2016 年度桂田研究室卒業研究レポート

微分方程式の固有値問題

明治大学 総合数理学部 現象数理学科
前田拓紀

指導教諭：桂田祐史 准教授

2017 年 2 月 15 日

目 次

1　序：研究のきっかけ

大学 3 年次のゼミにおいて，[1] を用いて Sturm-Liouville 問題と呼ばれる微分方程式の固有値問題について学習した．その中で，固有値問題には固有値が無限個存在し，またそれに対応する固有関数が存在，さらには固有関数は直交性を持つなど，様々な性質をもっていることも合わせて学習した．

当初は，物理現象をモデリングし，シミュレーションを行うことによって固有値・固有関数を数値的に考察しようと考えていたのだが，調べていくうちに固有値の存在などの数学的な部分に興味がわいたために，これらについて自ら学習し，その結果を論文として書き残すこととした．

そのため，[2] の pp.156-176 を読み進め，適宜自分で補足を書き足しながら，微分方程式の固有値問題に固有値が存在すること，さらに固有値や固有関数に現れる性質などをまとめ，最後に簡単な 1 次元の 2 階常微分方程式における固有値・固有関数の導出を行い，これらを論文として書き記した．

2　固有値問題の考察 ～「現代解析入門」から～

2.1　１次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq l) \tag{1}$$

を考える．これはバイオリンの弦のような弾性力のある弦を垂直方向に弾いたとき，時刻 t，弦の位置 x における弦の振動 $u = u(t,x)$ を支配する方程式となる．ただし，c は正定数とする．ここで，さらに境界条件として

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \tag{2}$$

を加える．つまり，弦の両端を固定した上での振動を考える．

今，弦の振動が澄んだ楽音を発するときを考える．このときの振動は定在波となる．したがって解 $u(t,x)$ は，

$$u(t,x) = \eta(t)\varphi(x)$$

の形に書き表すことができる．ただし，ここで $\eta(t) \equiv 0$ または $\varphi(x) \equiv 0$ を認めるといずれも $u(t,x) \equiv 0$ となり，すなわち弦が振動しないことを表すことになるからこれを除外して考える．(1) の式に代入することで，

$$\eta''(t)\varphi(x) = c^2\eta(t)\varphi''(x)$$

両辺を $c^2\eta(t)\varphi(x)$ で割って

$$\frac{1}{c^2}\frac{\eta''(t)}{\eta(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

左辺は t のみに依存し，また右辺は x のみに依存するため，この式が常に等しくなるときこれらは定数となる．それを k と表すと，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\eta''(t)}{\eta(t)} = k \\ \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = k \end{cases}$$

なる式が成立する．

しかし，今回の物理現象，すなわち弦の振動の波動方程式として考えた場合，k は負の値に限る．まず $k = 0$ であるとすると第一式から

$$\eta''(t) = 0 \qquad \therefore \quad \eta(t) = C_1 t + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

である．しかしこれでは $t \to \infty$ としたとき $u(t)$ が（正または負の）無限大に発散し，すなわち弦の振動が時間経過ごとにどんどん増大していくことを表してしまう．今回の現象としてはこの状況は起こり得ないだろうから，この状態を考えないことにする．同様に $k > 0$ とすると第一式は，

$$\eta''(t) = kc^2\eta(t).$$

これにより $\eta(t) = C_1\exp(\sqrt{k}|c|t) + C_2\exp(-\sqrt{k}|c|t)$ を得る．ただし C_1, C_2 は任意定数である．しかしこれも，C_1, C_2 が任意であることにより $\eta(t)$ は $t \to \infty$ で無限大に発散する．したがって $k > 0$ も考えず，今回の物理現象においては k を負の数として考えることにする．

そのため，以降の考察では $k=-\lambda$ $(\lambda>0)$ として

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\eta''(t)}{\eta(t)}=-\lambda \\ \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=-\lambda \end{cases}$$

として考えることにする．

ここから，まず係数の簡単な $\varphi(x)$ を決定することを考える．2 階線形常微分方程式

$$\varphi''(x)=-\lambda\varphi(x)$$

の基本解は $\cos\sqrt{\lambda}x$，$\sin\sqrt{\lambda}x$ であるから，

$$\varphi(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

ここで境界条件 (2) を利用する．これにより

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0$$

であり，特に $\varphi(0)=0$ であるから $C_1=0$．したがって，

$$\varphi(x)=C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

また，$\varphi(l)=0$ を利用すると

$$C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

$C_2=0$ とすると $\varphi(x)=0$ となり先の考察に反するため，$\sin\sqrt{\lambda}l=0$ であり，

$$\sqrt{\lambda}l=n\pi \quad (n\in\mathbb{Z}) \qquad \therefore \quad \lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

と表せる．ただし n は整数であるとしたが，$n=0$ とすると $\lambda=0$ となり先の考察に反し，さらに 2 乗していることから負の数は考えず，したがって n は自然数としてよい．すなわち，

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad (n\in\mathbb{N})$$

とかける．これを λ_n と表す．これにより，

$$\varphi(x)=C\sin\sqrt{\lambda_n}l=C\sin\frac{n\pi}{l}x$$

と表せる．これを $\varphi_n(x)$ と表す．

対応する $\eta=\eta_n(t)$ に関しては，計算した $\lambda=\lambda_n$ を代入することで容易に計算できる．

$${\eta_n}''(t)=-c^2\lambda_n\eta_n(t)$$

の基本解は $\cos\sqrt{\lambda_n}ct, \sin\sqrt{\lambda_n}ct$ であり，この線形結合で

$$\eta_n(t)=C_1\cos\sqrt{\lambda_n}ct+C_2\sin\sqrt{\lambda_n}ct \quad (C_1,C_2\text{は任意定数})$$

よって振動数 ν_n は（関数の周期の逆数として）

$$\nu_n=\frac{\sqrt{\lambda_n}c}{2\pi}=\frac{nc}{l}\cdot\frac{1}{2}$$

として得られる．この式は，例えば l : 弦の長さを固定したとしても，c : 弦の張りを強くすれば振動数が大きくなる，つまり高い音を発するということを表している．特に ν_1 は基音の振動数である．

2.2　固有値・固有関数

2.2.1　微分方程式の固有値問題

ここで，上記の考察で出現した λ_n，φ_n が，1 次元波動方程式 (1) と境界条件 (2) からなる固有値問題の，それぞれ固有値・固有関数であることを主張する．この固有値問題に対する一般的な理論を行うために，次のことを導入する．

定義 1．形式的に自己共役

微分作用素 $L_0[u]$ を

$$L_0[u] = p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u$$

として定める．ただし $p(x), q(x), r(x)$ は区間 $[a, b]$ 上の実数値関数で，かつ連続であるとする．ここで $L_0[u]$ が形式的に自己共役であるとは

$$q(x) = p'(x)$$

とかけること，すなわち $L_0[u]$ が

$$L_0[u] = (p(x)u')' + r(x)u$$

の形に書き表せることをいう．

さらに，形式的に自己共役な微分作用素 $L_0[u]$ について，p は正値性の条件

$$p(x) \geq \delta > 0 \quad (\delta\text{は定数})$$

を満たしているものとする．これらの条件下で，2 階 1 次元線形微分方程式

$$L_0[u] + \lambda u = 0 \quad (a \leq x \leq b) \tag{3}$$

を考える．この λ は未知定数とする．さらに境界条件として

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{4}$$

$$\begin{cases} -u'(a) + \sigma_1 u(a) = 0 \\ u'(b) + \sigma_2 u(b) = 0 \end{cases} \qquad (\sigma_1, \sigma_2\text{は定数}) \tag{5}$$

のいずれかを適用させる．(5) を適用させる際には

$$\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0$$

も合わせて仮定する．

定義 2．固有値と固有関数

境界値問題 (3) と (4)，あるいは (3) と (5) の解で恒等的に 0 でない解 $\varphi = \varphi(x)$ が存在するような λ の値を固有値といい，また φ をその固有値に属する固有関数という．さらに，固有値・固有関数を求める問題を固有値問題という．

この定義から，λ が固有値でないとき境界値問題は $u \equiv 0$ のみを解にもち，逆も同様である．

また，λ が固有値，φ, ψ がそれに属する固有関数であるとする．このとき，これらの固有関数の線形結合 $C_1\varphi + C_2\psi$ も，恒等的に 0 にならない限りは同じ固有値に属する固有関数である．したがって，固有値 λ に属する固有関数の集合は，定数関数 0 を加えて考えれ

ば線形空間となる．これを$\mathcal{E}(\lambda)$で表すことにする．これを固有値λに属する固有空間という．

今後表記を簡潔にするために，(3) と (4) による境界値問題を $(\mathrm{EVP})_d$ と記述し，また (3) と (5) による境界値問題を $(\mathrm{EVP})_\sigma$ と記述する．境界条件を区別せず，単純に固有値問題について述べるときは (EVP) と記述する．さらに，$(\mathrm{EVP})_d$，$(\mathrm{EVP})_\sigma$ の固有値全体の集合をそれぞれ $\Lambda_d, \Lambda_\sigma$ と表し，同様に境界条件を区別しないとき Λ と書く．また境界条件 (4) を満足する関数 $u \in C^2[a,b]$ 全体を $\mathcal{D}_d$，境界条件 (5) を満足する関数 $u \in C^2[a,b]$ 全体を $\mathcal{D}_\sigma$ と表し，こちらも境界条件を区別しないときは $\mathcal{D}$ と表す（言うなれば固有値問題の定義域である）．

さらに，区間 (a,b) 上の L^2 内積を $(\ ,\ )$ と表す；

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

また，区間 (a,b) 上での L^2 ノルムを $\|\ \|$ と表すことにする；

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}.$$

この先，Λ の性質を調べていく．さらに，各々の固有値に属する固有関数の性質，特に完備性を示すことにする．そのために補題をいくつか証明していく．

補題 1

(EVP) の固有値はすべて実数である．

（証明）$(\mathrm{EVP})_\sigma$ の方を示す．$\lambda \in \Lambda_\sigma$ とし，φ を λ に属する固有関数であるとする．このとき $\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}$ も同じ固有値に属する固有関数であることから，ここで考える固有関数は $\|\varphi\| = 1$ を満たすものとしてよい．このとき

$$L_0[\varphi] + \lambda\varphi = 0$$

であることから

$$\begin{aligned}
\lambda = \lambda\|\varphi\|^2 &= \lambda(\varphi,\varphi) = (\lambda\varphi,\varphi) = -(L_0[\varphi],\varphi) \\
&= -\int_a^b \{(p(x)\varphi')' + r(x)\varphi\}\overline{\varphi}\,dx \\
&= -\left[p(x)\varphi'\overline{\varphi}\right]_a^b + \int_a^b \{p(x)\varphi'\overline{\varphi}' - r(x)\varphi\overline{\varphi}\}\,dx \\
&= -p(b)\varphi'(b)\overline{\varphi(b)} + p(a)\varphi'(a)\overline{\varphi(a)} + \int_a^b \{p(x)|\varphi'(x)|^2 - r(x)|\varphi(x)|^2\}\,dx \\
&= p(b)\sigma_1|\varphi(b)|^2 + p(a)\sigma_2|\varphi(a)|^2 + \int_a^b \{p(x)|\varphi'(x)|^2 - r(x)|\varphi(x)|^2\}\,dx.
\end{aligned}$$

ここでは，部分積分及び (5) の式を用いている．事前の仮定から a, b, σ_1, σ_2 はすべて実数であり，また $p(x), r(x)$ は実数値関数であるから最後の式はすべて実数となる．したがって λ は実数である． ■

補題 2

(EVP) の任意の固有値が属する固有空間は 1 次元である．

（証明）同様に $(\mathrm{EVP})_\sigma$ での証明を行う．$\lambda \in \Lambda_\sigma$ とする．このとき λ に属する固有関数 φ は

$$L_0[u] + \lambda u = 0 \tag{6}$$

の解である．この方程式の解の集合を $\mathcal{S}(\lambda)$ と表す．このとき (6) は 2 階の微分方程式であることから

$$\dim \mathcal{S}(\lambda) = 2.$$

さらに $\mathcal{E}(\lambda) \subset \mathcal{S}(\lambda)$ であることより，$\dim \mathcal{E}(\lambda) \leq 2$ となる．

ここで $\dim \mathcal{E}(\lambda) = 2$ とすると $\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{S}(\lambda)$ となるが，方程式 (6) に初期条件として

$$u(a) = 0, u(b) = 1$$

を追加すると方程式の解は $\mathcal{E}(\lambda)$ に属さないので不適．したがって $\mathcal{E}(\lambda)$ は $\mathcal{S}(\lambda)$ の真部分集合となり $\dim \mathcal{E}(\lambda) < 2$．これと $\dim \mathcal{E}(\lambda) > 0$ とから，$\dim \mathcal{E}(\lambda) = 1$ を得る． ■

一般に，固有値 λ に対して $\dim \mathcal{E}(\lambda)$ を λ の多重度という．特に $\dim \mathcal{E}(\lambda) = 1$ であるとき，固有値 λ は単純であるという．先ほどの補題 2 により，(EVP) の固有値はすべて単純であることがわかる．

補題 3

固有値 λ に属する固有関数のうち，実数値のものが存在する．

（証明）$\lambda \in \Lambda$ とし，φ をそれに属する固有関数とする．先ほどの補題により λ は実数であるから，$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(x)$ も同じ固有値 λ に属する固有関数である．このとき，

$$\psi_1 = \Re(\varphi) = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2}, \quad \psi_2 = \Im(\varphi) = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2i}$$

とすると，これらはいずれも実数値をとり，さらに少なくとも一方は恒等的に 0 でない（ともに 0 となるのは $\varphi \equiv 0$ のときに限り，これは固有関数の定義に反するため）．したがって ψ_1, ψ_2 のうち恒等的に 0 にならない方が，λ に属する実数値の固有関数である． ■

補題 4

異なる固有値に属する固有関数は直交する．

（証明）先に，$(\mathrm{EVP})_\sigma$ のとき $(L_0[\varphi], \psi) = (\varphi, L_0[\psi])$ であることを示す．$\lambda, \mu \in \Lambda_\sigma, \lambda \neq \mu$ とする．まず，(5) や部分積分により

$$\begin{aligned}
(L_0[\varphi], \psi) &= \int_a^b \{(p(x)\varphi')' + r(x)\varphi\} \overline{\psi}\, dx \\
&= \left[p(x)\varphi'\overline{\psi}\right]_a^b - \int_a^b \left\{p(x)\varphi'\overline{\psi}' - r(x)\varphi\overline{\psi}\right\} dx \\
&= p(b)\varphi'(b)\overline{\psi(b)} - p(a)\varphi'(a)\overline{\psi(a)} - (p(x)\varphi', \psi') + (r(x)\varphi, \psi) \\
&= -p(b)\varphi(b)\overline{\psi(b)} - p(a)\varphi(a)\overline{\psi(a)} - (p(x)\varphi', \psi') + (r(x)\varphi, \psi). \\
(\varphi, L_0[\psi]) &= \int_a^b \varphi \left\{\left(p(x)\overline{\psi}'\right)' + r(x)\overline{\psi}\right\} dx \\
&= \left[p(x)\varphi\overline{\psi}'\right]_a^b - \int_a^b \left\{\varphi' p(x)\overline{\psi}' - \varphi r(x)\overline{\psi}\right\} dx \\
&= p(b)\varphi(b)\overline{\psi'(b)} - p(a)\varphi(a)\overline{\psi'(a)} - (\varphi', p(x)\psi') + (\varphi, r(x)\psi) \\
&= -p(b)\varphi(b)\overline{\psi(b)} - p(a)\varphi(a)\overline{\psi(a)} - (\varphi', p(x)\psi') + (\varphi, r(x)\psi).
\end{aligned}$$

さらに $p(x), r(x)$ は実数値関数であるから

$$(p(x)\varphi', \psi') = (\varphi', p(x)\psi'), \quad (r(x)\varphi, \psi) = (\varphi, r(x)\psi)$$

したがって $(L_0[\varphi], \psi) = (\varphi, L_0[\psi])$ を得る．ここから (3) を使うことにより

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi, \psi) &= (\lambda\varphi, \psi) = -(L_0[\varphi], \psi) \\ &= -(\varphi, L_0[\psi]) = (\varphi, \mu\psi) = \mu(\varphi, \psi)\end{aligned}$$

ただし補題 1 により $\mu \in \mathbb{R}$ であることを用いた．これにより

$$(\lambda - \mu)(\varphi, \psi) = 0$$

であるが，$\lambda \neq \mu$ であることから $(\varphi, \psi) = 0$．よって示された． ■

固有値問題を調べる際には，$L_0[u]$ の代わりに $L_0[u] - ku$ を調べても良い．というのは，L_0 に対する固有値 λ の固有関数は，$L_0 - k$ に対する固有値 $\lambda + k$ の固有関数になり，その逆も成立するためである．

ここで，k を十分大きな正数とすると

$$(-L_0[u] + ku, u) \geq \|u\|^2 \quad (u \in \mathcal{D}) \tag{7}$$

が成り立つ．

（証明）補題 1 の証明に用いた方法と同様にして，

$$\begin{aligned}&(-L_0[u] + ku, u) \\ &= -(L_0[u], u) + k\|u\|^2 \\ &= p(b)\sigma_1|u(b)|^2 + p(a)\sigma_2|u(a)|^2 + \int_a^b \{p(x)|u'|^2 - r(x)|u|^2\}\, dx + k\|u\|^2 \\ &= p(b)\sigma_1|u(b)|^2 + p(a)\sigma_2|u(a)|^2 + \int_a^b p(x)|u'|^2\, dx + \int_a^b \{k - r(x)\}|u|^2\, dx.\end{aligned}$$

と書き表せるが，第 3 項まではすべて正，かつ第 4 項も k を十分大きな正数としたことにより

$$(-L_0[u] + ku, u) \geq \int_a^b |u|^2\, dx = \|u\|^2$$

を得る． ■

このとき，境界条件 (4) または (5) のもとでの

$$-L_0[u] + ku = f(x) \tag{8}$$

という微分方程式の境界値問題は，$\forall f \in C[a, b]$ に対して一意に可解である．このことは，次の定理（[2] p.152 より）から導かれる．

定理：境界値問題の解の一意性

微分作用素 L_0 が定義 1 の意味で自己共役であり，かつ，$p(x)$ は正値性の条件

$$p(x) \geq \delta > 0 \quad (\delta\text{は定数})$$

を満たしているものとする．さらに $r(x) < 0 \quad (x \in [a, b])$ であるならば，

$$-L_0[u] = f(x)$$

と境界条件 (4) または (5) からなる境界値問題は一意に可解である．

すなわち，

$$-(p(x)u')' - r(x)u = f(x)$$

が一意に可解である条件は $-r(x) > 0$ である．このとき，(8) は

$$-(p(x)u') - (r(x) - k)u = f(x)$$

と表すことができ，定理と比較するとこれが一意に可解である条件は

$$r(x) - k < 0$$

である．これは，k が十分に大きな正数であるとき実現する．

(8) の解は

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy$$

として与えられる．ここで $G(x,y)$ は Green 関数で，基本解 φ, ψ を用いて

$$G(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{\varphi(x)\psi(y)}{p(y)W(y)} & (a \le x \le y \le b) \\ -\dfrac{\varphi(y)\psi(x)}{p(y)W(y)} & (a \le y \le x \le b) \end{cases}$$

として表されるものである．また $W(y)$ は Wronski の行列式である；

$$W(y) = \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) \\ \varphi'(y) & \psi'(y) \end{vmatrix}.$$

ここで，境界値問題の Green 関数 $G(x,y)$ を積分核とする積分作用素を $\boldsymbol{G}$ と表す；

$$\boldsymbol{G}f(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy$$

したがって (8) の解は $u = \boldsymbol{G}f$ と表すことができる．

では，λ' が $L_0 - k$ の固有値，φ はそれに属する固有関数とするならば，

$$-L_0[\varphi] + k\varphi = \lambda'\varphi$$

となることから，(8) の方程式の解の式から $\varphi = \boldsymbol{G}(\lambda'\varphi)$．よって

$$\boldsymbol{G}\varphi = \mu\varphi$$

と表せる．ただし $\mu = \dfrac{1}{\lambda'}$ である．これにより，L_0 の境界条件 $u \in \mathcal{D}$ のもとでの固有値問題は，$\boldsymbol{G}$ の固有値問題に帰着させることができるということがわかる．また $\boldsymbol{G}$ の固有値は μ であるが，L_0 の固有値 λ との間には

$$\lambda = \frac{1}{\mu} - k \tag{9}$$

という関係もある．

2.2.2　積分作用素 G の固有値問題

ここからは，$\boldsymbol{G}$ の固有値問題を見ていくことにする．$\boldsymbol{G}$ の固有値全体を $\sigma(\boldsymbol{G})$ と表す．

補題 5

$$\sigma(\boldsymbol{G}) \subset (0,1]$$

（証明）$\mu \in \sigma(\boldsymbol{G})$ を任意に取ると，(9) と補題 1 より $\mu \in \mathbb{R}$ であり，また明らかに $\mu \neq 0$ であることから

$$\sigma(\boldsymbol{G}) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

であることに注意する．$\lambda' = \dfrac{1}{\mu}$ と置くことにすると，これに属する固有関数 φ は

$$-L_0[\varphi] + k\varphi = \lambda'\varphi, \varphi \in \mathcal{D}$$

を満足する．(7) に $u = \varphi$ を代入して

$$\|\varphi\|^2 \leq (-L_0[\varphi] + k\varphi, \varphi) = (\lambda'\varphi, \varphi) = \lambda'\|\varphi\|^2$$

しかし $\|\varphi\| > 0$ であるから，$\lambda' \geq 1$．したがって $0 < \mu \leq 1$ となり，かつ μ は任意としているから先の補題を得る．■

さらに，補題 2 より $\boldsymbol{G}$ の固有値は単純であり，また補題 3 より固有関数の中には実数値のものが存在する．

ここで，さらにもう一つ補題を証明する．

補題 6（Ascoli の選出定理，または Ascoli-Arzelá の定理）

関数列 u_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数の列で，次の性質 i), ii) をもつとする．

i) ある定数 M に対して，$|u_n(x)| \leq M \quad (n = 1, 2, \cdots, x \in I)$．(一様有界性)

ii) 任意の正数 ε に対し，n によらない正数 δ を

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |u_n(x_1) - u_n(x_2)| < \varepsilon \quad (x_1, x_2 \in I)$$

が成り立つように取れる．(同等連続性)

このとき，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上で一様収束する部分列を含む．

（証明）I の N 等分点（両端含む）$N+1$ 個の点を $N = 1, 2, \cdots$ と動かすことによって得られるすべての点全体を D で表すと，集合 D は I で稠密である．また，D は可算集合であるからすべての点に番号をつけることができる．そこでこれを $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ と表す．このとき i) から $\{u_n(x_1)\}$ は有界数列である．したがって Bolzano-Weierstrass の定理から収束部分列を取ることができる．

この部分列を $\{u_{1,j}(x_1)\}$ と表す．ここで，数列 $\{u_{1,j}(x_2)\}$ を考えるとこれも有界であるから，$\{u_{2,j}(x_2)\}$ が収束するように部分列 $\{u_{2,j}\}$ を取ることができる．これを繰り返していくことで，

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \supset \{u_{1,j}\}_{j=1}^{\infty} \supset \{u_{2,j}\}_{j=1}^{\infty} \supset \cdots \supset \{u_{k,j}\}_{j=1}^{\infty} \supset \cdots$$

かつ，各々 $j \to \infty$ とすると $u_{k,j}(x_k)$ が収束するように取ることができる．

ここで，$v_j = u_{j,j}\ (j = 1, 2, \cdots)$ となるように取る[1]．すると $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であり，$\forall k \in \mathbb{N}$ とするとき

$$j \geq k \Rightarrow v_j \in \{u_{k,j}\}$$

が成り立つから，$j \to \infty$ のとき $v_j(x_k)$ は収束する．よって，$\{v_j\}$ は D で各点収束する関数列であることがわかる．

ではここから，$\{v_j\}$ が一様収束することを示す．$\varepsilon > 0$ を任意にとる．ここで ii) の条件を満たす δ もとる．次に

$$N > \frac{b-a}{\delta}$$

をみたす $N \in \mathbb{N}$ について，$I = [a, b]$ を N 等分したときの分点を $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N+1}$ とする．これらの分点が先ほどの集合 D に属することは明らかである．さらに先に考察したことから，これらすべての点において $\{v_j\}$ は収束するから，

$$|v_j(\xi_k) - v_l(\xi_k)| < \varepsilon \quad (j, l \geq n_0, k = 1, 2, \cdots, N+1)$$

をみたす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する．

ここで D は稠密であるから，$\forall x \in I$ について

$$(\exists \xi_k)\ |x - \xi_k| < \delta$$

とできる．すると ii) の条件により

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |v_n(x) - v_n(\xi_k)| < \varepsilon$$

である．したがって

$$\begin{aligned}|v_j(x) - v_l(x)| &\leq |v_j(x) - v_j(\xi_k)| + |v_j(\xi_k) - v_l(\xi_k)| + |v_l(\xi_k) - v_l(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

ε は任意正数としたので，$\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ は一様収束することが示された． ■

今回は I は1次元の閉区間としたが，多次元で考える場合は I をコンパクト集合として考えれば良い．例えば I を $\mathbb{R}^m$ の有界閉集合であるとしても，この補題は成り立つ．ここから，Ascoli の選出定理によって導かれる系，及び補題を紹介する．

系；連続核積分作用素のコンパクト性

I を有界閉集合 $[a, b]$ とし，$K = K(x, y)$ を $I \times I$ で連続な関数とする．また，この $K(x, y)$ を積分核とする積分作用素を $\boldsymbol{K}$ で表す．すなわち

$$(\boldsymbol{K}u)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)\, dy \quad (x \in I).$$

今，$\|u_n\| \leq M_1$ (M_1は定数) を満足する連続関数の列 $\{u_n\}$ に対し，$v_n = \boldsymbol{K}u_n$ とおく．このとき連続関数の列 $\{v_n\}$ は一様収束する部分列を含む．

（証明）Schwarz の不等式により

$$|v_n(x)|^2 \leq \int_a^b |K(x, y)|^2\, dy \cdot \int_a^b |u_n(y)|^2\, dy \leq M_2 \cdot M_1$$

[1] このような v_j の選び方を対角線論法という．

となる．ただし $M_2 = \max_{a \le x \le b} \left(\int_a^b |K(x,y)|^2 \, dy \right)$．これにより $\{v_n\}$ は一様有界であり，同様に

$$
\begin{aligned}
|v_n(x_1) - v_n(x_2)|^2 &\le \int_a^b |K(x_1,y) - K(x_2,y)|^2 \, dy \cdot \int_a^b |u_n(y)|^2 \, dy \\
&\le {M_1}^2 \omega(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

となる．ただし $\omega(x_1,x_2) = \displaystyle\int_a^b |K(x_1,y) - K(x_2,y)|^2 \, dy$．

しかし，K は連続であるから $|x_1 - x_2| \to 0$ のとき $\omega(x_1,x_2) \to 0$ である．ゆえに $\{v_n\}$ の同等連続性も示され，Ascoli の選出定理により $\{v_n\}$ は一様収束する部分列を含む． ■

これより，固有値問題の考察に戻る．次の補題を考える．

補題 7

$\sigma(\boldsymbol{G})$ は $(0,1]$ に含まれる可算集合であり，0 以外の点に集積することはない．

（証明）補題 5 よりすでに $\sigma(\boldsymbol{G}) \subset (0,1]$ は示されているため，後半を示す．今，$\overline{\mu} > 0$ が $\sigma(\boldsymbol{G})$ の集積点であるとし，$\overline{\mu}$ に収束するような $\sigma(\boldsymbol{G})$ の点列を $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$，これらに属する固有関数の列を $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする．このとき，

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

であると仮定してよい．すると Ascoli の選出定理の系により，$\{\boldsymbol{G}\varphi_n\}$ は一様収束する部分列を含む（$M_1 = 1$ とせよ）．すると $\boldsymbol{G}\varphi_n = \mu_n \varphi_n$ であることから

$$\varphi_n = \frac{1}{\mu_n} \boldsymbol{G} \varphi_n$$

として表せ，かつ $\dfrac{1}{\mu_n} \to \dfrac{1}{\overline{\mu}}$ であるから，$\{\varphi_n\}$ が一様収束する部分列を含むことになる．

一方で，$n \neq m$ ならば補題 4 により $(\varphi_n, \varphi_m) = 0$ である．すると

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = \|\varphi_n\|^2 + \|\varphi_m\|^2 = 2 \quad (n \neq m)$$

したがって，$\{\varphi_n\}$ の収束条件となる $(\forall \varepsilon > 0)\ \|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ が満たせないことになる．つまり $\{\varphi_n\}$ のいかなる部分列も，L^2 ノルムに関して収束列になり得ない．したがって当然一様収束列にもなり得ない．これは矛盾であるから，$\overline{\mu} \le 0$．ゆえに 0 以外の点には集積しない． ■

この補題により，$\sigma(\boldsymbol{G})$ は $(0,1]$ の有限集合となるか，

$$\mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_n > \cdots \to 0$$

という下に有界な単調減少な無限数列となるかのいずれかである．しかし，実際には後者が現実になる．それを証明する．

ここで，恒等的に 0 でない任意の連続関数 f に対して

$$R[f] = R[\boldsymbol{G}; f] := \frac{(\boldsymbol{G}f, f)}{\|f\|^2}$$

とおく．この汎関数 R を $\boldsymbol{G}$ の Rayleigh 商とよぶ．ところで $\boldsymbol{G}$ の積分核である Green 関数 $G(x,y)$ はその定義から

$$G(x,y) = G(y,x)$$

である．この条件のもとにおいて $\boldsymbol{G}$ は L^2 内積に関して対称性をもつ；

$$(\boldsymbol{G}f, h) = (f, \boldsymbol{G}h).$$

したがって，f を複素数値関数としても $(\boldsymbol{G}f, f)$ は実数であり，したがって $R[f]$ は実数である，ただし，固有関数は実数値のものが必ず存在する（補題 3）から，以降すべての関数は実数値であるものとして議論を進める．

ここで，$u = \boldsymbol{G}f$ を (7) に代入すると

$$(-L_0[u] + ku, u) = (f, \boldsymbol{G}f) \geq \|\boldsymbol{G}f\|^2 \geq 0$$

となり，特に $(\boldsymbol{G}f, f) = (f, \boldsymbol{G}f) \geq 0$ （等号は $f \equiv 0$ のとき）を得る．一方で Schwarz の不等式から

$$\|\boldsymbol{G}f\|^2 \leq (f, \boldsymbol{G}f) \leq \|f\| \cdot \|\boldsymbol{G}f\|$$

したがって $\|\boldsymbol{G}f\| \leq \|f\|$．同様にして $(\boldsymbol{G}f, f) \leq \|\boldsymbol{G}f\| \cdot \|f\|$ となることによりこれらをまとめると

$$(\boldsymbol{G}f, f) \leq \|\boldsymbol{G}f\| \cdot \|f\| \leq \|f\|^2$$

こうして $0 < R[f] \leq 1$ $(f \in C[a,b], f \not\equiv 0)$ を得ることができる．つまり R の値域は有界であり

$$\mu_0 = \sup\{R[f] \mid f \in C[a,b], f \not\equiv 0\} \tag{10}$$

をおけば，$0 < \mu_0 \leq 1$ である．実はこの μ_0 が $\boldsymbol{G}$ の最大の固有値であることを証明する．まず次の補題を考える．

補題 8

μ_0 が $R[f]$ の最大値ならば，μ_0 は $\boldsymbol{G}$ の最大の固有値である．そして，$R[\varphi] = \mu_0$ となる φ は固有値 μ_0 に属する固有関数である．

（証明）μ_0 が $R[f]$ の最大値であるとする．このとき

$$R[\varphi_0] = \mu_0 \ (\varphi_0 \in C[a,b] \setminus \{0\})$$

となる φ_0 が存在する．いま t を実数のパラメータとして

$$\eta(t) = R[\varphi_0 + th] = \frac{(\boldsymbol{G}(\varphi_0 + th), \varphi_0 + th)}{\|\varphi_0 + th\|^2}$$

を考える（h は任意の連続関数）．t を十分小さいパラメータとすれば，$\varphi_0 + th$ を恒等的に 0 にならなくなるようにできる．h を固定して考えることにすると，η は $t = 0$ のとき最大値 μ_0 を取るから

$$\eta'(0) = 0$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{G}(\varphi_0 + th), \varphi_0 + th) &= (\boldsymbol{G}\varphi_0 + \boldsymbol{G}(th), \varphi_0 + th) \\
&= (\boldsymbol{G}\varphi_0, \varphi_0) + (\boldsymbol{G}\varphi_0, th) + (\boldsymbol{G}(th), \varphi_0) + (\boldsymbol{G}(th), th) \\
&= t^2(\boldsymbol{G}h, h) + t\{(\boldsymbol{G}\varphi_0, h) + (\boldsymbol{G}h, \varphi_0)\} + (\boldsymbol{G}\varphi_0, \varphi_0) \\
&= t^2(\boldsymbol{G}h, h) + 2t(\boldsymbol{G}\varphi_0, h) + (\boldsymbol{G}\varphi_0, \varphi_0) \\
\|\varphi_0 + th\|^2 &= t^2\|h\|^2 + 2t(\varphi_0, h) + \|\varphi_0\|^2
\end{aligned}$$

であることより，

$$\eta'(t) = \frac{\{2t(\boldsymbol{G}h,h)+2(\boldsymbol{G}\varphi_0,h)\}\|\varphi_0+th\|^2-(\boldsymbol{G}(\varphi_0+th),\varphi_0+th)(2\|h\|^2+2(\varphi_0,h))}{\|\varphi_0+th\|^4}$$

$$\eta'(0) = \frac{2(\boldsymbol{G}\varphi_0,h)\|\varphi_0\|^2-(\boldsymbol{G}\varphi_0,\varphi_0)\cdot 2(\varphi_0,h)}{\|\varphi_0\|^4}$$

(分母) $\neq 0$ を考慮して $(\boldsymbol{G}\varphi_0,h)\|\varphi_0\|^2-(\boldsymbol{G}\varphi_0,\varphi_0)\cdot(\varphi_0,h)=0$．つまり

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{G}\varphi_0,h)-\frac{(\boldsymbol{G}\varphi_0,\varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2}(\varphi_0,h)=0\\
&(\boldsymbol{G}\varphi_0,h)-R[\varphi_0](\varphi_0,h)=0\\
&(\boldsymbol{G}\varphi_0,h)-(\mu_0\varphi_0,h)=0 \qquad \therefore \quad (\boldsymbol{G}\varphi_0-\mu_0\varphi_0,h)=0
\end{aligned}$$

ここでは Rayleigh 商の定義式及び仮定 $R[\varphi_0]=\mu_0$ を用いた．h は任意であるから

$$\boldsymbol{G}\varphi_0-\mu_0\varphi_0=0.$$

この式は $\boldsymbol{G}\varphi_0=\mu_0\varphi_0$ を意味し，したがって μ_0 が $\boldsymbol{G}$ の固有値，φ_0 がそれに属する固有関数であることを示す．つまり $\mu_0\in\sigma(\boldsymbol{G})$ である．

この μ_0 が最大の固有値であることを示す．$\mu\in\sigma(\boldsymbol{G})$ を任意にとり，それに属する固有関数 φ を考える．すると μ_0 が最大値であることから $R[\varphi]\leq\mu_0$．ところで

$$R[\varphi]=\frac{(\boldsymbol{G}\varphi,\varphi)}{\|\varphi\|^2}=\frac{(\mu\varphi,\varphi)}{\|\varphi\|^2}=\mu$$

であるから，$\mu\leq\mu_0$．ゆえに μ_0 は最大の固有値である． ■

2.2.3　$\boldsymbol{G}$ の固有値の存在証明

さらに，ここから $\boldsymbol{G}$ に固有値が存在することを証明する．実は (10) で定義した μ_0 が固有値となる．それを証明する；

定理 1

$\mu_0=\sup\{R[f]\mid f\in C[a,b], f\not\equiv 0\}$ として定義した μ_0 は $\boldsymbol{G}$ の最大の固有値である．

(証明) まず作用素 $B:C[a,b]\to C[a,b]$ を

$$Bf=\mu_0 f-\boldsymbol{G}f$$

なる式で定義する．すると $\boldsymbol{G}$ の対称性は B に遺伝する．つまり

$$(Bf,g)=(f,Bg)$$

と書ける．次に

$$(Bf,f)=(\mu_0 f-\boldsymbol{G}f,f)=\mu_0\|f\|^2-(\boldsymbol{G}f,f)$$

により，さらに $(\boldsymbol{G}f,f)\geq 0$ だったことから μ_0 の定義とともに，

$$0\leq(Bf,f)\leq\mu_0\|f\|^2 \tag{11}$$

が成立する．

続いて，

$$\|Bf\| \le \mu_0 \|f\| \tag{12}$$

を示す．任意の連続関数 f, g を考え，$f+g$ および $f-g$ に対して (11) を適用させる．

$$\begin{aligned}0 &\le (B(f+g), f+g) \le \mu_0 \|f+g\|^2, \\ 0 &\le (B(f-g), f-g) \le \mu_0 \|f-g\|^2.\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}(B(f+g), f+g) - (B(f-g), f-g) &= (Bf+Bg, f+g) - (Bf-Bg, f-g) \\ &= 2(Bf, g) + 2(Bg, f) = 4(Bf, g) \\ \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 &= 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2\end{aligned}$$

であるからこれら及び $\mu_0 > 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}|4(Bf, g)| &= |(B(f+g), f+g) - (B(f-g), f-g)| \\ &\le |(B(f+g), f+g)| + |(B(f-g), f-g)| \\ &\le \mu_0\|f+g\|^2 + \mu_0\|f-g\|^2 = 2\mu_0(\|f\|^2 + \|g\|^2)\end{aligned}$$

つまり

$$2|(Bf, g)| \le \mu_0(\|f\|^2 + \|g\|^2). \tag{13}$$

いま $\|Bf\| \neq 0, \|f\| \neq 0$ であるとして

$$g = \frac{\|f\|}{\|Bf\|} Bf$$

とおくことにする．これを (13) に代入する．

$$\begin{aligned}(Bf, g) &= \frac{\|f\|}{\|Bf\|}(Bf, Bf) = \|f\| \cdot \|Bf\|, \\ \|g\| &= \frac{\|f\|}{\|Bf\|}\|Bf\| = \|f\|\end{aligned}$$

であるから，

$$2\|f\| \cdot \|Bf\| \le 2\mu\|f\|^2$$

ゆえに (12) が示される．一方で

$$\mu_0\|f\| \ge 0$$

が $0 < \mu_0 \le 1$ から従うから，$\|Bf\| = 0$ のとき (12) は成立する．また $\|f\| = 0$ とすると，

$$\|Bf\| = \|\mu_0 f - \boldsymbol{G} f\| \le \mu_0\|f\| + \|\boldsymbol{G} f\| \le 0$$

であるから (12) は成り立つ（最後は $\|\boldsymbol{G} f\| \le \|f\|$ を用いた）．よって (12) は一般に成立する．

さらに作用素 B は次の性質ももつ：

$$(\forall f, g : \text{連続関数})\ \|(Bf, g)| \le \sqrt{(Bf, f)} \cdot \sqrt{(Bg, g)} \tag{14}$$

これを証明するために，$\varepsilon > 0$ をとり，作用素 B_ε を

$$B_\varepsilon f := Bf + \varepsilon f$$

として定義する．このとき

$$(B_\varepsilon f, f) = (Bf + \varepsilon f, f) = (Bf, f) + \varepsilon \|f\|^2 \geq \varepsilon \|f^2\|$$

と表せる．さらに t を実数の変数として

$$\begin{aligned}\eta(t) &= (B_\varepsilon(tf - g), tf - g)\\ &= t^2(B_\varepsilon f, f) - 2t(B_\varepsilon f, g) + (B_\varepsilon g, g)\end{aligned}$$

とおく．$\eta(t) \geq 0$ を常に満足させる条件を考えると，$(B_\varepsilon f, f) > 0$ のときは

$$(B_\varepsilon f, g)^2 \leq (B_\varepsilon f, f)(B_\varepsilon g, g)$$

であり，すなわち

$$|(B_\varepsilon f, g)| \leq \sqrt{(B_\varepsilon f, f)} \cdot \sqrt{(B_\varepsilon g, g)} \tag{15}$$

を得る．$(B_\varepsilon f, f) = 0$ のときは (15) は自明である（$\|f\| = 0$ となるため）．よって (15) において $\varepsilon \to +0$ とすると (14) を得る．

これで定理の証明の第 1 段階は終了である．

次に，μ_0 は $R[f]$ の上限であるから

$$R[f_n] \to \mu_0 \quad (n \to \infty)$$

となるような関数列 $\{f_n\}$ が存在する．ここでは $\|f_n\| = 1$ を仮定する．そうでない場合も必要に応じて，f_n を $f_n/\|f_n\|$ で置き換えることが可能だからである．

ここで，$n \to \infty$ としたときに L^2 において

$$\mu_0 f_n - \boldsymbol{G} f_n \to 0 \tag{16}$$

となることを示す．上記の作用素 B を利用し，(14) において $f = f_n$，$g = Bf_n$ とすると

$$\|Bf_n\|^2 \leq \sqrt{(Bf_n, f_n)} \cdot \sqrt{(B(Bf_n), Bf_n)}.$$

ここで（$\|f_n\| = 1$ を利用して）

$$(Bf_n, f_n) = \frac{(\mu_0 f_n - \boldsymbol{G} f_n, f_n)}{\|f_n\|^2} = \mu_0 - R[f_n] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

一方 Schwarz の不等式と (12) により

$$\begin{aligned}|(B(Bf_n), Bf_n)| &\leq \|B(Bf_n)\| \cdot \|Bf_n\|\\ &\leq \mu_0 \|Bf_n\| \cdot \mu_0 \|f_n\|\\ &\leq \mu_0 \cdot \mu_0 \|f_n\| \cdot \mu_0 \|f_n\| = {\mu_0}^3.\end{aligned}$$

これより $n \to \infty$ とすれば

$$\|Bf_n\|^2 \leq \sqrt{\mu_0 - R[f_n]} \cdot {\mu_0}^{\frac{3}{2}} \to 0$$

であり，$Bf_n \to 0$ (L^2収束)．これより (16) を得る．

いま，$\|f_n\| = 1$ であるから，Ascoli の選出定理の系により $\{\boldsymbol{G} f_n\}$ は一様収束する部分列 $\{\boldsymbol{G} f_{n_k}\}$ を含む．その時の極限関数を $w_0 \in C[a,b]$ と表す．すると (16) によって

$$f_{n_k} = \frac{1}{\mu_0}\{(\mu_0 f_{n_k} - \boldsymbol{G} f_{n_k}) + \boldsymbol{G} f_{n_k}\}$$

は $\dfrac{w_0}{\mu_0}$ に L^2 収束する．つまり $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{\mu_0} w_0(x)$ とおくとき

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = \varphi_0 \quad (L^2\text{収束})$$

となる，さらに，$\|f_{n_k}\| = 1$ であること，

$$|\,\|f_{n_k}\| - \|\varphi_0\|\,| \le \|f_{n_k} - \varphi_0\|$$

において $k \to \infty$ とすれば

$$0 \le |1 - \|\varphi_0\|\,| \le 0$$

となり，したがって $\|\varphi_0\| = 1$ を得られる．

ここで，部分列に沿って (16) の極限を取る．$f_{n_k} \to \varphi_0$ であることと $\|\boldsymbol{G}\| \le 1$ により

$$\|\boldsymbol{G} f_m - \boldsymbol{G}\varphi_0\| = \|\boldsymbol{G}(f_m - \varphi_0)\| \le \|f_m - \varphi_0\| \to 0.$$

したがって $\boldsymbol{G} f_m \to \boldsymbol{G}\varphi_0$ と表せる．すると (16) から

$$\mu_0\varphi_0 - \boldsymbol{G}\varphi_0 = 0.$$

これは $\boldsymbol{G}\varphi_0 = \mu_0\varphi_0$ を表す．したがって μ_0 は $\boldsymbol{G}$ の固有値，φ_0 はそれに属する固有関数となる．もちろん，

$$R[\varphi_0] = \frac{(\boldsymbol{G}\varphi_0, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2} = \frac{\mu(\varphi_0, \varphi_0)}{1} = \mu_0$$

である．以上，これにより μ が $\boldsymbol{G}$ の固有値であること，すなわち $\boldsymbol{G}$ が少なくとも 1 つの固有値 μ_0 をもつことが示された． ■

続いて，$\boldsymbol{G}$ が 2 つ目の固有値をもつことを示す．μ_0 に属する固有関数 φ_0 を $\|\varphi_0\| = 1$ となるようにとり，作用素 $\boldsymbol{G}_1 : C[a,b] \to C[a,b]$ を

$$\boldsymbol{G}_1 f = \boldsymbol{G} f - \mu_0(f, \varphi_0)\varphi_0$$

によって定義する．つまり $\boldsymbol{G}$ の定義に戻れば，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{G}_1 f)(x) &= (\boldsymbol{G} f)(x) - \mu_0(f, \varphi_0)\varphi_0(x)\\ &= \int_a^b \{G(x,y) - \mu_0\varphi_0(x)\varphi_0(y)\}\, f(y)\, dy\end{aligned}$$

と表せるというである．この式により，$\boldsymbol{G}_1$ は積分核として

$$G_1(x,y) = G(x,y) - \mu_0\varphi_0(x)\varphi_0(y)$$

をもつ積分作用素である．$\boldsymbol{G}$ の対称性は $\boldsymbol{G}_1$ にも遺伝する：

$$(\boldsymbol{G}_1 f, h) = (f, \boldsymbol{G}_1 h).$$

ここで，任意の $f \in C[a,b]$ に対して $v = f - (f,\varphi_0)\varphi_0$ とおく．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}v &= \boldsymbol{G}f - (f,\varphi_0)\boldsymbol{G}\varphi_0 \\ &= \boldsymbol{G}f - (f,\varphi_0)\mu_0\varphi_0 = \boldsymbol{G}_1 f,\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{G}_1 f,\varphi_0) &= (\boldsymbol{G}f - \mu_0(f,\varphi_0)\varphi_0,\varphi_0) \\ &= (\boldsymbol{G}f,\varphi_0) - \mu_0(f,\varphi_0)(\varphi_0,\varphi_0) \\ &= (f,\boldsymbol{G}\varphi_0) - \mu_0(f,\varphi_0) = 0.\end{aligned}$$

これらより

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{G}v,v) &= (\boldsymbol{G}_1 f, f - (f,\varphi_0)\varphi_0) \\ &= (\boldsymbol{G}_1 f, f) - (f,\varphi_0)(\boldsymbol{G}_1 f,\varphi_0) = (\boldsymbol{G}_1 f, f)\end{aligned}$$

したがって $(\boldsymbol{G}v,v) \geq 0$ と合わせて $(\boldsymbol{G}_1 f, f) \geq 0$ $(f \in C[a,b])$ を得る．さらに，

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \|f - (f,\varphi_0)\varphi_0\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2(f,\varphi_0)(f,\varphi_0) + (f,\varphi_0)^2\|\varphi_0\|^2 \\ &= \|f\|^2 - (f,\varphi_0)^2\end{aligned}$$

となることから

$$(\boldsymbol{G}_1 f, f) = (\boldsymbol{G}v,v) \leq \|v\|^2 \leq \|f\|^2.$$

そこで，新たに汎関数 $R_1 : C[a,b] \to C[a,b]$ を

$$R_1[f] = R[\boldsymbol{G}_1; f] := \frac{(\boldsymbol{G}_1 f, f)}{\|f\|^2} \quad (f \in C[a,b] \setminus \{0\})$$

として定義する．また $\mu_1 = \sup\{R_1[f] \mid f \in C[a,b] \setminus \{0\}\}$ とおく．上の不等式などにより $0 \leq \mu_1 \leq 1$ である．これにより

$$0 \leq (\boldsymbol{G}_1 f, f) \leq \mu_1 \|f\|^2$$

ここで (12) を示したときの証明と同様の流れから

$$\|\boldsymbol{G}_1 f\| \leq \mu_1 \|f\|$$

を示すことができる．ここで $\mu_1 = 0$ とすると $\boldsymbol{G}_1 f = 0$ であり，これにより

$$\boldsymbol{G}f = \mu_0(f,\varphi_0)\varphi_0$$

が任意の $f \in C[a,b]$ で成立することになる．しかしこれは不合理である．この等式によると $\boldsymbol{G}$ の値域が 1 つの関数 φ_0 によって張られているとのことだが，元を正せば $\boldsymbol{G}$ の値域とは境界条件 (4) もしくは (5) のもとでの

$$L_0[u] - ku = -f(x)$$

の解 u の定義域 $\mathcal{D}$ を表しているのであり，この境界値問題は少なくとも 2 つの基本解をもつはずである．したがって，一つの関数 φ_0 のみで領域が張られていることを表すこの等式は不合理．よって $\mu_1 > 0$ である．

μ_0 が $\boldsymbol{G}$ の最大の固有値であることを示した証明と同様にして，μ_1 が $\boldsymbol{G}_1$ の最大の固有値であることを証明することができる．ここで，μ_1 に属する $\boldsymbol{G}_1$ の固有関数のうち正規化されたものを φ_1 として表す：

$$\boldsymbol{G}_1\varphi_1 = \mu_1\varphi_1, \quad \|\varphi_1\| = 1.$$

ここで，この第一式の両辺と φ_0 との内積を取ると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) = (\boldsymbol{G}_1\varphi_1, \varphi_0) &= (\boldsymbol{G}\varphi_1 - \mu_0(\varphi_1, \varphi_0)\varphi_0, \varphi_0) \\
&= (\boldsymbol{G}\varphi_1, \varphi_0) - \mu_0(\varphi_1, \varphi_0)\|\varphi_0\|^2 \\
&= (\varphi_1, \boldsymbol{G}\varphi_0) - \mu_0(\varphi_1, \varphi_0) \\
&= \mu_0(\varphi_1, \varphi_0) - \mu_0(\varphi_1, \varphi_0) = 0
\end{aligned}$$

したがって $0 = \mu_1(\varphi_1, \varphi_0)$．$\mu_1 > 0$ であるから $(\varphi_1, \varphi_0) = 0$．ここで先の話に戻ると

$$(\boldsymbol{G}_1\varphi_1, \varphi_0) = (\boldsymbol{G}\varphi_1, \varphi_0)$$

であることから $\boldsymbol{G}_1\varphi_1 = \boldsymbol{G}\varphi_1$ となる．したがって

$$\boldsymbol{G}\varphi_1 = \mu_1\varphi_1.$$

これは μ_1 が $\boldsymbol{G}$ の固有値であることを示す．

ところで μ_0 は $\boldsymbol{G}$ の最大の固有値であったから，$\mu_1 \leq \mu_0$ である．しかし一方で φ_0, φ_1 が（L^2 内積が 0 になることから）線形独立であり，かつ $\boldsymbol{G}$ の固有値は単純；$\dim \sigma(\boldsymbol{G}) = 1$ であったから，$\mu_0 \neq \mu_1$ となる．したがって，μ_0 とは異なる 2 つ目の固有値 μ_1 の存在を示すことができた．

3 番目の固有値に関しても．

$$\boldsymbol{G}_2 f = \boldsymbol{G}f - \mu_0(f, \varphi_0)\varphi_0 - \mu_1(f, \varphi_1)\varphi_1$$

として作用素 $\boldsymbol{G}_2$ を考えると同様の議論から $0 \leq (\boldsymbol{G}_2 f, f) \leq \|f\|^2$ $(f \in C[a,b])$．そこで，

$$\begin{gathered}
R_2[f] = R_2[\boldsymbol{G}_2; f] := \frac{(\boldsymbol{G}_2 f, f)}{\|f\|^2} \quad (f \in C[a,b] \setminus \{0\}) \\
\mu_2 = \sup\{R_2[f] \mid f \in C[a,b] \setminus \{0\}\}
\end{gathered}$$

として μ_2 を定義しなおすと，任意の f に対して $\|\boldsymbol{G}_2 f\| \leq \mu_2\|f\|$．これらの議論から $\mu_2 > 0$ が $\boldsymbol{G}_2$ の固有値である（固有関数 φ_2）ことが示され，この μ_2 もまた $\boldsymbol{G}$ の固有値になること，さらに $\boldsymbol{G}_1$ の固有値であり

$$\mu_2 < \mu_1$$

となることも同様に示される．

4 番目，5 番目…の固有値・固有関数に関しても同様である．一般に，$\boldsymbol{G}$ の固有値として $\mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_{k-1}$，及びそれらに属する固有関数（正規化済み）$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$ を得た後は，k 番目の固有値に関して

$$\boldsymbol{G}_k f = \boldsymbol{G}f - \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i(f, \varphi_i)\varphi_i$$

として作用素 $\boldsymbol{G}_k$ を定義し，

$$R_k[f] = R_k[\boldsymbol{G}_k; f] := \frac{(\boldsymbol{G}_k f, f)}{\|f\|^2} \quad (f \in C[a,b] \setminus \{0\})$$

とした汎関数 $R_k : C[a,b] \to C[a,b]$，さらに

$$\mu_k = \sup\{R_k[f] \mid f \in C[a,b] \setminus \{0\}\}$$

として定義をすると $\boldsymbol{G}_k$ の最大の固有値として μ_k が得られ，これが $\boldsymbol{G}$ においては μ_0 から数えて $k+1$ 番目の固有値になることまで示すことができる．もちろん，次が成り立つ：

$$\|\boldsymbol{G}_k f\| \leq \mu_k \|f\|. \tag{17}$$

こうして，$\boldsymbol{G}$ の固有値の無限列 $\mu_0 > \mu_1 > \cdots$ および固有関数の正規直交系 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ を得ることができる．固有値の列 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ はすべて $\sigma(\boldsymbol{G})$ の元で，補題 7 により 0 以外には集積しない．すなわち，

$$\mu_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

である．

さらに $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ 以外の固有値は存在しないことを示す．

(Pt) $\mu \in \sigma(\boldsymbol{G})$ で $\mu \neq \mu_n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ を考えると，μ に属する正規化された固有関数 φ をとると，補題 4 によりこれはすべての φ_n と直交する，したがって

$$\boldsymbol{G}\varphi = \boldsymbol{G}_n \varphi \ (n = 1, 2, \cdots)$$

と書き表せる．すると (17) から

$$\|\boldsymbol{G}\varphi\| = \|\boldsymbol{G}_k f \varphi\| \leq \mu_n \|\varphi\| = \mu_n.$$

すると $\mu_n \to 0$ より $\boldsymbol{G}\varphi = 0$ である．ところで

$$\boldsymbol{G}\varphi = \mu\varphi, \quad \|\varphi\| = 1$$

であることから $\mu = 0$ である．しかし固有値が 0 になることはあり得ないので矛盾である．よって $\sigma(\boldsymbol{G})$ の固有値は μ_n $(n = 0, 1, \cdots)$ に限られ，$\sigma(\boldsymbol{G}) = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. ■

$\boldsymbol{G}$ の固有値は単純であり，$\sigma(\boldsymbol{G})$ が $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ で尽くされていることにより，固有関数 φ_n のすべてと直交するような固有関数は存在しない，すなわち正規化した固有関数の列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 以外の正規化された $\boldsymbol{G}$ の固有関数は存在しないことも合わせてわかる．

さらに，これよりも強い次の命題が成り立つ．

命題

正規化された固有関数の列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ は次の意味で完全である．すなわち，これらのすべてと直交する連続関数は恒等的に 0 のものに限る．

(証明) $f \in C[a,b]$ かつ $(f, \varphi_n) = 0$ $(n = 0, 1, \cdots)$ と仮定する．このとき

$$\boldsymbol{G}f = \boldsymbol{G}_n f \ (n = 1, 2, \cdots)$$

であることから，(17) より $\|\boldsymbol{G}f\| \leq \mu_n \|f\|$．$n \to \infty$ として $\boldsymbol{G}f = 0$ である．ところで，本来考えていた問題は境界条件 (4) または (5) のもとでの

$$-L_0[u] + ku = f$$

という微分方程式で，この解は $u = \boldsymbol{G}f$ と表せたのであったから，$\boldsymbol{G}f = 0$ であるとは $-L_0[u] + ku = f$ が $u \equiv 0$ に対して成り立つことを表している．このことから代入により $f \equiv 0$．$(f, \varphi_n) = 0$ を満たす $f \in C[a,b]$ はこれのみである． ■

以上のことから次の定理が成立する．

定理 2

$\sigma(\boldsymbol{G})$ は区間 $(0,1]$ に含まれる可算個の単純固有値

$$\mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_n > \cdots \to 0$$

からなりこれらに属する正規化された固有関数の列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ は完全な正規直交系をなす．

これは $\boldsymbol{G}$ に関する記述であるが，もとの微分方程式の固有値問題について言い直すとこのようになる．

定理 3

固有値問題 (EVP) に関し，$+\infty$ に発散する単純固有値

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \cdots \to +\infty$$

が存在し，それらに属する正規化された固有関数の列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ は完全な正規直交系をなす．

$\boldsymbol{G}$ の固有値 μ と L_0 の固有値 λ には (9) で示す関係があったので，$0 < \mu_0 \leq 1$ が 0 に収束するならば λ は $+\infty$ に発散する．したがってこのような定理が導かれる．

2.3 固有値問題の具体例

2.3.1 $(\mathrm{EVP})_d$ の例

ここでは具体的な固有値問題について考える．この章においては $L_0[u] = u''$，$[a,b] = [0,\pi]$ として

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & (0 \leq x \leq \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

の解 $u = u(x)$ のうち恒等的に 0 でないものを考える．方程式 (1) を x について変数分離した際に現れる方程式に（定義域を除けば）等しい．

しかし，ここで $\lambda = 0$ とすると基本解が $1, x$ で

$$u(x) = C_1 + C_2 x \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

と書ける．境界条件を考えることにより

$$C_1 = 0,\ C_2\pi = 0$$

したがって $C_1 = C_2 = 0$ で，これは $u(x) = 0$ を表す．これは恒等的に 0 でないものを考えるという今回の趣旨に反する．これにより $\lambda = 0$ は固有値ではないことがわかる．

以下は $\lambda \neq 0$ とする．基本解は $\cos\sqrt{\lambda}x$ 及び $\sin\sqrt{\lambda}x$ であり，

$$u(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

と表せる．まず境界条件 $u(0)=0$ から $C_1=0$ であり，$u(\pi)=0$ により

$$C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

$C_2=0$ は $u\equiv 0$ となり今回の趣旨に反するから $C_2\neq 0$．このとき $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$ だから

$$\lambda = n^2.$$

ただし $\lambda\neq 0$ であり，かつ 2 乗を考えることから $n\in\mathbb{N}$ としてよい．したがって固有値は $\lambda_n=n^2$ $(n\in\mathbb{N})$，すると解 $u=u(x)$ は

$$u_n(x) = C_2 \sin nx$$

であるが，これを正規化する．すなわち $\|u_n\|=1$ を考える．単純のため $C_2>0$ とすると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (C_2\sin x)^2\,dx &= 1\\
{C_2}^2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx &= 1\\
{C_2}^2 \left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi} &= 1\\
\frac{\pi}{2}{C_2}^2 &= 1 \qquad \therefore\quad C_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned}$$

したがって正規化された固有関数 $\varphi_n=\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ は

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx.$$

2.3.2 $(\mathbf{EVP})_\sigma$ の例

$(\mathrm{EVP})_\sigma$ でも考えられる．$\sigma=0$ として

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \quad (0\leq x\leq \pi),\\ u'(0)=u'(\pi)=0. \end{cases}$$

微分方程式の基本解は同じである，まず $\lambda=0$ のとき，一般解 $u=u(x)$ は

$$u(x) = C_1 + C_2 x \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数}).$$

境界条件 $u'(0)=u'(\pi)=0$ から $C_2=0$ を得るので

$$u(x) = C \quad (C \text{ は } C\neq 0 \text{ の任意定数})$$

である．

次に $\lambda\neq 0$ を考える．基本解は先の微分方程式と同じで

$$u(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数}).$$

このとき $u'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$．まず $u'(0)=0$ であるから $C_2=0$．続いて $u'(\pi)=0$ とすると，同様に $C_1\neq 0$，さらに $\lambda\neq 0$ だから

$$\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \qquad \therefore\quad \lambda = n^2\ (n\in\mathbb{N}).$$

このとき固有値は $\lambda_n = n^2\ (n \in \mathbb{N})$ であり，このときの解 $u = u(x)$ は

$$u(x) = C_1 \cos nx (n \in \mathbb{N}).$$

以上の議論から固有値は $\lambda_n = n^2\ (n = 0, 1, \cdots)$ であり固有関数は

$$u(x) = \begin{cases} C & (n = 0) \\ C_1 \cos nx & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

再びこれを正規化する．$\|u\| = 1$，および $C, C_1 > 0$ を仮定し，まず $n = 0$ のとき，

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi C^2\ dx = 1 \\ &C^2 \pi = 1 \qquad \therefore \quad C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ のとき，

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (C_1 \cos nx)^2\ dx &= 1 \\ \frac{{C_1}^2}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi &= 1 \\ \frac{{C_1}^2}{2} \pi &= 1 \qquad \therefore \quad C_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

ゆえに正規化された固有関数 $\psi_n = \psi_n(x)\ (n \in \mathbb{N})$ は

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & (n = 0) \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cos nx & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

なる式で与えられる．

2.4 固有関数と Fourier 型級数

この章の終末として，定理 3 であげた固有関数の列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ による，任意関数の Fourier 型展開について記述する．まず定理の通り $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ は正規直交系である．可積分な関数 u の正規直交系 $\{\varphi_n\}$ による Fourier 級数とは，

$$\alpha_n = (u, \varphi_n) \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

を用いた形式的な級数

$$\sum_{n=0}^\infty \alpha_n \varphi_n \tag{18}$$

のことをいう．いま u が区分的に連続かつ $|u|^2$ が可積分な u が，$\{\varphi_n\}$ によって Fourier 級数型展開が可能であるとは，(18) の級数が u に L^2 収束することをいう．特に $u \in C[a, b]$ は

$$u = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \varphi_n = \sum_{n=0}^\infty (u, \varphi_n) \varphi_n$$

なる式で展開される．これを示す．

まず $u \in \mathcal{D}$ の場合には $-L_0[u] + ku = -f$ なる式で定まる $f \in C[a,b]$ によって

$$u = \boldsymbol{G}f = \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy$$

と表せる．ここで

$$\boldsymbol{G}_k f = \boldsymbol{G}f - \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i (f, \varphi_i)\varphi_i$$

を利用することにより次を得る：

$$u = \boldsymbol{G}f = \boldsymbol{G}_k f + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i (f, \varphi_i)\varphi_i.$$

ところで μ_i は $\boldsymbol{G}$ の固有値，φ_i はそれに属する固有関数であったから

$$\begin{aligned}\mu_i(f, \varphi_i) &= (f, \mu_i\varphi_i) = (f, \boldsymbol{G}\varphi_i)\\ &= (\boldsymbol{G}f, \varphi_i) = (u, \varphi_i) = \alpha_i.\end{aligned}$$

すなわち

$$u = \boldsymbol{G}_k f + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i\varphi_i.$$

特に部分和 $S_k[u] = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i\varphi_i$ をおくと $u = \boldsymbol{G}_k f + S_k[u]$ であり，(17) を用いることで

$$\|G_k f\| = \|u - S_k[u]\| \leq \mu_k \|f\| \to 0 \quad (\because \mu_k \to 0)$$

これにより $S_k[u]$ は u に L^2 収束することが示された． ■

3　まとめと展望

今回の考察により，1 次元の 2 階線形常微分方程式に固有値・固有関数が存在することを確認することができた．その際，積分作用素 $\boldsymbol{G}$ の導入や，これによって新たな固有値問題へと帰着させ，こちらの固有値問題で固有値が存在することを証明するなど，今まで学習したことのない証明方法を学ぶことができたのは良い経験となった．

しかし，時間がなかったためそれを多次元へと拡張できなかったのは残念である．多次元の固有値問題に対して固有値が存在することを示すことができれば，より複雑な物理現象についても説明がしやすくなったであろう．また，1 次元のみとはいえ先に 2003 年度のレポート [3] にあった常備分方程式の数値計算をこちらでも実行してみるなど，シミュレーションを行う時間も取ることができなかったのも悔やまれる．具体的な固有値問題は一部を 3 節で取り上げたが，これをコンピュータでシミュレーションを行い，その結果から固有値の数値計算・固有関数の可視化などができるはずであり，それも時間の都合上行うことは叶わなかった．

参考文献

[1] Stanley J. Farlow 著，伊理正夫・伊理由美 訳「偏微分方程式」朝倉書店 (1983)

[2] 藤田宏「現代解析入門」岩波書店（1991）

[3] 横山和正「常備分作用素の固有値問題の数値計算」(2003 年度桂田研究室卒業研究レポート）