

2016 年度桂田研究室卒業研究レポート

虹の現象数理

～可視化に向けて～

明治大学 総合数理学部 現象数理学科

岡田 岳士

指導教員 桂田 祐史 准教授

2017 年 2 月 14 日

概要

雨上がりの空や、水しぶきをあげる滝の近く、水を撒いているとき太陽を背にした方向に虹が見えることがある。誰もが一度は見たことがある現象であるが、その周辺では何が起きているのだろうか。どこに現れるのか、なぜ色がつくのか、考えてみると様々な疑問が浮かんでくる。虹の研究の歴史は長く、紀元前4世紀アリストテレスに始まり、デカルト、ニュートンなど多くの研究者に論じられてきた。本研究では虹をコンピューター上で再現し、虹の原理を解明することを目的とする。

目次

- 第1章 はじめに
- 第2章 水滴に当たった太陽光の散乱
- 第3章 波長と色
- 第4章 まとめ

第1章 はじめに

1.1 虹とは

虹とは赤から紫までの光のスペクトルが円弧状に並んだ光のことである。気象現象の中でも大気光学現象に含まれる。太陽の光が空気中の水滴によって反射、屈折されるとき、水滴がプリズムの役割をするため光が波長ごとに分解され複数色の帯に見える。

日本では虹の色は赤、橙、黄、緑、青、藍、紫の7色と考えられている。アメリカでは前記のものから藍を除いた6色とされており、古代中国では5色、沖縄では明暗の2色など、国や宗教によって様々に捉えられる。しかし、物理学の視点では色は無限にあると考えるのが正しい。太陽光のスペクトルは連続しており、連続したものを数えることはできないからである。また、大気などの状態によるが虹の色が7色揃っていることは稀であり、黄と緑は幅広く、赤と紫は細いなど色調は様々である。色があまり現れず全体が白っぽい帯のように見えることもある。

普通に見かける明るい虹を主虹(しゅにじ、しゅこう)と呼び、その外側に見える主虹よりも暗い虹を副虹(ふくにじ、ふくこう)と呼ぶ。主虹は弧の内側が紫、外側が赤であるが、副虹は内側が赤、外側が紫となり逆の配列である。

他にも、アレキサンダーの暗帯、過剰虹、反射虹など虹に関して様々な現象が存在するが、本レポートでは主虹について述べる。

1.2 光の性質

虹が太陽光と雨の水滴によって作られることは説明した。今後議論を進めていくために、まずは光の性質について学ぶ。

1.2.1 光とは

電磁波のうち人の目が認識できる波長のものを光と呼ぶ。自然科学の分野では可視光線と呼ばれることもある。その波長は個人によって差はあるがおよそ380nm~780nmの間である。人の目は波長の違いを色の違いとして認識する。真空中での光の速度は299792458m/sである。

1.2.2 光の直進

真空中や空気中などの均一な物質内では光は直進する。これはカーテンの隙間か

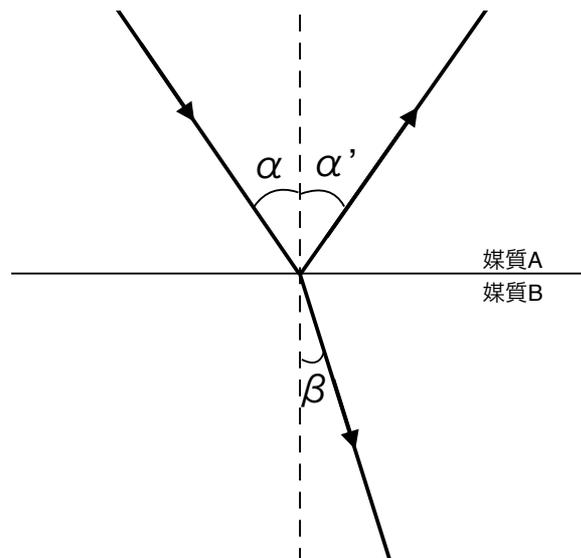
ら室内に漏れる光や、雲間から射す光がまっすぐなことからもわかる。また、太陽と地球の間には十分な距離があるため、地球に届く太陽光は平行光である。

1.2.3 光の反射と屈折

鏡に当たった光は向きを変えて進む。これを光の反射という。また、ガラスや水など透明な物質に当たった光は、一部は表面で反射するが一部は物質内部に入り透過してゆく。

ガラスや水の表面に光が入射したとき、内部を透過する光はその境界で折れ曲がって進む。これを光の屈折という。

真空中の光速を物質中の光速で割った値を屈折率という。真空を1とした物質固有の値を絶対屈折率、2つの物質の絶対屈折率の比を相対屈折率という。今後、相対屈折率を屈折率という。



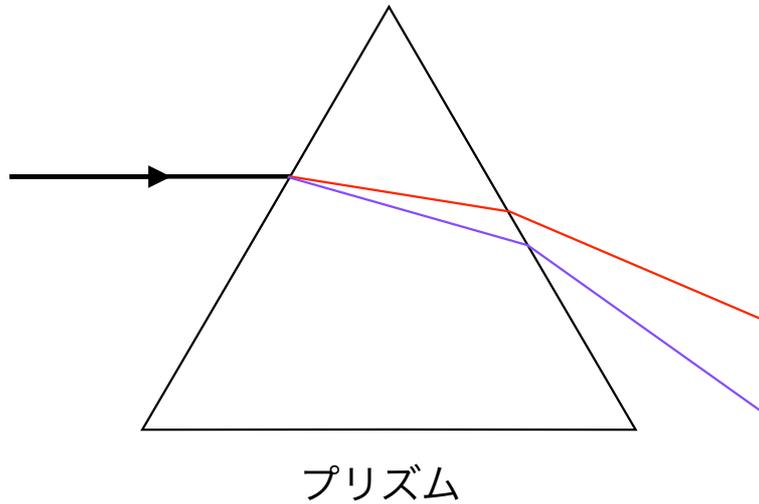
図は媒質 A を進んできた光が媒質 B との境界で一部が反射し、一部が屈折して媒質 B を透過する様子を表したものである。 α 、 α' 、 β をそれぞれ入射角、反射角、屈折角という。媒質 A から媒質 B に光が進むときの屈折率を n とすると以下が成り立つ。

$$\alpha = \alpha' \quad (\text{反射の法則})$$

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (\text{屈折の法則})$$

1.2.4 光の分散

太陽光など複数の波長を含む光がプリズムや水滴などに当たると様々な色に分散される。



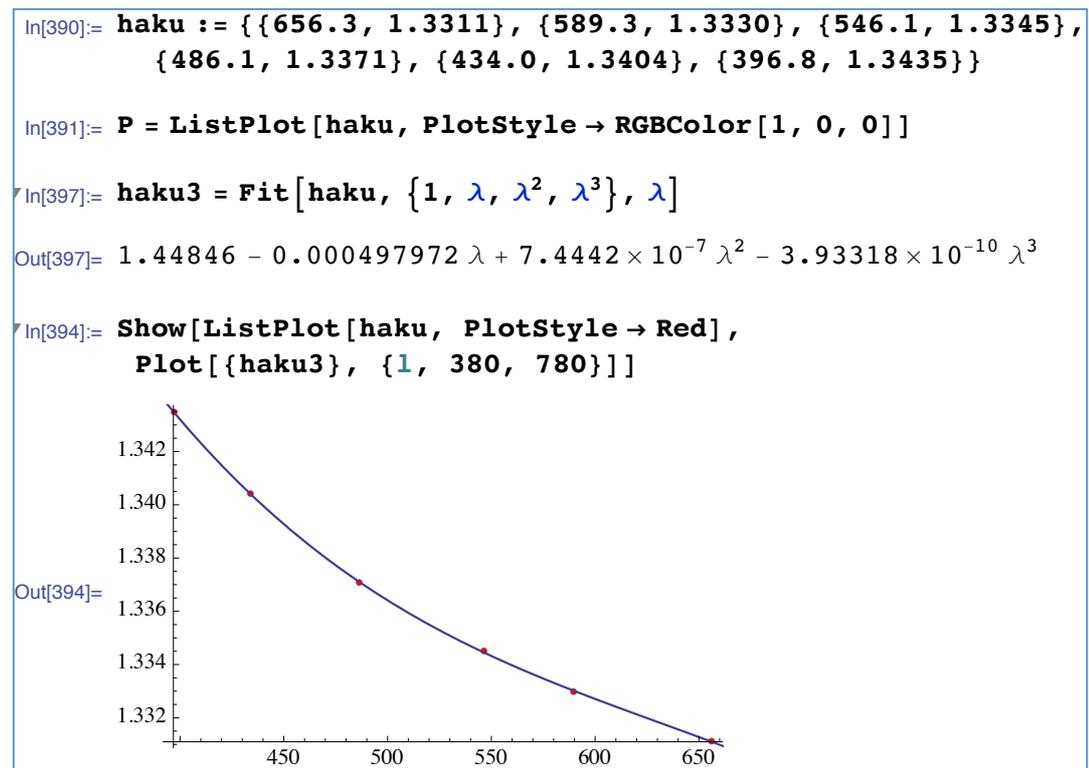
左から進んできた光はプリズムの表面で屈折して内部に入りもう一度屈折してプリズム外に出て行く。このとき波長ごとの屈折率の違いによって異なる屈折角をとるため分散される。

1.2.5 波長と屈折率

波長と水の屈折率には以下のような関係がある。ただし空気の絶対屈折率は1とする。(虹の科学 P.25)

波長 λ (nm)	396.8	424	486.1	546.1	589.3	656.3
屈折率 n	1.3435	1.3404	1.3371	1.3345	1.333	1.3311

また、このデータから波長と屈折率の関係式を3次曲線の近似によって求める。



波長 λ に対する屈折率 n について

$$n(\lambda) = 1.44846 - 0.000497972\lambda + 7.4442 \times 10^{-7}\lambda^2 - 3.93318 \times 10^{-10}\lambda^3$$

が得られる。

このとき n 、 r 、 α 、 β について

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= r \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1} r \\ \sin \beta &= \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{r}{n} \Leftrightarrow \beta = \sin^{-1} \frac{r}{n}\end{aligned}$$

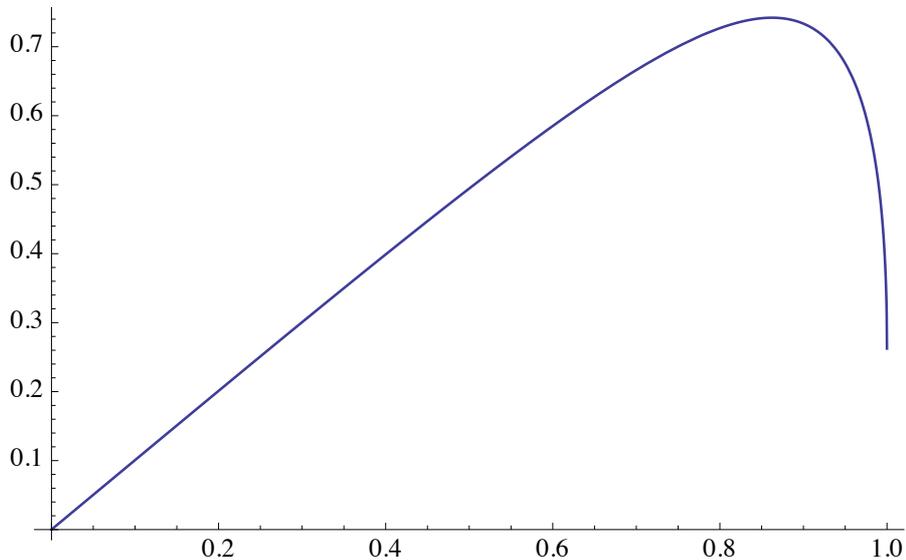
が成り立つ。

四角形 $ABCB'$ について着目すると、散乱角 θ は

$$\begin{aligned}\theta &= 4\beta - 2\alpha \\ &= 4 \sin^{-1} \frac{r}{n} - 2 \sin^{-1} r \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

① 式は入射位置 r と屈折率 n に対する散乱光の角度 θ を表す。

$n=1.33$ 、縦軸を θ 、横軸を r として $0 \leq r \leq 1$ の範囲でグラフを描画すると以下のようなになる。



グラフの接線の傾きが 0 に近づくほど r の変化に対して θ の変化が小さくなるため散乱角 θ の光は強くなる。ここで①式の極値を求める。

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{4}{\sqrt{n^2 - r^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - r^2}} = 0$$

であるから、①式が極値をとるときの r の値は

$$r = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

また、このとき

$$\theta = 4 \sin^{-1} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。光が最も強く散乱される角度のことを虹角という。

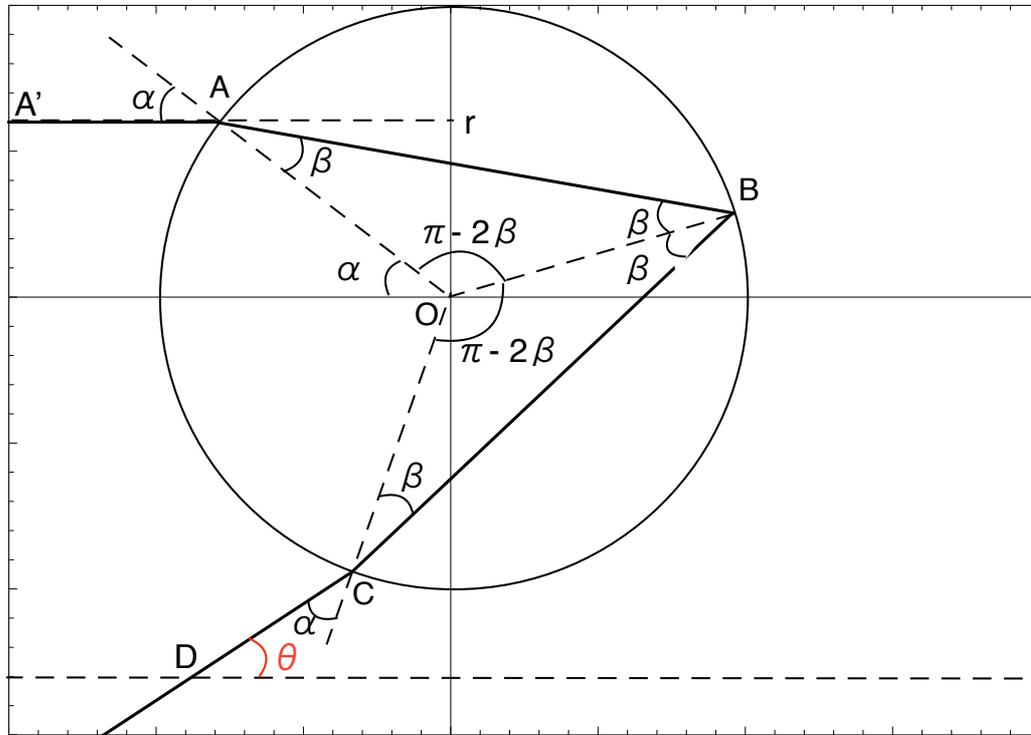
②式に第1章 1.2.5 の屈折率の値をそれぞれ代入すると以下のようなになる。

波長 λ (nm)	396.8	424	486.1	546.1	589.3	656.3
屈折率 n	1.3435	1.3404	1.3371	1.3345	1.333	1.3311
虹角(度)	40.5754	41.0141	41.4856	41.8605	42.0781	42.3552

波長が長くなるにつれて散乱角は大きくなることがわかる。

2.2 経路を描画する

水平に進んできた光が水滴に当たりどのような経路をとるのか、調べてみる。



先ほど使用した図を、円周上の点 A、B、C と中心 O をつないで得られる中心角に着目して整理した。すると点 A、B、C について

$$A = (-\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$B = (\cos(2\beta - \alpha), \sin(2\beta - \alpha))$$

$$C = (\cos(\pi + \alpha - 4\beta), \sin(\pi + \alpha - 4\beta))$$

となる。また点 A' は点 A から左に水平に移動した点である。点 D は点 C から左に $\cos \theta$ 、下に $\sin \theta$ 動いた点であるから、左に 1 動かしたとき下に $\tan \theta$ だけ動くので

$$A' = (-1.5, \sin \alpha)$$

$$D = (\cos(\pi + \alpha - 4\beta) - 1, \tan(4\beta - 2\alpha) - \sin(\pi + \alpha - 4\beta))$$

とする。

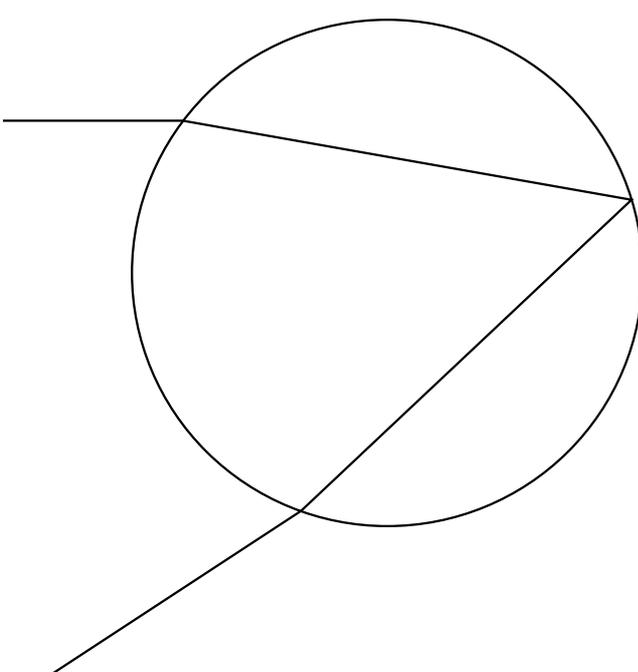
各座標に $\alpha = \sin^{-1} r$ 、 $\beta = \sin^{-1} \frac{r}{n}$ を代入し、A'、A、B、C、D の順で各点を繋ぐ線を
 描画するプログラムを Mathematica で作成すると以下ようになる。

```
In[331]:= nijiline3[r_, n_] := (*入射位置rと屈折率nから得られる経路を定義*)
Line[{{{-1.5, r}, {-sqrt[1 - r^2], r},
{Cos[2 ArcSin[r/n] - ArcSin[r]], Sin[2 ArcSin[r/n] - ArcSin[r]]},
{Cos[pi + ArcSin[r] - 4 ArcSin[r/n]], -Sin[pi + ArcSin[r] - 4 ArcSin[r/n]]}},
{-1 + Cos[pi + ArcSin[r] - 4 ArcSin[r/n]],
-1 * Tan[4 ArcSin[r/n] - 2 ArcSin[r]] +
-Sin[pi + ArcSin[r] - 4 ArcSin[r/n]]}}}]

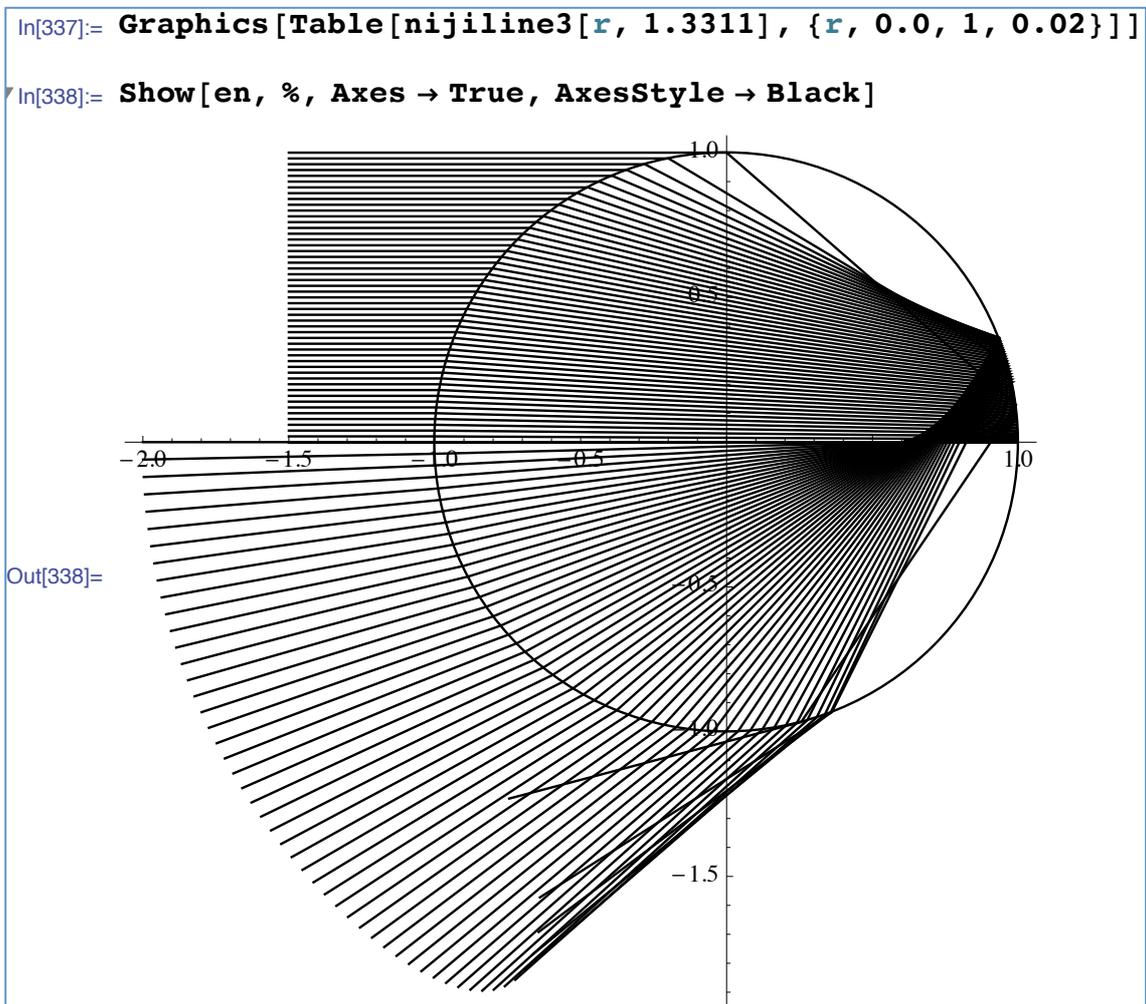
In[332]:= en = Graphics[Circle[{0, 0}, 1]] (*水滴、中心(0,0)半径1の円*)
```

ここで、入射位置 $r = 0.6$ 、屈折率 $n = 1.3311$ として描画してみる。

```
In[333]:= Graphics[nijiline3[0.6, 1.3311]]
In[334]:= Show[en, %]
Out[334]=
```



次に、屈折角 $n = 1.3311$ とし、入射位置 r を $0 \leq r \leq 1$ の範囲で 0.02 ずつ変化させる。



水滴の右下から出る線が重なっている様子がわかる。

第3章 波長と色

3.1 色の認識

人間の目には光を感じる視細胞があり、中でも錐体細胞によって色を認識している。錐体細胞には、L錐体(赤錐体)、M錐体(緑錐体)、S錐体(青錐体)と呼ばれる3つの細胞があり、それぞれ約560nm、530nm、430nm付近を中心にある程度の波長の光を感じるができる。この3種類の錐体が受ける刺激は目に入る光の波長によって変わり、脳はこの刺激の割合によって色を決めている。例えば、黄色の波長を持つ光が目に入ったとき、L錐体とM錐体が刺激を受け脳がその光が黄色だと判断する。しかし、赤と緑の光をある割合で混合すると黄色の波長の光が含まれていなくても、脳はその光を黄色と判断する。つまり同じ色でも1つの波長からなる光(単色光)による色の場合と、複数の波長の光が混合されて見えている色の場合がある。

3.2 色とディスプレイ

PCなどの一般的なディスプレイは様々な色を表示することができるが、その色に対応する様々な波長の光を発しているわけではない。ディスプレイに近づいてみるとわかるが、赤、緑、青の3色の光を任意の割合で混合し様々な色を表示している。この3つの色は人の目の錐体細胞の反応のピークに由来している。このR、G、Bの3色で色を表す方式をRGB表色系という。ディスプレイなどに用いられるのはsRGBと呼ばれる規格で機器などの違いによって表示される色に違いが出ないように定められたものである。ただこの規格は表示できる色の範囲が狭く、エメラルドグリーン、濃いシアン、オレンジ、明るい赤や黄色などの再現性は低い。

3.3 波長とRGB

波長からRGBそれぞれの値を求めるため、CIE XYZ表色系というものをを用いる。CIE XYZ表色系とは色を定量的に表す基準として国際照明委員会(CIE)が1931年に定めたものである。RGBには様々な規格や機器による表示の違いがあるが、XYZ表色系は規格や機器に依存しない色の表現方法である。理科年表「単色光の色度座標と等エネルギー単色放射の三刺激値」より波長380nm~780nmの間で10nmごとの波長 λ に対するXYZ三刺激値の値を得た。

L(nm)	X	Y	Z
380	0.0014	0	0.0065
390	0.0042	0.0001	0.0201
400	0.0143	0.0004	0.0679
410	0.0435	0.0012	0.2074
420	0.1344	0.004	0.6456
430	0.2839	0.0116	1.3856
440	0.3483	0.023	1.7471
450	0.3362	0.038	1.7721
460	0.2908	0.06	1.6692
470	0.1954	0.091	1.2876
480	0.0956	0.139	0.813
490	0.032	0.208	0.4652
500	0.0049	0.323	0.272
510	0.0093	0.503	0.1582
520	0.0633	0.71	0.0782
530	0.1655	0.862	0.0422
540	0.294	0.954	0.0203
550	0.4334	0.995	0.0087
560	0.5945	0.995	0.0039
570	0.7621	0.952	0.0021
580	0.9163	0.87	0.0017
590	1.0263	0.757	0.0011
600	1.0622	0.631	0.0008
610	1.0026	0.503	0.0003
620	0.8544	0.381	0.0002
630	0.6424	0.265	0
640	0.4479	0.175	0
650	0.2835	0.107	0
660	0.1649	0.061	0
670	0.0874	0.032	0
680	0.0468	0.017	0
690	0.0227	0.0082	0
700	0.0114	0.0041	0
710	0.0058	0.0021	0
720	0.0029	0.001	0
730	0.0014	0.0005	0
740	0.0007	0.0003	0
750	0.0003	0.0001	0
760	0.0002	0.0001	0
770	0.0001	0	0

XYZ 三刺激値を得られたが、実際に混色で用いるのは RGB である。XYZ 三刺激値は以下の変換行列で sRGB に変換できる。

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2406 & -1.5372 & -0.4986 \\ -0.9689 & 1.8758 & 0.0415 \\ 0.0557 & -0.2040 & 1.0570 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

この変換行列によって得られた RGB の値を最大値が 1、負の値が 0 になるよう正規化する。また明るさの補正であるガンマ補正を $\gamma=2.2$ として行う。波長に対する R、G、B の値をそれぞれ LR、LG、LB として Mathematica に入力する。

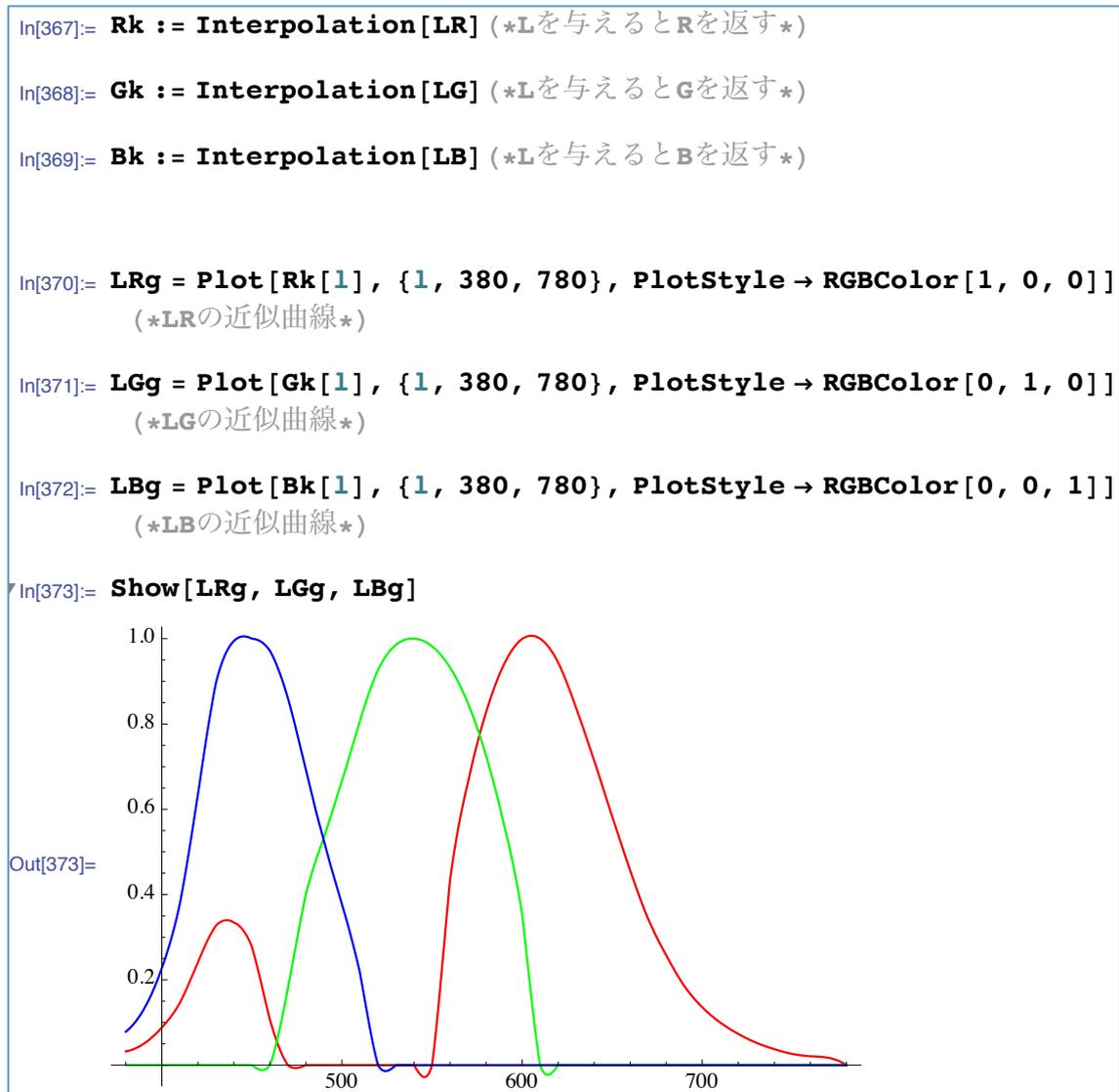
```
In[339]:= LR := {{380, 0.032265391}, {390, 0.050250727}, {400, 0.088291233},
{410, 0.145653236}, {420, 0.2403405}, {430, 0.326774085},
{440, 0.334348182}, {450, 0.277518866}, {460, 0.10633414},
{470, 0}, {480, 0}, {490, 0}, {500, 0}, {510, 0}, {520, 0},
{530, 0}, {540, 0}, {550, 0}, {560, 0.434269696},
{570, 0.663881863}, {580, 0.827266787}, {590, 0.940208574},
{600, 0.999289005}, {610, 1}, {620, 0.944423157},
{630, 0.837165862}, {640, 0.714739294}, {650, 0.582629528},
{660, 0.456339314}, {670, 0.342300697}, {680, 0.257895756},
{690, 0.185720118}, {700, 0.135858681}, {710, 0.099868562},
{720, 0.073206594}, {730, 0.052410954}, {740, 0.037530381},
{750, 0.026183303}, {760, 0.020822159}, {770, 0.017184874},
{780, 0}}

In[340]:= LG := {{380, 0}, {390, 0}, {400, 0}, {410, 0}, {420, 0},
{430, 0}, {440, 0}, {450, 0}, {460, 0}, {470, 0.180488482},
{480, 0.401216396}, {490, 0.533897838}, {500, 0.664445519},
{510, 0.807714516}, {520, 0.92683449}, {530, 0.985638731},
{540, 1}, {550, 0.982105574}, {560, 0.932383793},
{570, 0.847997976}, {580, 0.725990182}, {590, 0.563178341},
{600, 0.355311218}, {610, 0}, {620, 0}, {630, 0}, {640, 0},
{650, 0}, {660, 0}, {670, 0}, {680, 0}, {690, 0}, {700, 0},
{710, 0}, {720, 0}, {730, 0}, {740, 0}, {750, 0}, {760, 0},
{770, 0}, {780, 0}}

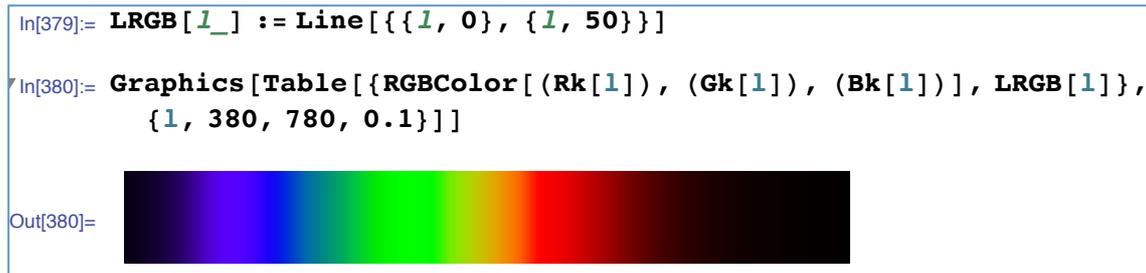
In[341]:= LB := {{380, 0.07836206}, {390, 0.130823464}, {400, 0.227483698},
{410, 0.377876696}, {420, 0.633078274}, {430, 0.895545041},
{440, 0.994508121}, {450, 1}, {460, 0.971586169},
{470, 0.860374302}, {480, 0.691325922}, {490, 0.522178996},
{500, 0.378252681}, {510, 0.216675823}, {520, 0}, {530, 0},
{540, 0}, {550, 0}, {560, 0}, {570, 0}, {580, 0}, {590, 0},
{600, 0}, {610, 0}, {620, 0}, {630, 0}, {640, 0}, {650, 0},
{660, 0}, {670, 0}, {680, 0}, {690, 0}, {700, 0}, {710, 0},
{720, 0}, {730, 0}, {740, 0}, {750, 0}, {760, 0}, {770, 0},
{780, 0}}
```

3.4 色の出力

第3章 3.3 で得られた R、G、B の値を補間し波長 λ について 380nm~780nm の間で色を対応させたグラフを描画すると以下のようなになる。



また、横軸の座標 λ に対応する色を縦の線として描画する。



第4章 まとめ

4.1 虹の再現

ここまでで得られたものを用いて可能な限り虹が見えるとき水滴が光にどんな影響を及ぼしているか再現する。

①第1章 1.2.5 より波長 λ と屈折率 n の関係

$$n(\lambda) = 1.44846 - 0.000497972\lambda + 7.4442 \times 10^{-7}\lambda^2 - 3.93318 \times 10^{-10}\lambda^3$$

②虹角をとるときの入射位置 r について

$$r = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

③波長 λ に対する色(R,G,B)のデータ

この①、②、③を第2章2.2のプログラムに反映させる。

```

In[424]:= n[l_] := 1.4484567362468541` - 0.0004979720437395846` l +
7.444197481817381` * ^-7 l^2 - 3.9331812499335036` * ^-10 l^3

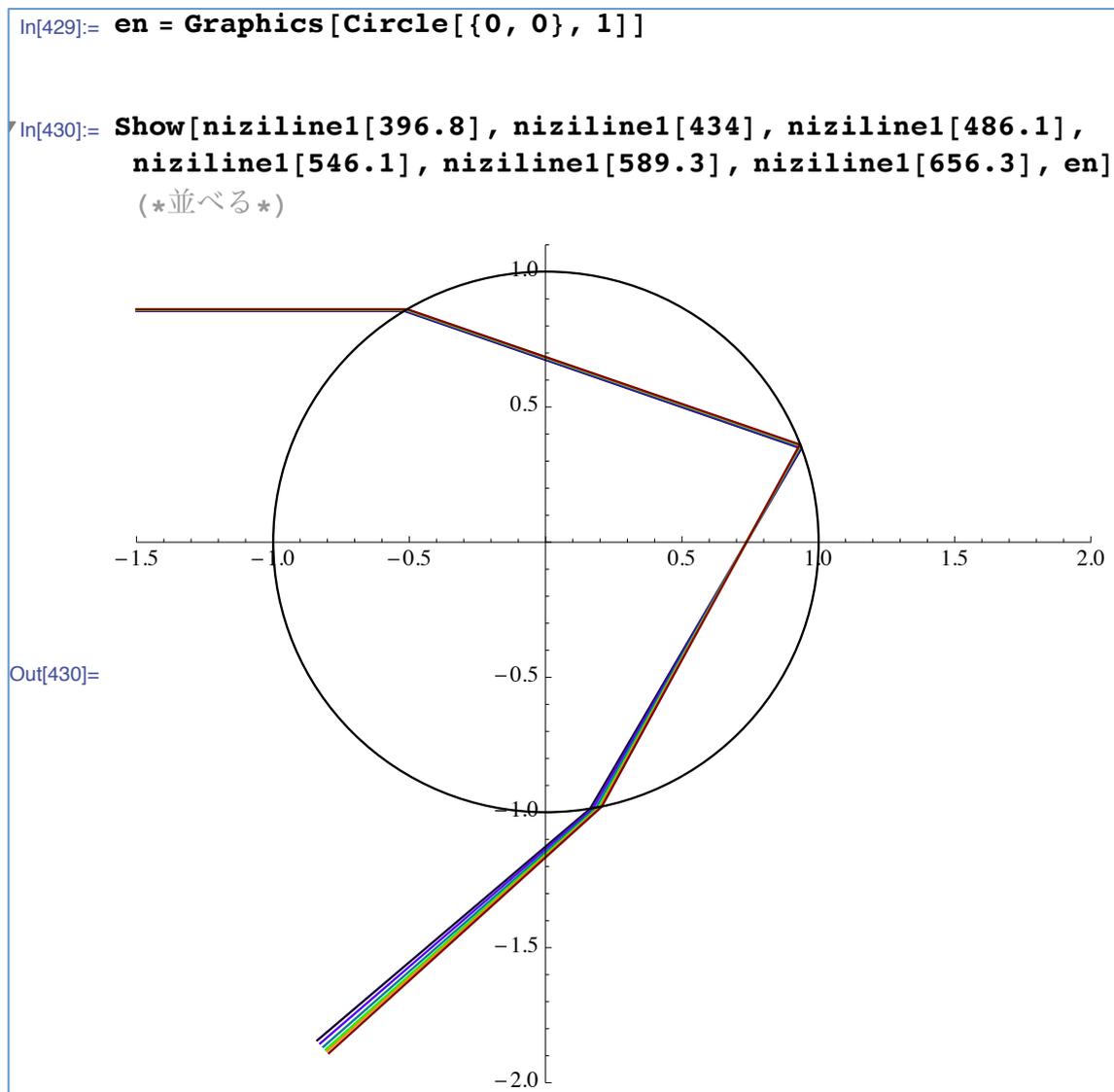
In[425]:= nijiline[l_] := (*ある波長が虹角をとる時の経路を描画*)

Line[{{{-1.5,  $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ }, {- $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}\right)^2}$ ,  $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ }},
{Cos[2 ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ] - ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ]],
Sin[2 ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ] - ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ]]}},
{Cos[ $\pi - 4$  ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ] + ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ]],
-Sin[ $\pi - 4$  ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ] + ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ]]}},
{-1 + Cos[ $\pi - 4$  ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ] + ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ]],
-1 * Tan[4 ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ] - 2 ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ]] +
-Sin[ $\pi - 4$  ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ] + ArcSin[ $\frac{\sqrt{4-n[l]^2}}{\sqrt{3}}$ ]]}}]}

In[426]:= niziline1[l_] := (*ある波長が虹角をとる時の経路と色*)
Graphics[{RGBColor[(Rk[l]), (Gk[l]), (Bk[l])],
AbsoluteThickness[1], nijiline[l]},
PlotRange -> {{-1.5, 2}, {-2, 1.1}}, Axes -> True, AxesStyle -> Black]

```

上記のプログラムに第1章 1.2.5 のデータの波長を代入すると以下のような図が得られる。



以上で、1つの水滴に対しある波長 λ の光が当たったときその光が最も明るく散乱される角度、波長 λ の光の色とその経路を再現することができた。

3.2 今後

今回の研究では1つの水滴に対し1つの波長の光がどんな振る舞いをするのかが理解できた。しかし、実際に虹が見えているとき、空気中には無数の水滴が存在していて、目は角度、波長、強さの違う様々な光を捉えている。ある角度から目に届く光のスペクトルの関数を $E(\lambda)$ 、波長 λ に対する三刺激値を $\bar{x}(\lambda)$ 、 $\bar{y}(\lambda)$ 、 $\bar{z}(\lambda)$ とすると、

$$X = \int_{380}^{780} E(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda$$

$$Y = \int_{380}^{780} E(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda$$

$$Z = \int_{380}^{780} E(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda$$

となり、スペクトル $E(\lambda)$ の XYZ 三刺激値がわかる。角度ごとの光のスペクトルを得ることができれば、より正確な虹の再現ができると思われる。

参考文献

西條敏美

(1999)『虹-その文化と科学』 恒星社厚生閣.

(2015)『授業 虹の科学-光の原理から人工虹のつくり方まで』 太郎次郎社エディタス.

谷口慶治・張小忙

(2012)『デジタル色彩工学』 共立出版