frac{\mu}{r^3}\mathbb{h}\times\mathbb{r}\\&=-\frac{\mu}{r^3}(\mathbb{r}\times\mathbb{v})\times\mathbb{r}\\&=-\frac{\mu}{r^3}\{(\mathbb{r}\cdot\mathbb{r})\mathbb{v}-(\mathbb{r}\cdot\mathbb{v})\mathbb{r}\}.\end{aligned}$$

$\mathbb{r}\cdot\mathbb{r}=r^2$の両辺を微分して$\mathbb{r}\cdot\mathbb{v}=r\left(\frac{dr}{dt}\right)$．これを代入して，

$$\begin{aligned}\mathbb{h}\times\frac{d\mathbb{v}}{dt}&=-\frac{\mu}{r^3}\left(r^2\mathbb{v}-r\left(\frac{dr}{dt}\right)\mathbb{r}\right)\\&=-\mu\left[\frac{\mathbb{v}}{r}-\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)\mathbb{r}\right]\\&=-\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbb{r}}{r}\right).\end{aligned}$$

積分して

$$\mathbb{h}\times\mathbb{v}=-\mu\left(\frac{\mathbb{r}}{r}+\mathbb{e}\right).$$

$\mathbb{e}$は積分定数ベクトルで, 離心ベクトルという．この３つの第一積分を離心積分，あるいはラプラス積分という．ここで，$\mathbb{h}$と$\mathbb{h}\times\mathbb{v}$の内積を考える．

$$\mathbb{h}\cdot(\mathbb{h}\times\mathbb{v}) = -\mu\left(\frac{\mathbb{h}\cdot\mathbb{r}}{r}+\mathbb{h}\cdot\mathbb{e}\right).$$

左辺と右辺第１項は明らかに $\boldsymbol{0}$ であるから$\mathbb{h}\cdot\mathbb{e} = \mathbf{0}$．即ち$\mathbb{h}$と$\mathbb{e}$は互いに直交しているから$\mathbb{r}$と$\mathbb{v}$の張る軌道面上に$\mathbb{e}$がある．以上より得られた

$$\mathbb{r}\times\mathbb{v} = \mathbb{h} \tag{2-7}$$

$$\mathbb{h}\times\mathbb{v} = -\mu\left(\frac{\mathbb{r}}{r}+\mathbb{e}\right) \tag{2-8}$$

を見ると計６つの式のうち１つは独立ではないので，５つの第一積分が得られた．

3.5　エネルギー積分

次に$\mathbb{v}$と運動方程式$\frac{d\mathbb{v}}{dt}$の内積を考える．(2-5)より$\frac{d\mathbb{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}$であるから

$$\mathbb{v}\cdot\frac{d\mathbb{v}}{dt} = -\left(\frac{\mu}{r^3}\right)\mathbb{r}\cdot\mathbb{v}.$$

左辺はv^2を時間tで微分したときの$\frac{1}{2}$であるから，$v = |\mathbb{v}|$とおいて，

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} = -\left(\frac{\mu}{r^3}\right)\mathbb{r}\cdot\mathbb{v}.$$

積分して

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{\mu}{r}+E.$$

Eは積分定数で

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}.$$

$\frac{1}{2}v^2$は単位質量あたりの運動エネルギー，$-\frac{\mu}{r}$は単位質量あたりのポテンシャルエネルギーとなっている．この和がE一定．Eは第一積分でエネルギー積分と呼ばれる．Eと先の５つの第一積分について，実は$h = |\mathbb{h}|$と$e = |\mathbb{e}|$で表すことができるので，独立な第一積分は５つのままである．このことを示す．離心ベクトル$\mathbb{e}$について(2-8)より

$$-\mu\mathbb{e} = \mathbb{h}\times\mathbb{v} + \mu\left(\frac{\mathbb{r}}{r}\right).$$

両辺を２乗して

$$\mu^2 e^2 = (\mathbb{h}\times\mathbb{v})\cdot(\mathbb{h}\times\mathbb{v}) + 2(\mathbb{h}\times\mathbb{v})\cdot\mu\left(\frac{\mathbb{r}}{r}\right) + \mu^2\left(\frac{\mathbb{r}}{r}\right)^2$$

$$= (\mathbb{h}\times\mathbb{v})\cdot(\mathbb{h}\times\mathbb{v}) + \frac{2\mu}{r}\mathbb{r}\cdot(\mathbb{h}\times\mathbb{v}) + \mu^2$$

スカラー三重積の公式より，

$$(\mathbb{h}\times\mathbb{v})\cdot(\mathbb{h}\times\mathbb{v}) = \mathbb{h}\cdot\big(\mathbb{v}\times(\mathbb{h}\times\mathbb{v})\big).$$

ベクトル三重積の公式より，

$$\mathbb{h}\cdot\big(\mathbb{v}\times(\mathbb{h}\times\mathbb{v})\big) = \mathbb{h}\cdot\big((\mathbb{v}\cdot\mathbb{v})\mathbb{h} - (\mathbb{v}\cdot\mathbb{h})\mathbb{v}\big).$$

式(2-7)より $\mathbb{v}\cdot\mathbb{h} = 0$であるから，$|\mathbb{v}| = v$とおいて

$$\mathbb{h}\cdot\big(\mathbb{v}\times(\mathbb{h}\times\mathbb{v})\big) = \mathbb{h}\cdot((\mathbb{v}\cdot\mathbb{v})\mathbb{h}) = h^2v^2.$$

また，(2-7)より$\mathbb{v}\times\mathbb{r} = -\mathbb{h}$であるから，スカラー三重積の公式を用いて，

$$\begin{aligned}\mathbb{r}\cdot(\mathbb{h}\times\mathbb{v}) &= \mathbb{h}\cdot(\mathbb{v}\times\mathbb{r})\\ &= \mathbb{h}\cdot(-\mathbb{h})\\ &= -h^2. \qquad (2\text{-}9)\end{aligned}$$

よって，

$$\mu^2e^2 = h^2v^2 - \frac{2\mu}{r}h^2 + \mu^2.$$

移項して

$$\mu^2e^2 - \mu^2 = h^2v^2 - \frac{2\mu}{r}h^2$$

$$= 2h^2\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}\right)$$

$$= 2h^2E.$$

よって，Eはhとeで表すことができた．

3.6　運動の極座標表示，ケプラーの第一法則

式(2-8)より$\mathbb{r}$と$\mathbb{h}\times\mathbb{v}$の内積は

$$\mathbb{r}\cdot(\mathbb{h}\times\mathbb{v}) = \mathbb{r}\cdot\left\{-\mu\left(\frac{\mathbb{r}}{r} + \mathbb{e}\right)\right\}$$

$$= -\mu(r + \mathbb{r}\cdot\mathbb{e}).$$

式(2-9)から

$$-h^2 = -\mu(r + \mathbb{r}\cdot\mathbb{e}).$$

ゆえに

$$\frac{h^2}{\mu} = r + \mathbb{r}\cdot\mathbb{e}.$$

$\mathbb{e}$と$\mathbb{r}$のなす角をfとする．fのことを真近点角という．$\mathbb{r}\cdot\mathbb{e} = recosf$を代入して，

$$\frac{h^2}{\mu} = r + \ recosf$$

$$= r(1 + e\cos f).$$

ゆえに，

$$r = \frac{1}{1 + e\cos f}\left(\frac{h^2}{\mu}\right).$$

半長弦$p \equiv \frac{h^2}{\mu}$を用いて，

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}. \tag{2-10}$$

軌道面上の運動をrとfで極座標表示できたので，天体１を原点，$f = 0$のときの$\mathbb{r}$をx軸の正ととる２次元直交座標を導入して天体２の軌道を(2-10)から考える．天体２の座標は

$$\left(r\cos f\,,\ r\sin f\right). \tag{2-11}$$

(2-10)の分母を払って

$$r + er\cos f = p.$$

$x = r\cos f$，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$を代入して，

$$\sqrt{x^2 + y^2} + ex = p.$$

移項すると

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - ex.$$

両辺２乗して

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2pex + e^2x^2$$

移項して

$$(1 - e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2. \tag{2-12}$$

$e \geq 0$より$e = 0$，　$0 < e < 1$，　$e = 1$，　$e > 1$に分けて式(2-12)がどんな軌跡を示すか考える．

ｉ）$e=0$の場合

式(2-12)は$x^2+y^2=p^2$となり，天体２の軌跡は半径pの円である．

ⅱ）$0<e<1$の場合

式(2-12)は

$$x^2+\frac{2pe}{1-e^2}x+\frac{1}{1-e^2}y^2=\frac{p^2}{1-e^2}.$$

$$\left(x+\frac{pe}{1-e^2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2=\frac{p^2}{1-e^2}+\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}$$

$$=\frac{p^2}{(1-e^2)^2}.$$

すなわち，

$$\left(\frac{1-e^2}{p}\right)^2\left(x+\frac{pe}{1-e^2}\right)^2+\left(\frac{1-e^2}{p}\right)^2\left(\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2=1.$$

これは中心$(-\frac{pe}{1-e^2}，0)$，長半径$\frac{p}{1-e^2}$，短半径$\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$の楕円で，焦点と中心の距離は$\frac{ep}{1-e^2}$．(0，0)が焦点になっているとわかる．ケプラーの第一法則，惑星の運動は太陽を焦点とする楕円であることを示している．

ⅲ)e=1 の場合

式(2-12)は$2pex+y^2=p^2$. よって, 天体２の軌跡は放物線$x=-\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}$とわかる．

ⅳ)$e>1$のとき

$$x^2-\frac{2pe}{1-e^2}x-\frac{1}{1-e^2}y^2=\frac{p^2}{1-e^2}$$

$$\left(\frac{1-e^2}{p}\right)^2\left(x-\frac{pe}{1-e^2}\right)^2-\left(\frac{1-e^2}{p}\right)^2\left(\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2=1$$

より，軌跡は双曲線だとわかる．

以上から，天体２の軌跡は

$0\le e<1$のとき楕円

$e=1$のとき放物線

$e>1$のとき双曲線

と分かった．曲線の形を決定する量eを離心率という．

3.7　３次元直交座標の導入

軌道上の運動を考えるために軌道を座標系の中で位置づける．軌道が楕円の場合$(0 \leq e < 1)$として進める．楕円の中心を点Oとし，原点にとる．xy平面を黄道面，x軸正方向を春分点とする３次元直交座標を導入し，黄道面，赤道面，春分点の定義はされたものとして以下考える．

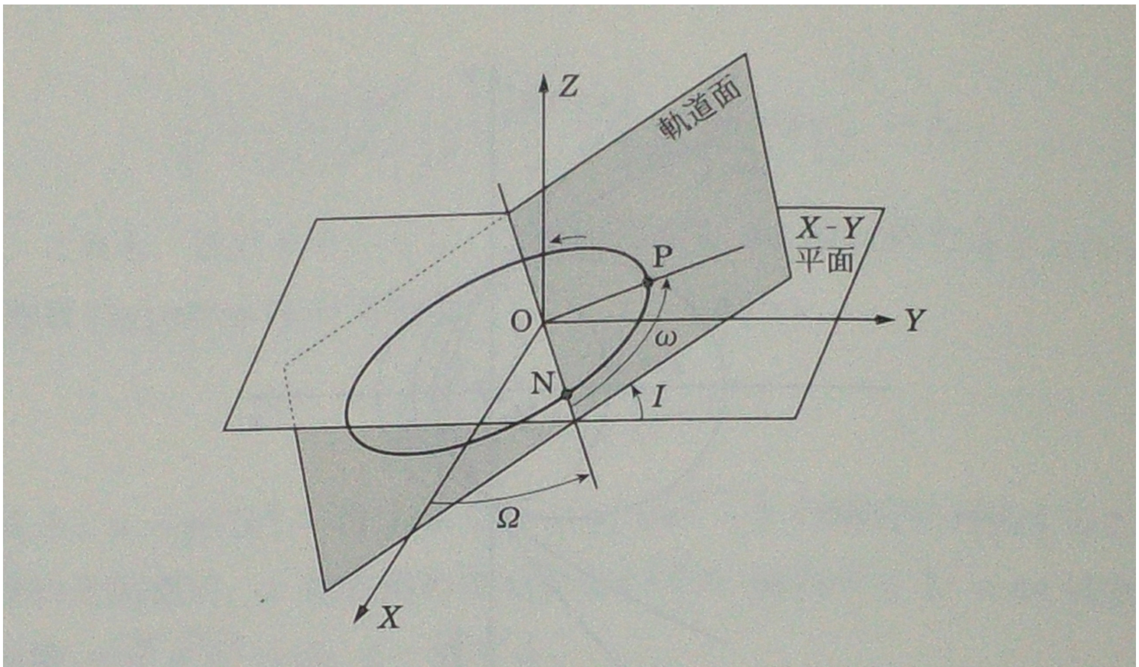


図 4.4　3 次元空間での軌道．軌道傾斜角 i, 昇交点経度 Ω, および近点引数 ω．昇交点を N, 近点を P とした．本図は楕円軌道であるが，放物線軌道や双曲線軌道に対しても同様に定義できる．

図 4.4 を福島[１]$p146$より出典.

xy平面と軌道がある平面のなす角を$I(0 \leq I < \pi)$，xy平面のx軸と昇交点からなる昇交点経度を$\Omega(0 \leq \Omega < 2\pi)$とする．角運動量ベクトル$\mathbb{h} = (h_x，h_y，h_z)$についてて$h = |\mathbb{h}|$として，$z$軸正方向ベクトル$\mathbb{e}_z = (0，0，1)$との内積は，

$$\mathbb{h} \cdot \mathbb{e}_z = h_z = |\mathbb{h}||\mathbb{e}_z| \cos I$$

$|\mathbb{e}_z| = 1$より

$$\cos I = \frac{h_z}{|h||\mathbb{e}_z|} = \frac{h_z}{h}.$$

また，昇交点の方向が$(-h_y，h_x，0)$に一致するから

$$\cos \Omega = \frac{-h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}，\quad \sin \Omega = \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}\ .$$

昇交点と近点のなす角$\omega(0 \leq \omega < 2\pi)$を近点引数といい，

$$\cos\omega = \frac{h_x e_y - h_y e_x}{e\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \ ,$$

$$\sin\omega = \frac{-h_x h_z e_x - h_y h_z e_y + (h_x^2 + h_y^2)e_z}{eh\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}$$

と表される．３つの角I，Ω，ωによって２次曲線が慣性系と一意に関連付けられた．軌道長半径，離心率と合わせて５つが軌道要素と呼ばれる．もう１つの軌道要素を求めていく．

3.8　軌道要素，ケプラーの第三法則

式(2-8)より$\mathbb{h}\times\mathbb{v}$と$\mathbb{r}$の外積は

$$(\mathbb{h}\times\mathbb{v})\times\mathbb{r} = -\mu\left(\frac{\mathbb{r}}{r}\times\mathbb{r} + \mathbb{e}\times\mathbb{r}\right)$$

$$= -\mu(\mathbb{e}\times\mathbb{r}). \tag{2-13}$$

左辺について，三重積の公式より

$$(\mathbb{h}\times\mathbb{v})\times\mathbb{r} = (\mathbb{h}\cdot\mathbb{r})\mathbb{v} - (\mathbb{v}\cdot\mathbb{r})\mathbb{h}.$$

式(2-7)より$\mathbb{h}\cdot\mathbb{r} = 0$であるから，

$$(\mathbb{h}\times\mathbb{v})\times\mathbb{r} = -(\mathbb{v}\cdot\mathbb{r})\mathbb{h}. \tag{2-14}$$

(2-13)，(2-14)より

$$(\mathbb{r}\cdot\mathbb{v})\mathbb{h} = \mu(\mathbb{e}\times\mathbb{r}). \tag{2-15}$$

また，

$$\frac{d}{dt}r = (\mathbb{r}\cdot\mathbb{r})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbb{r}\cdot\mathbb{r})^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}(\mathbb{r}\cdot\mathbb{r}) = \frac{1}{2r}(2\mathbb{r}\cdot\mathbb{v}) = \frac{\mathbb{r}}{r}\cdot\mathbb{v}$$

より，

$$\mathbb{r}\cdot\mathbb{v} = r\frac{dr}{dt}.$$

(2-15)に代入して

$$r\frac{dr}{dt}\mathbb{h} = \mu(\mathbb{e}\times\mathbb{r}).$$

スカラーをとって

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mu}{rh}|\mathbb{e}\times\mathbb{r}|$$

$\mathbb{e}$と$\mathbb{r}$のなす角fより$|\mathbb{e}\times\mathbb{r}| = er\sin f$．よって，

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mu e}{h}\sin f\ . \tag{2-16}$$

式(2-10)をfで微分すると，

$$\frac{dr}{df} = \frac{d}{df}\{p(1+e\cos f)^{-1}\}$$

$$= \frac{ep\sin f}{(1+e\cos f)^2}\,. \tag{2-17}$$

ここで(2-16)，(2-17)から

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{(1+e\cos f)^2}{ep\sin f}\cdot\frac{\mu e}{h}\sin f = \frac{\mu}{hp}(1+e\cos f)^2.$$

楕円の近点をP，焦点をFとすると，長半径$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \frac{p}{1-e^2}$，中心と焦点の距離$\left|\overrightarrow{OF}\right| = \frac{ep}{1-e^2}$．ここで$\left|\overrightarrow{OP}\right| = a$とおくと，$\left|\overrightarrow{OF}\right| = ea$．楕円上の天体２の位置を点$Q$とする. 半径$a$の円上にあり, 点$Q$と同じ$x$座標で，$Q$に最も近い点を点$Q'$とする. このとき，$\angle POQ'$は離心近点角と呼び，$u$とおく.

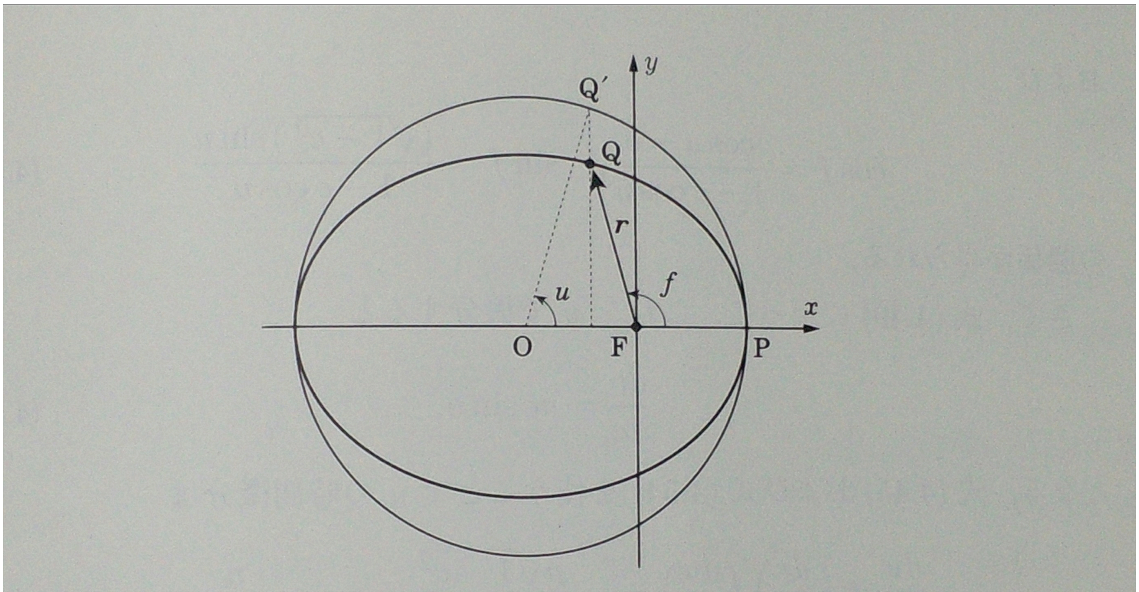


図 4.5　楕円軌道における真近点角 f と離心近点角 u .

図 4.5 を福島[１]p149から出典.

点Qのx座標は$a\cos u - ae$．楕円の短半径をbとすると，y座標は

$$a\sin u \times \frac{b}{a} = a\sin u \times \frac{\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}}{\frac{p}{1-e^2}} = a\sqrt{1-e^2}\sin u.$$

点Qの座標は離心近点角uを用いて表すことができた．uを媒介変数として用いる．
rは天体１と天体２の距離であるから，

$$
\begin{aligned}
r &= \left|\overrightarrow{QF}\right| \\
&= \sqrt{(a\cos u - ae)^2 + \left(a\sqrt{1-e^2}\sin u\right)^2} \\
&= a\sqrt{\cos^2 u - 2e\cos u + e^2 + \sin^2 u - e^2\sin^2 u} \\
&= a\sqrt{1 - 2e\cos u + e^2\cos^2 u} \\
&= a(1 - e\cos u).
\end{aligned}
$$

$r = a(1 - e\cos u)$をuで微分すると

$$\frac{dr}{du} = ae\sin u\ . \tag{2-18}$$

(2-16)，(2-18)から

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{du}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} \\
&= \frac{\frac{\mu e}{h}\sin f}{ae\sin u} \\
&= \frac{\mu\sin f}{ah\sin u} \\
&= \frac{\mu\sin f}{ah\sin u}
\end{aligned}
\tag{2-19}
$$

$\sin u$を求める．点Qのx座標について式(2-12)より，

$$r\cos f = a\cos u - ae.$$

式(2-10)を代入して

$$\frac{p\cos f}{1 + e\cos f} = a\cos u - ae.$$

$$\frac{p}{a}\cdot\frac{\cos f}{1 + e\cos f} = \cos u - e.$$

$a = \frac{p}{1-e^2}$より，$\frac{p}{a} = 1 - e^2$を代入して，

$$\frac{(1-e^2)\cos f}{1 + e\cos f} = \cos u - e.$$

ゆえに，

$$\cos u = \frac{(1-e^2)\cos f}{1+e\cos f} + e$$
$$= \frac{\cos f - e^2\cos f + e + e^2\cos f}{1+e\cos f}$$
$$= \frac{\cos f + e}{1+e\cos f}. \tag{2-20}$$

よって,

$$\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u}$$
$$= \sqrt{1-\left(\frac{\cos f + e}{1+e\cos f}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1+2e\cos f + e^2\cos^2 f - (\cos^2 f + 2e\cos f + e^2)}{1+2e\cos f + e^2\cos^2 f}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+e^2\cos^2 f - \cos^2 f - e^2}}{1+e\cos f}$$
$$= \frac{\sqrt{(1-\cos^2 f) + e^2(\cos^2 f - 1)}}{1+e\cos f}$$
$$= \frac{\sin f\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos f}$$

(2-20)より

$$(1+e\cos f)\cos u = \cos f + e.$$

移項して

$$(e\cos u - 1)\cos f = e - \cos u.$$

よって

$$\cos f = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u},$$
$$\sin f = \sqrt{1-\cos^2 f}$$
$$= \sqrt{1-\frac{(\cos u - e)^2}{(1-e\cos u)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-2e\cos u+e^2\cos^2 u-(\cos^2 u-2e\cos u+e^2)}{(1-e\cos u)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos^2 u+e^2\cos^2 u-e^2}{(1-e\cos u)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2 u-e^2\sin^2 u}}{1-e\cos u}$$

$$= \frac{\sin u\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}.$$

これを(2-19)に代入,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\mu}{ah\sin u}\cdot\frac{\sin u\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u} = \frac{\mu\sqrt{1-e^2}}{ah(1-e\cos u)}$$

平均運動と呼ばれる$n \equiv \frac{\mu\sqrt{1-e^2}}{ah} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$を導入して,

$$\frac{du}{dt} = \frac{n}{1-e\cos u}.$$

分母をはらって,

$$(1-e\cos u)du = ndt.$$

積分すると

$$u - e\sin u = \mu(t-t_0). \tag{2-21}$$

積分定数t_0は近点通過時刻で，６個目の軌道要素である．$t = t_0$のとき$u = 0$，よって$f = 0$を満たすようにとった．天体２が近点のとき$f = u = 0$，楕円軌道を一周して再び近点にきたとき$f = u = 2\pi$となる．よって，(2-21)から公転周期Tは

$$T \equiv \frac{2\pi}{n}.$$

また，平均運動nを長半径$a = \frac{p}{1-e^2}$，半長弦$p = \frac{h^2}{\mu}$によって別の形で表現できる．

$a = \frac{p}{1-e^2}$に$p = \frac{h^2}{\mu}$を代入すると，

$$a = \frac{h^2}{\mu(1-e^2)}.$$

移項して平方根をとると，

$$h = \sqrt{a\mu(1-e^2)}.$$

これを$n = \frac{\mu\sqrt{1-e^2}}{ah}$に代入すると，

$$n = \frac{\mu\sqrt{1-e^2}}{a\sqrt{a\mu(1-e^2)}}$$
$$= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

ゆえに公転周期$T \equiv \frac{2\pi}{n}$は，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

これによって軌道長半径の３乗と公転周期の２乗が比例関係にあることがわかる．ケプラーの第三法則を示すことができた．

４　結び

天体を質点とみなせる議論では，密度一様な球殻の外にある質点が球殻から受ける力が，全ての質量が中心に集まっている球殻から受ける力と等しいと導くことができた．これにより，密度一様な球殻は質量が中心に集まっている球殻，つまり質点とみなせると分かった．質点が球殻の内部にある場合，外の球殻から受ける力は０だと分かった．回転対称な天体を球殻に分割していったとき，最終的に残る質点のような球殻は無重力状態であると導くことができる．２体問題では一体問題に還元することで第一積分を減らし，他の第一積分を求めていくと，角運動量の積分からケプラーの第二法則が分かった．離心積分，エネルギー積分を求めた結果，独立な第一積分は５個得られた．そうして角運動量，離心積分を用いて２つの天体の距離を極座標表示すると，軌道が分かり，ケプラーの第一法則が分かった．最後に軌道を３次元直交座標の中に位置づけ，軌道を記述するのに必要な軌道要素を調べていった．６個目の軌道要素を求めたところでケプラーの第三法則が分かった．軌道要素の議論は慣れないうちは大変だったが，軌道要素と第一積分の意味の類似点が分かると，２体問題全体の流れを通して理解を深められ，感動した．しかし昇交点，近点，楕円軌道の中心との関連に頭が慣れず，また十分な理解に至っていないため，近点引数，

昇交点経度の三角関数の式では少々困った．また軌道要素の議論では何に向かっているか分かり辛いようにも感じられる．この２点を今後の課題としたい.

５　参考文献

[１]福島登志夫『天体の位置と運動』(シリーズ現代の天文学第 13 巻)
日本評論社（2009 年）
[２]原康夫　『第４版物理学基礎』学術図書出版社（2010 年）