2016年度桂田研究室卒業レポート
カルダーノの公式について

明治大学総合数理学部現象数理学科
峯尾　友輔

2017年2月15日

目次

1　序論

私は卒業後の進路として、教員になる。そのため、卒業後の進路で、役に立つ、授業の中で小話として生徒に少し話すことができるような研究を行いたいと考えていた。どのようなことが卒業研究になりうるのか、何をしたらよいのかわからなかったため、なかなか研究内容が決まらなかった。夏が開けるころ、桂田准教授のもとへ相談をし、方程式や式変形、関数に関する数学が好きということからこの研究内容に決まった。

中学校・高等学校において、2 次方程式の解の公式はどの学生も習ったはずである。3 次方程式においても、解の公式というものが存在する。その 3 次方程式の解の公式がカルダーノの公式と呼ばれている。しかし、ゆとり教育では教えられてこなかった。これは 3 次方程式の解の公式が複雑であったためであると私は考える。公式はとても複雑であるが、この式により、今まで議論されていなかった虚数の存在と必要性が吟味せざるを得なかったのである。

カルダーノの公式とは一般的な 3 次方程式の代数的解法のことである。3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$(p, q は実数) の実数解が

$$x = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

となることをカルダーノの公式と呼ばれている。

このカルダーノとは、名をジェロラモ・カルダーノと言う。ジェロラモ・カルダーノ（Gerolamo Cardano、1501 年 9 月 24 日 - 1576 年 9 月 21 日）は、16 世紀のイタリアの人物である。ミラノで生まれ、ローマで没した。一般に数学者として知られている。本業は医者、占星術師、賭博師、哲学者でもあった。このカルダーノが公表した公式であるため、カルダーノの公式と呼ばれる。

カルダーノの公式は $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ のとき、確かに 3 次方程式の実数解を与えるが、$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ のとき、計算はどのようになるのか考えなくてはいけなくなる。これを「不還元の場合」という。

ルートの中身が負となった場合、複素数の 3 乗根について考えなくてはならなくなる。虚数の歴史として、虚数は長い間想像上の数であり、「生まれそこない」にすぎなかったと「数学入門」(遠山 [8]) に記されている。18 世紀末になって、ガウス等によって、はじめてその実在が証明されることとなった。

虚数についての議論の過程において、3 次方程式の実数解の公式は、実数解を求める過

程において、虚数が出てきてしまい、計算することができないと議論されることもあった。そこで、虚数という数の実在について考えられたのである。私は以下本論において、虚数の起源であるカルダーノの公式についてどのような条件のときにいくつ実数解をもつのか、複素数の c が出た時、n 乗根はいくつ存在し、その結果カルダーノの公式ではどのようなことが言えるのかに着目して述べていく。

2　本論

2.1　カルダーノの公式とは。

一般に一変数の 3 次方程式は $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ の形で表現される。この式を a_1 で割り、$A_n = \frac{a_n}{a_3}$ と置くと、

$$x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0$$

となる。ここで、$x = X - \frac{A_2}{3}$ として変数変換を行うと、

$$X^3 + \left(A_1 - \frac{A_2^2}{3}\right)X + \left(A_0 - \frac{1}{3}A_1A_2 + \frac{2}{27}A_2^3\right) = 0$$

となる。この式は 2 次の項がなくなった式となっているので、係数をそれぞれ、p, q と置き換えて、

$$x^3 + px + q = 0$$

として考える。

現代においては、3 次方程式の解法といえば、主に代数的解法の事を意味する。代数的解法とは、三角関数や対数を使わずに、四則演算や冪根などを用いて、有限回数の操作により、解を求めることである。

序論で述べたカルダーノの公式は 1 つの解しか与えなかったが、一般に 3 次方程式は複素数の範囲で考えるとつねに 3 つの解をもつ。1 の 3 乗根 $\omega = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ を用いると、残りの 2 つの解も表示することができる。

$$\begin{aligned}
x = &-\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\
&-\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\
&-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \omega\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}
\end{aligned}$$

これもカルダーノの公式と呼ばれている。

2.2 Cardano の公式の導出

Cardano の公式

p, q が実数で、$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
x = &-\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\
&-\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\
&-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \omega\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}
\end{aligned}
$$

は、$x^3 + px + q = 0$ の解である。

$x^3 + px + q = 0$ を解く。

$$p = -3yz \tag{1}$$

$$q = y^3 + z^3 \tag{2}$$

を満たす y, z が存在すると仮定する。(1)(2) を代入すると, 上式は

$$x^3 + px + q = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

となる。右辺を因数分解すると、

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
&= (x + y + z)(x^2 - (y + z)x + y^2 + z^2 - yz) = 0.
\end{aligned}
$$

(最後の式より、$= (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z)$ と因数分解することも可能である。)

これより、$x + y + z = 0$, $x^2 - (y + z)x + y^2 + z^2 - yz = 0$ となる。よって、x を求めると、

$$x = -y - z,$$

$$x = \frac{y + z \pm \sqrt{3(y - z)^2} i}{2}$$

となる。

$$x = \frac{y + z \pm (y-z)\sqrt{3}i}{2}.$$

整理すると、

$$x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right) y + \left(\frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2}\right) z$$

であるので、ω を用いると

$$x = -y - z, -\omega y - \omega^2 z, -\omega^2 y - \omega z \tag{3}$$

となる。

ここで、y と z の値を求める。(1) より、

$$y = \frac{p}{-3z}$$

なので、これを、 (2) に代入すると、

$$q = -\frac{p^3}{27z^3} + z^3$$

となる。

これを整理すると、

$$z^6 - qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

となる。2 次方程式を解いて

$$z^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ ならば、3 乗根を取って

$$z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

(1) にこの z の値を代入して計算すると、

$$y = -\frac{p}{3z} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

となる。

$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ ならば、この y, z はたしかに、(1)(2) を満たす。

y、z を (3) に代入すると、

$$x=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

となる。

これが Cardano の公式である。

2.3　解の判別

ここから、Cardano の公式がどのような条件のもとであれば、いくつ解を持つのか、について考えていく。Cardano の公式により、3 次方程式の解の求め方はわかったが、この公式の中には、3 乗根が含まれていて、その 3 乗根の中にルートが入っているという式になっている。この解が正しいものかどうか、解を何個もつか、を判別するために、複素数平面の考えを利用しなければならない。まずは、q を移項し、変数分離を行うことで、3 次関数を利用し、解の個数の判別を行っていく。

実数解の個数

(i) $p>0$ のとき、実数解の個数は 1 つで

$$x=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

(ii) $p=0, q\neq 0$ のとき、実数解を 1 つもつが、重解でない。このとき、

$$x=-\sqrt[3]{q}.$$

(iii) $p=0, q=0$ のとき、実数解を 1 つもつ。3 重解である。このとき、

$$x=0.$$

(iv) $p<0$ かつ、

$$\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}>-q \quad \text{または} \quad -\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}<-q$$

のとき、実数解を 1 つもつが、重解ではない。このとき、

$$x=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

(v) $p<0$ かつ、$-q=\pm\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ のとき、異なる実数解を 2 つもつ。

$$x=\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}, \mp 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}=2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

となり、

$$x=\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

が重解となる。(複号同順)

(vi) $p<0$ かつ、$|-q|<-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ のとき、

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$$

となり、異なる実数解を 3 つもつ。

複素数の範囲で考えると、$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$ のとき、異なる 3 つの解 (1 つが実数で、残りの 2 つが虚数)、$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ のとき、重解 ($p=q=0$ のとき 3 重解、そうでないとき 1 つの重解と重解でない解、いずれの解も実数)、$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ のとき、異なる 3 つの実数解をもつ。

3 次関数 $x^3+px+q=0$ の実数解の判別を行う。q を移項することで、2 式について考えることで、実数解の個数の判別を行っていく。

$$\begin{cases} y=f(x)=x^3+px & (4) \\ y=-q & (5) \end{cases}$$

とする。

以下、場合分けを行う。

$p>0$ とする。

$$f'(x)=3x^2+p>0$$

なので、実数解の個数は 1 つ。このとき、

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$$

となるので、実数解は、

$$x=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

となる。

次に、$p=0$ のときについて考える。

$$f'(x)=3x^2 \qquad\qquad f'(0)=0$$

$p=0, q\neq 0$ のとき、実数解を 1 つもつ。重解でない。

このとき、

$$\begin{aligned} x&=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\frac{q}{2}} \\ &=-\sqrt[3]{q} \end{aligned}$$

が実数解になる。

$p=0, q=0$ のとき、実数解を 1 つもつ。このとき、3 重解である。

このとき、実数解は

$$x = 0$$

で 3 重解となる。

次に、$p < 0$ のときについて考える。

$$f'(x) = 3x^2 + p$$

$f'(x) = 0$ とすると、$x = \pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$ となる。ここで、

$$f(\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}) = \pm\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

なので、グラフを考えると、

$$\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} > -q, -\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} < -q$$

において、実数解を 1 つもつ。このとき、実数解は

$$x = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

となる。

$$-q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

のとき、この式を式変形すると、

$$-\frac{q}{2} = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

となる。このとき、実数解を 2 つもつ。

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = 0$$

なので、実数解は

$$x = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

$$x=\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

の 2 解となり、

$$x=\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

で、重解となる。

$$-q=-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

のとき、この式を式変形すると、

$$-\frac{q}{2}=-\frac{p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

となる。このとき、実数解を 2 つもつ。

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=0$$

なので、実数解は

$$x=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}=2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

$$x=-\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

の 2 解となり、

$$x=-\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

で、重解となる。

$|-q|<-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ のとき、

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$$

となり、実数解を 3 つもつ。

2.4　複素数 c の n 乗根を求める。

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$$

のとき、異なる 3 つの実数解をもつことがわかったが、$p=-3yz, q=y^3+z^3$ をみたす y, z が実数の範囲では求まらない。複素数の範囲に広げることで y, z を求めるには、虚数の 3 乗根が必要である。

以下、複素数 c の n 乗根について求める。

複素数 c の n 乗根

複素数 c の n 乗根 z は、$c=se^{it}$ $(s\geq 0,\ t$ は実数$)$ とするとき、以下で表される。

$$z=\sqrt[n]{s}e^{i\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k=0,1,2,3,4,\cdots\cdots,n-1).$$

右辺 $=f(k)$ とすると、

$$f(k+n)=f(k)$$

となる。よって、z は n 周期である。これより、複素数 $c\neq 0$ の n 乗根 z は n 個存在する。

$c\neq 0$ とする。$z=re^{i\theta}$ $(r\geq 0,\ \theta$ は実数$)$ とする。$z^n=c$ に z と c を代入すると、

$$r^n e^{in\theta}=se^{it}$$

となる。両辺絶対値をとると、

$$|e^{in\theta}|=|e^{it}|=1$$

なので、

$$r^n=s.$$

これより、

$$e^{in\theta}=e^{it}$$

となるので、

$$n\theta=t+2k\pi(k \text{ は整数}).$$

ゆえに

$$\theta = \frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

となる。また、

$$r = \sqrt[n]{s}$$

より、

$$z = \sqrt[n]{s} e^{i\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k \text{ は整数})$$

である。右辺 $= f(k)$ とする。

$$f(k+n) = f(k)$$

が成立するので、z は n 周期である。ゆえに $k = 0, 1, \cdots\cdots, n-1$ を取ればすべての解を表すことが出来る。

よって、複素数 c の n 乗根 z は n 個存在する。また、同様に、複素数 c の 3 乗根 z は 3 個存在する。

2.5　不還元の場合のカルダーノの公式

c が虚数のとき、$z^3 = c$ をみたす複素数 z は 3 つある。そのうちの任意の 1 つを $\sqrt[3]{c}$ と表すことにすると、

$$z^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

は

$$z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

と解くことができる。このとき、$-3yz = p$ をみたす y は

$$y = -\frac{p}{3z} = -\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

と求まる。こうして求めた y, z を $x = -(y+z), -(\omega^2 y + \omega z), -(\omega y + \omega^2 z)$ に代入すると解が得られる。

$$y^3 = -\frac{p^3}{27z^3} = -\frac{p^3}{27\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)} = \frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

ゆえに y のことを

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

と表すこともできるが、3 乗根のうち $-3yz = p$ をみたすものを選ぶことに注意しなくてはならない。

2.6 $x^3-6x+4=0$ について考える。

具体例として $x^3-6x+4=0$ について考える。

$x^3-6x+4=0$ について

$x^3-6x+4=0$ は $p=-6, q=4$ の 3 次方程式である。
このとき、

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3=2^2+(-2)^3=-4<0$$

となるので、相異なる実数解を 3 つもつ。カルダーノの公式にて、虚数の計算を行い、

$$x=2,-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}$$

となる。

まず、実数解をいくつもつか調べる。

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3=2^2+(-2)^3=-4<0$$

となるので、相異なる実数解を 3 つもつ。

カルダーノの公式より、実数解を求める。

$$\begin{aligned}
x&=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\
&=-\sqrt[3]{\frac{4}{2}\mp\sqrt{-4}}-\sqrt[3]{\frac{4}{2}\pm\sqrt{-4}}\\
&=-\sqrt[3]{2+2i}-\sqrt[3]{2-2i}\\
&=-(-1+i)-(-1-i)\\
&=2.
\end{aligned}$$

($(-1+i)^3=2+2i$, $(-1-i)^3=2-2i$, $-3(-1+i)(-1-i)=-6=p$ を用いた。)

同様に、

$$
\begin{aligned}
x &= -\omega(-1+i) - \omega^2(-1-i) \\
&= -\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(-1+i) - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}(-1-i) \\
&= -1-\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= -\omega^2(-1+i) - \omega(-1-i) \\
&= -\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}(-1+i) - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(-1-i) \\
&= -1+\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

よって、3 つの実数解をもつ。

3　結論

カルダーノの公式において、重要な概念が虚数の 3 乗根についてである。虚数の n 乗根について、2.4 節で示したが、複素数 $c \neq 0$ の n 乗根 z は n 個存在する。3 次方程式 $x^3+px+q=0$ が 3 つの異なる実数解をもつとき、

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

という条件が必要となる。この場合のことを「不還元の場合」と呼ぶ。不還元の場合は、カルダーノの公式において負数の平方根が必要となる。そのため、虚数という概念が生まれた。

カルダーノの公式

$$\begin{aligned} x = &-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\ &-\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\ &-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

は、不還元の場合にも解を表す。これより、3 次方程式の p, q が複素数であっても、上記の 3 つの解が求まることも示される。これより、z の値は 3 つ存在するが、そのどれをとっても、y の値は定まるので解 x を導くことができる。

$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ のとき、

$$z^3=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

となる z は複素数の範囲に 3 つ存在する。どれか 1 つを z_1 で表すと、解は

$$z=z_1, z_1\omega, z_1\omega^2.$$

y と z の関係式 $-3yz=p$ より、y を求めることができるので、このどれをとっても、x の値を求めることができる。

3 次関数のカルダーノの公式を見たら、それでは、4 次、5 次、6 次となったらどのようになるのだろうと思う方がいるかもしれない。結論からいうと、4 次方程式の解の公式

は存在する。カルダーノの弟子のフェラーリは「フェラーリの公式」を発見した。この公式は、ここに書くと、とても長くわかりにくいものとなってしまうので省略する。では、5 次以上となるとどのようになるのか。5 次以上の方程式の公式は存在しないことが証明されている。存在しないことは現在では「ガロア理論」と呼ばれる理論を用いて証明される。「ガロア理論」という言葉くらいは聞いたことある、という読者もいるだろう。興味のある人は私が参考文献とした本 [6], [7] を読むのもよいだろう。

参考文献

[1] ウィキペディア・カルダーノ https://ja.wikipedia.org/wiki/ジェロラモ・カルダーノ

[2] ウィキペディア・三次方程式, https://ja.wikipedia.org/wiki/三次方程式

[3] 桂田祐史, 複素関数講義ノート, 2016 年, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2016/complex2016.pdf

[4] 代数的な解の公式 http://www.sist.ac.jp/~kanakubo/research/hosoku/daisuu_kai.html

[5] 高校数学を 100 倍楽しく http://enjoymath.pomb.org/?p=12

[6] 木村俊一, 数学のかんどころ 14　ガロア理論, 共立出版

[7] 木村俊一, 天才数学者はこう解いた、こう生きた　方程式四千年の歴史, 講談社

[8] 遠山　啓, 数学入門　上, 岩波新書

[9] 遠山　啓, 数学入門　下, 岩波新書