

流体中に置かれた回転円柱の運動
～サッカーボールの軌道～

明治大学総合数理学部
現象数理学科

4年1組24番

2610140007 田所 大樹

指導教員 桂田 祐史

2018年2月14日

目次

- 1 はじめに

- 2 研究を進める際の前提
 - 2.1 研究ステップ
 - 2.2 ボールについて

- 3 方程式
 - 3.1 解析領域
 - 3.2 無次元化
 - 3.3 弱形式

- 4 揚力と抗力
 - 4.1 表面積分による表示
 - 4.2 領域積分による表示

- 5 数値計算
 - 5.1 設定
 - 5.2 回転がない場合
 - 5.3 回転がある場合

- 6 結論

- 7 謝辞

参考文献

1 はじめに

著者はサッカー・フットサルをしており、シュートの際ボールが揺れる現象に興味があった。自身も試合で無回転シュートを有効的に蹴っていたが、なぜ予測不可能な不規則な現象が起きるのか疑問に思い、注目してみた。こうして流体力学を勉強することを決め、サッカーボールの変化の原因を知り、それを今後の活動に生かしていきたいと考え、数値計算によって明らかにすることを目標として本研究を開始した。なお、今回は龍谷大学大学院理工学部研究科数理情報学専攻、野地誠さんの修士論文[1]を参考にしながら本研究を行った。

サッカーのカーブシュートは、ボールに回転を与えることで、ボールの軌道を変化させる変化球である。これはマグナス力によるものである。マグナス力とは球の動く方向と回転が決まると力が働く方向が決まり、また決まった方向にしか働かない力である。しかし、そのような原理とは全く逆で回転を与えずにボールの軌道を変化させるボールがある。これを無回転シュートまたは、ブレ球という。この無回転ボールの動きはなかなか予測することができない。流体中を動く物体が流体から受ける力には揚力と抗力がある。この二つの力によってボールの運動が定まる。よってまず無回転の場合やボールが回転している場合の回転の効果(揚力と抗力)を調べることにした。

流体計算をし、回転の効果調べるために用いたソフトは FreeFEM++ である。FreeFEM++ の機能面からの制約及び計算時間の制約から、ボールを円柱に置き換えて、空間 2 次元で数値計算を行った。また、レイノルズ数は 1.6×10^5 を目標にしてプログラム作成を行った。これは、気温 20°C 、標準大気圧で大人がサッカーボールをシュートした時の平均的な速さに相当する値である。

そこでまず、円柱の回転の速さを変えて、流速と圧力を計算した。その流速と圧力を用いて、円柱に作用する揚力と抗力を計算した。なお、計算を良い精度にするため、揚力と抗力は田端[6]の方法で計算した。

結果、揚力は時間とともに振動することが示された。これは、円柱の後方に現れるカルマン渦によるものだと考えられる。さらに、揚力の周期と振幅は円柱の回転数によらずほぼ一定であるが、回転数が多い方が揚力の絶対値の平均が大きくなることがわかった。抗力については、回転数が少なくなると値も小さくなり、振動する幅も小さくなることがわかった。

2 研究を進める際の前提

本研究では計算を簡単にするために、いくつかの前提を決めたトイ・モデルを考えた。1つ目は空間2次元流を扱うこととする。またボールを真上から見た場合を考えるため、重力の影響はないものとする。2つ目はボールを円柱に置き換えること。これは空間2次元流を扱うことで、円柱を考えていることとなる。3つ目は、円柱は最初に決めた速さで回転させることができることとする。本当は回転を与える変化球は空気抵抗から回転数は徐々に落ちる。しかしこのようなモデルを作ることは困難なため、円柱の内部にモーターのようなもの仕組みを常に一定の値で回転させることができることとする。4つ目に空気中での円柱の動きを考える。気温 20°C、標準大気圧を想定した。以上の条件のもと、有限要素法を用い計算を行うものとする。数値計算における有限要素法の大きな特徴の1つは任意形状物体が容易に扱えることである。有限要素法では、領域を格子ではなく、要素に分解している。有限要素法を用い、揚力と抗力を求める方法は九州大学の田端正久先生の資料[6]を参考にした。

2.1 座標系について

本研究の数値計算は円柱の中心を固定した座標系で行った。時間領域で変化しているものは計算困難なため、領域を固定することで計算の安定化を図るためである。円柱は揚力や抗力を受けるものの、円柱の中心は空気中を一定の速度で進むものとする。円柱の中心を固定した座標系で流体に作用する揚力や抗力を計算する。

2.2 ボールについて

大人用である5号球ボールの直径は0.22mである。つまり、半径は0.11mであり、これを代表的な長さとした。大学生以上の平均的なシュートスピードは80km/hなので、22.22m/sを代表的な速さとした。さらに、平均的なカーブシュートの回転数は5~10回転/sなので、今回は8回転/sで計算を行った。次に、PKの距離は11m、代表的な速さを22.22m/sとしているので、PKは0.5秒でゴールに入る。

3 方程式

3.1 解析領域

流れ場を解析するにあたり、有界領域を用意した。この領域を無限にすると計算が大変になるので以下のように設定した。円柱 G を置きその周りに長方形の人口境界を作る。円柱と人口境界で囲まれた領域を Ω とする。この人口境界の縦幅を円柱直径の10倍、横幅を円柱直径の25倍でとった。 ∂G を円柱境界とする。 ∂G は $\partial\Omega$ の一部である。境界 $\partial\Omega$ を次のように分ける。

$$\partial\Omega = \partial G \cup \gamma_i \cup \gamma_o \cup \gamma_w \quad (1)$$

流入部を γ_i 、流出部を γ_o 、側壁部を γ_w とする。図1のような長形状の領域を作り流入部から流体を流入する時、内部にできる流れを解析する。物体の運動を表す方程式がナビエ・ストークス方程式と質量保存を表す連続の式である。微小な領域中の流体を考えた時、領域に流れ込む流体の質量と流れ出す流体の質量の差は、領域中の流体の質量の増加に等しいことから導かれる。この2つの式をベクトル表記で書くと以下のようなになる。粘性を持つ流体の運動を表すナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2)$$

粘性流体とは粘りのある流体である。全く粘性のない物体のことを完全流体、または理想流体という。質量保存を表す連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

となる。なお、初期条件は

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

と与えた。ここでの、 \mathbf{u} は流体の速度、 $\rho = 1.205(\text{kg}/\text{m}^3)$:空気の密度(今回は気温 20°C 、標準大気圧 0.1013MPa において)、 p は圧力、 $\mu = 1.822 \times$

$10^{-5}(\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}))$:流体の粘性率、 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$:動粘性係数を表す。

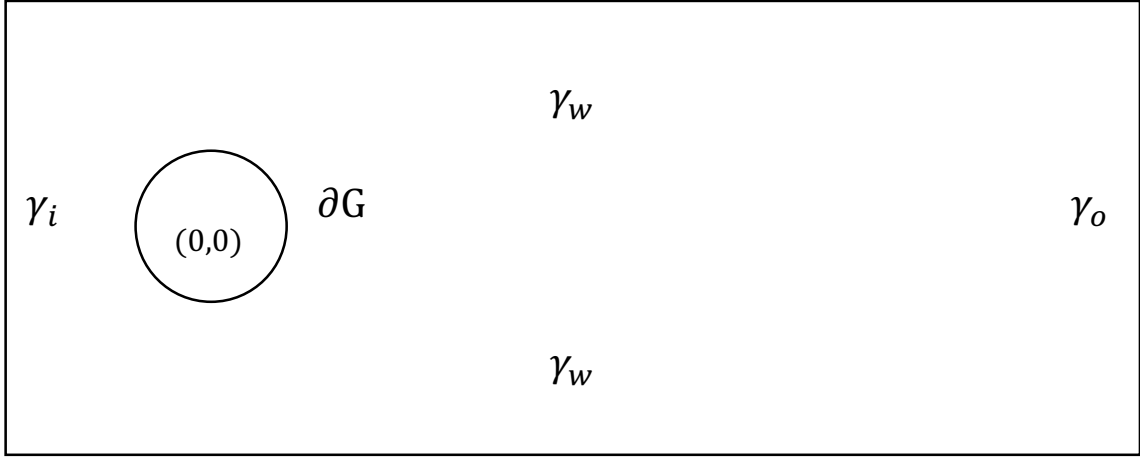


図 1:解析領域

代表的な速さを U 、 $\sigma = [\sigma_{ij}]$, $i, j = 1, 2$ を応力テンソル、 $n = (n_1, n_2)$ を G の表面 ∂G への外向き単位法線ベクトルとする。なお境界 ∂G では円柱に回転を与える。境界条件を次のように与える。

$$u = (U, 0) \quad \text{on } \gamma_i \quad (5)$$

$$t^T \sigma(u, p) n = 0, u \cdot n = 0 \quad \text{on } \gamma_w \quad (6)$$

$$\sigma(u, p) n = 0 \quad \text{on } \gamma_o \quad (7)$$

$$u = (-(2\pi\epsilon)y, (2\pi\epsilon)x) \quad \text{on } \partial G \quad (8)$$

今回、ボールは左側へ移動しているので γ_i から空気が流れている。 t は境界 γ_w の接線ベクトルとする。円柱は単位時間あたり ϵ 回、回転すると仮定すると、 ∂G 上では(8)という境界条件になる。これは粘着境界条件を適用している。応力テンソル σ は

$$\sigma_{ij}(u, p) = -p\delta_{ij} + \frac{2}{Re} D_{ij}(u) \quad (9)$$

と表せ、2 階の混合ベクトルである。なお、 $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ 1 & (i \neq j) \end{cases}$ である。

D_{ij} は変形速度テンソルで、

$$D_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (10)$$

で定義される。

3.2 無次元化

無次元化を行うと、単位がなくなりパラメータは Re = レイノルズ数のみとなる。代表的な長さ L , 代表的な速さ U を取って、

$$x' := \frac{x}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad u' := \frac{u}{U}, \quad p' = \frac{1}{\rho U^2} p$$

とおくと x', t', u', p' は無次元量になる。そして(2)は以下の方程式になる。

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' + \nabla' p' - \frac{1}{Re} \Delta' u' = 0 \quad (11)$$

この式は無次元化したナビエ・ストークス方程式と呼ばれる。 $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ であ

り、レイノルズ数と呼ばれる無次元定数である。これは流体の慣性力と粘性力の比を表す量である。なお、本研究のレイノルズ数は、

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{1.205 \times 22 \times 0.11}{1.822 \times 10^{-5}} = 1.6 \times 10^5 \quad (12)$$

を目標にしながら本研究を行った。

(3), (4), (6), (7)は同様の式に変換されるが、(5), (8)はそれぞれ次のような式になる。

$$u' = (1, 0) \quad \text{on } \gamma_i \quad (5')$$

$$u' = (-(2\pi\varepsilon')y', (2\pi\varepsilon')x') \quad \text{on } \partial G \quad (8')$$

$$\text{ただし、} \varepsilon' = \varepsilon \frac{L}{U} \doteq \frac{\varepsilon}{200}$$

3.3 弱形式

弱形式は有限要素法を用いる際に、方程式を弱形式に変換する。そこで、ナビエ・ストークス方程式と連続の式の弱形式の導出を行う。(田端[6])(11)の左辺第3項に重み関数 v をかけ、 Ω で積分すると

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} dx = \int_{\gamma_0} p v_1 dx_2 - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx \quad (13)$$

が得られる。ただし、 γ_i で $v_1 = 0$, γ_o で $v_2 = 0$ となることを用いた。(13)の右辺第1項は流出部での値なので境界 γ_o での境界条件 $\sigma(u, p)n = 0$ に、 $n = (1, 0)$ を代

入して得られる $-p + \frac{2}{Re} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$ から

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_o} p v_1 dx_2 - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx \\ &= \frac{2}{Re} \int \frac{\partial u_1}{\partial x_1} v_1 dx_2 - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx \end{aligned} \quad (14)$$

となる。(11)の左辺第1項、第2項も同様 v をかけ、 Ω で積分する。(11)第4項は難しいため

$$a(u, v) = \frac{2}{Re} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 D_{i,j}(u) D_{i,j}(v) dx \quad (15)$$

を(11)に戻す作業をした。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \left\{ 2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + 2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx \right\} \\ &= \frac{1}{Re} \left\{ \left(\int_{\gamma_o} 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} v_1 dx_2 - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} v_1 dx \right) - 2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} v_2 dx \right\} \\ &+ \int_{\gamma_w} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} v_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} v_1 \right) dx_1 - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} v_1 dx + \int_{\gamma_o} 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} v_2 dx_2 \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} v_2 dx + \int_{\gamma_o} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} v_2 dx_2 - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} v_2 dx \\ &+ \int_{\gamma_w} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} v_1 \right) dx_1 - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 dx \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

境界条件 $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \left\{ 2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + 2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx \right\} \\ &= \frac{1}{Re} \left\{ 2 \int_{\gamma_o} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} v_1 dx_2 - 2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} v_1 dx - 2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} v_2 dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} v_1 dx - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} v_2 dx \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} v_2 dx - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 dx \right\} \quad (17)$$

となる。さらに(17)の右辺第2項、第7項は $-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) v_1 = 0$ 、右辺第3

項、第6項は $-\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) v_2 = 0$ より、

$$\frac{2}{Re} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 D_{i,j}(u) D_{i,j}(v) dx = \frac{2}{Re} \int_{\gamma_0} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} v_1 dx_2 - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx \quad (18)$$

となる。右辺第1項は(14)の右辺第1項から0になる。

以上のことから、弱形式は以下のようにする。

関数 $(u, p): (0, T) \rightarrow V(g, \varepsilon) \times Q$ で

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a_1(u, u, v) + a(u, v) + b(v, p) = (f, v) \quad (\forall v \in V)$$

$$b(u, q) = 0 \quad (\forall q \in Q) \quad (19)$$

を満たすものを求める。ただし

$$a_1(u, u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (u \cdot \text{grad}) u_i v_i dx$$

$$a(u, v) = \frac{2}{Re} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 D_{i,j}(u) D_{i,j}(v) dx$$

$$b(v, p) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx$$

であり、関数空間 V, Q を次のように定義する。

$$V(g, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} v \in (H^1(\Omega))^2; v = (-(2\pi\varepsilon)x_2, (2\pi\varepsilon)x_1) \quad (x \in \partial G), \\ v = g \quad (x \in \gamma_i) \\ v \cdot n = 0 \quad (x \in \gamma) \end{array} \right\}$$

$$V = V(0,0), \quad Q = L^2(\Omega)$$

関数空間 V, Q にはそれぞれ $(H^1(\Omega))^2, L^2(\Omega)$ のノルムを入れる。

4 揚力と抗力

本章では精度よく、揚力と抗力を求める方法を説明する。物体が流れから受ける力のうち流れに垂直な成分を揚力といい、平行な成分を抗力という。一般的に知られている揚力と抗力の求め方は、

$$L(\text{揚力}) = \frac{1}{2} C_L \rho U^2 A$$

$$D(\text{抗力}) = \frac{1}{2} C_D \rho U^2 A$$

である。 ρ は流体の密度、 U は流体の代表速度、 A は物体 G の流体方向の断面積である。 C_L, C_D は無次元量であり、それぞれ揚力係数、抗力係数である。これらは、絶対的な定数ではなく、レイノルズ数に依存している。実際に、揚力係数と抗力係数を求めるのは難しいので、本研究では数値計算で得られた流速 u 、圧力 p から直接 L と D を計算する。

4.1 表面積分による表示

流れに置かれた物体 G の揚力と抗力は次のように求められる。

$$L = - \int_{\partial G} \sum_{j=1}^2 \sigma_{2,j} n_j ds \quad (20)$$

$$D = - \int_{\partial G} \sum_{j=1}^2 \sigma_{1,j} n_j ds \quad (21)$$

このように、物体 G にかかる力は表面積分で求められるが、この方法は精度が悪い。よって、次節でより良い精度の揚力、抗力を求める方法を説明する。

4.2 領域積分による表示

本研究では、田端[6]に従い、以下に説明するような領域積分を用いて L と D を計算する方法を採用する。

関数空間 $L^2(\Omega), H^m(\Omega)$ を用意する。

$$L^2(\Omega) = \{v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \|v\|_0 < +\infty\}$$

$$\|v\|_0 = \left\{ \int_{\Omega} |v|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \|v\|_m < +\infty\}$$

$$\|v\|_m = \left\{ \sum_{\alpha \leq m} \|D^\alpha v\|_0^2 \right\}^{1/2}$$

を用意する。ここに、 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ は非負の整数からなる多重指数で、

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^2 \alpha_i$$

$$D^\alpha = \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{\alpha_i}$$

である。

命題 (u, p) を $(H^1(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$ の任意の元、 v を $(H^1(\Omega))^2$ の任意の元とする。 (田端[6]) このとき、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a_1(u, u, v) + a(u, v) + b(v, p) \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \text{grad})u - \frac{1}{Re} \Delta u + \text{grad } p - \frac{1}{Re} \text{grad}(\text{div } u) \right\} v dx \\ & \quad + \int_{\partial\Omega} [\sigma(u, p)] n \cdot v dS \end{aligned} \quad (22)$$

が成立する。

この命題の式を用いて領域積分を行う。ここで、 (u, p) は(19)を満たしているとする。 $\bar{\Omega}$ で十分滑らかな境界条件

$$w = \begin{cases} 1 & \text{on } \partial G \\ 0 & \text{on } \partial\Omega \setminus \partial G \end{cases}$$

を満たす w をとり、 $v^D = (w, 0)$, $v^L = (0, w)$ と置く。(22) 右辺第1項から第4項は(2)を満たし、右辺第5項は(3)を満たしているため、0となる。よって、(22) の v を v^L または v^D に置き換えることで、以下の式に書き換えることができる。

$$\int_{\partial\Omega} [\sigma(u, p)] n \cdot v^L dS = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v^L \right) + a_1(u, u, v^L) + a(u, v^L) + b(v^L, p) \quad (23)$$

$$\int_{\partial\Omega} [\sigma(u, p)] n \cdot v^D dS = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v^D \right) + a_1(u, u, v^D) + a(u, v^D) + b(v^D, p) \quad (24)$$

これらの各項は全て領域積分で表現されている。(23)(24)を(20)(21)に代入すると、揚力 L と抗力 D は次のように求まる。

$$L = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v^L \right) + a_1(u, u, v^L) + a(u, v^L) + b(v^L, p)$$

$$D = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v^D \right) + a_1(u, u, v^D) + a(u, v^D) + b(v^D, p)$$

有限要素法で求めた (u, p) を用いて、上記の2式により D と L を計算する。なお、 w はラプラス方程式の解として求めた。

5 数値計算

5.1 設定

領域 Ω を図2のように三角形分割を行った。この三角形分割は、 γ_i を45等分、 γ_o を30等分、 γ_w を105等分、 ∂G を45等分した際、FreeFEM++の自動分割で作られたものである。要素の数は14186個、頂点の数は7258個である。円柱付近のメッシュを細かくとってあるのは、揚力と抗力を精度よく求めるためである。

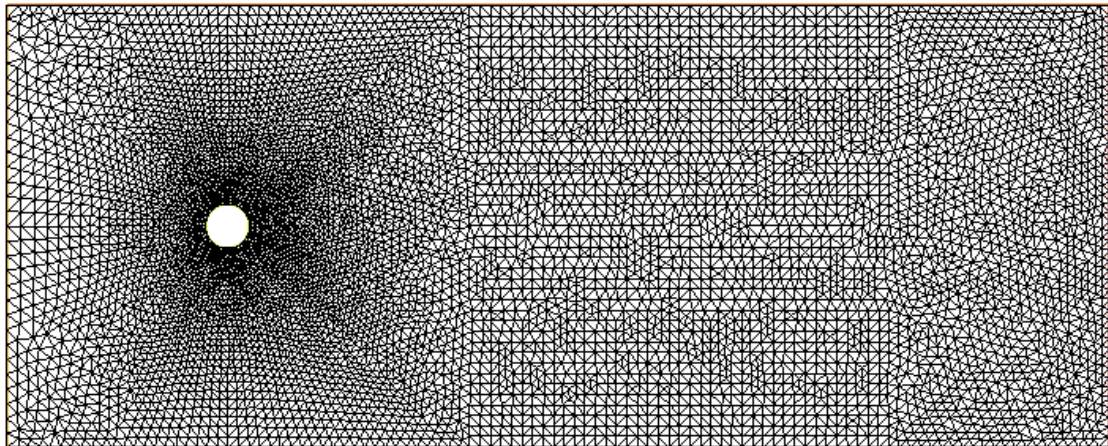


図2:三角形分割

FreeFEM++のプログラムは鈴木先生のサンプルプログラム([8])を参考にして作成した。本研究では $Re = 1.6 \times 10^5$ を目標にしていたが、その計算は難しいので、 $Re = 40, 400, 2000, 4000$ の4パターンで計算を行った。結果、高レイノルズ数だと計算が破綻した。 $Re = 400$ までは破綻せずもっともらしい結果が得られ

たが、 Δt を小さくしていくと、計算が破綻するという奇妙なことが起きた。このことから、実験結果は $Re = 40,400$ の時から得られた結果をもとに考察を行うことにした。なお、レイノルズ数は(12)で定義されている。

$\Delta t = 1.0$ として計算計算を行った。

$\varepsilon = 0.04, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3$ の5パターンで計算を行った。なお、 $\varepsilon = 0.04$ は8回転/sに相当する。

5.2 回転がない場合

$\varepsilon = 0$ の時、揚力・抗力の値はどのような値をとるのかを調べてみた。図3は、 $Re = 40$ で計算した時のグラフであり、横軸が時間、縦軸が揚力の値を表している。

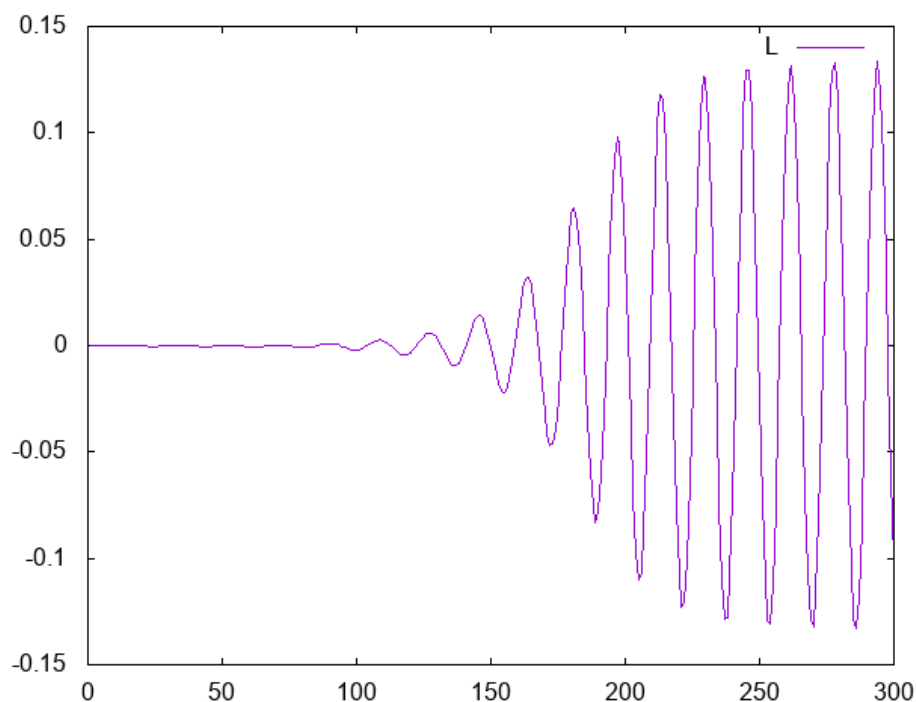


図4は、 $Re = 40$ で計算した時のグラフであり、横軸が時間、縦軸が抗力の値を表している。

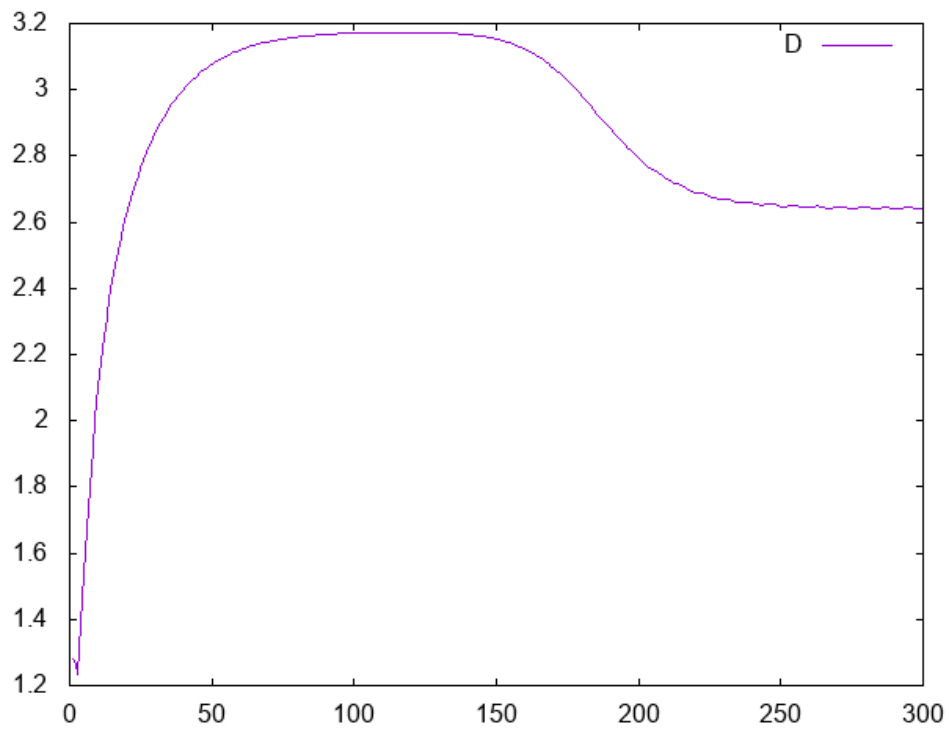


図 5 は、 $Re = 400$ で計算した時のグラフであり、横軸が時間、縦軸が揚力の値を表している。

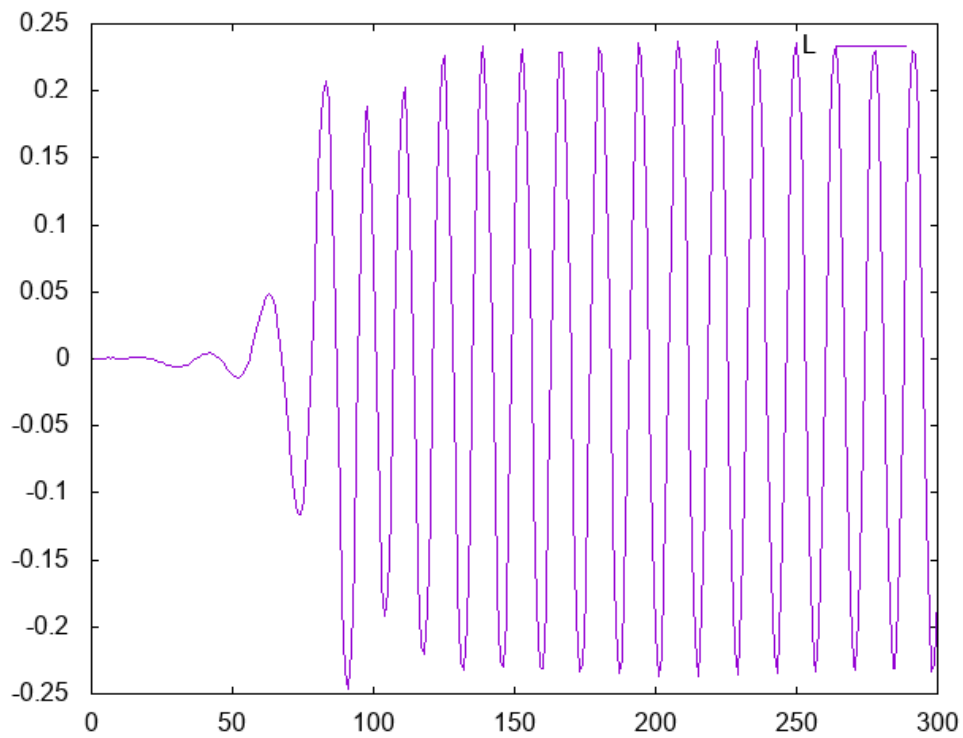
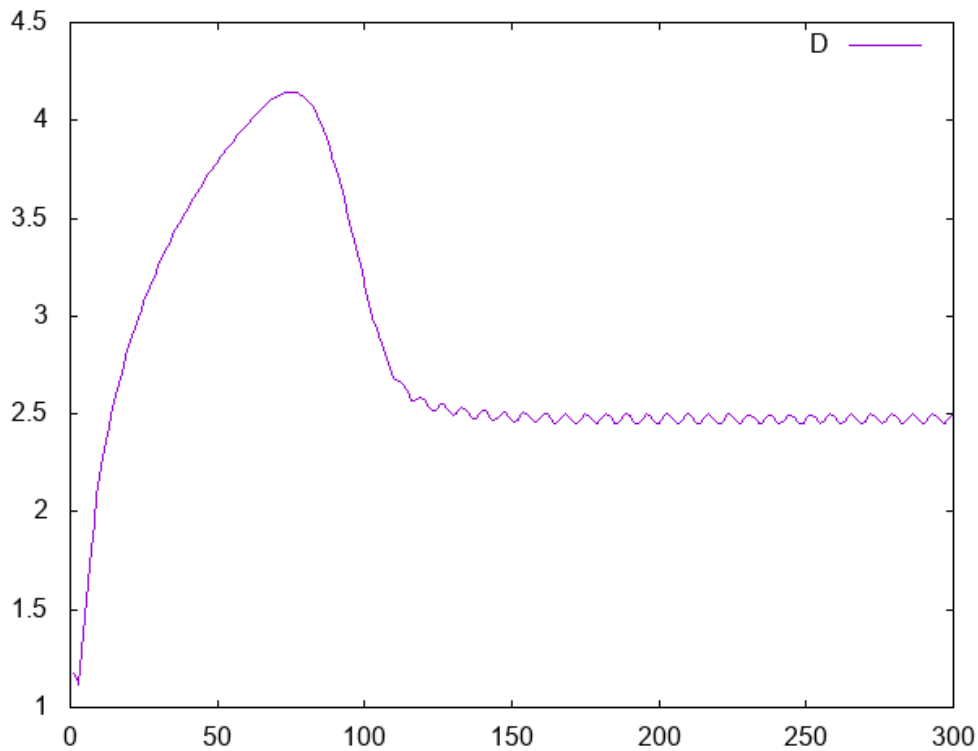


図 6 は、 $Re = 400$ で計算した時のグラフであり、横軸が時間、縦軸が抗力の値を表している。



5.3 回転がある場合

$\varepsilon = 0.04$ (実時間で毎秒約 8 回転), $\varepsilon = 0.1$ (実時間で毎秒約 20 回転), $\varepsilon =$

0.2 (実時間で毎秒約 40 回転), $\varepsilon = 0.3$ (実時間で毎秒約 60 回転)の時、揚力・

抗力の値はどのような値をとるのかを調べてみた。これらの値で計算した結果をまとめてグラフにした。図 7 は、 $Re = 40$ で計算した時のグラフであり、横軸が時間、縦軸が揚力の値を表している。

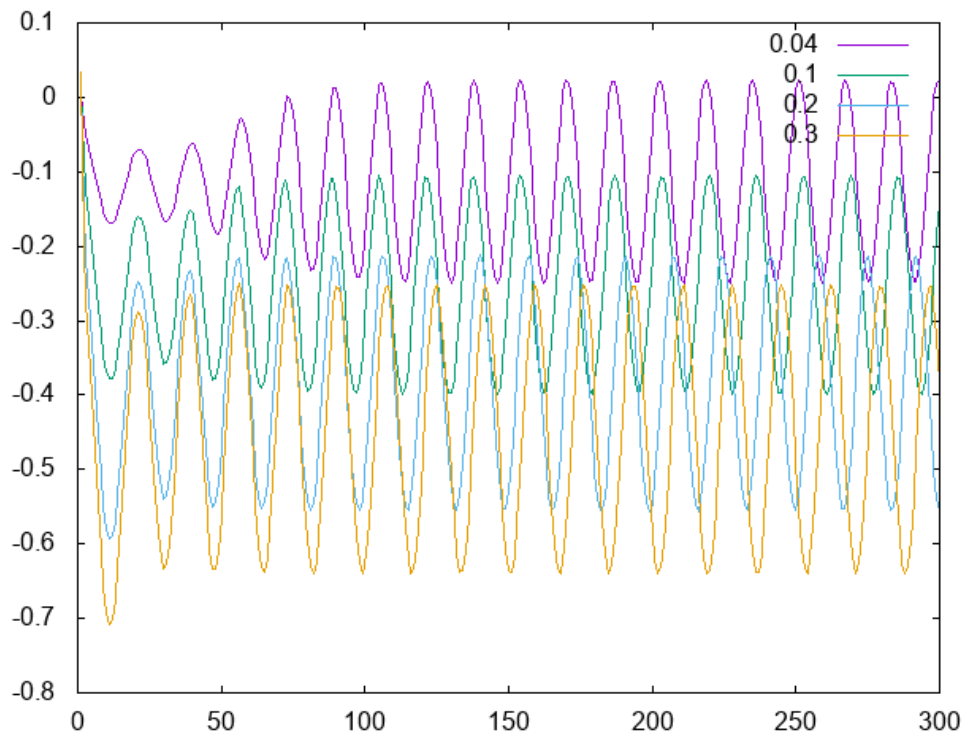


図 8 は、 $Re = 40$ で計算した時のグラフであり、横軸が時間、縦軸が抗力の値を表している。

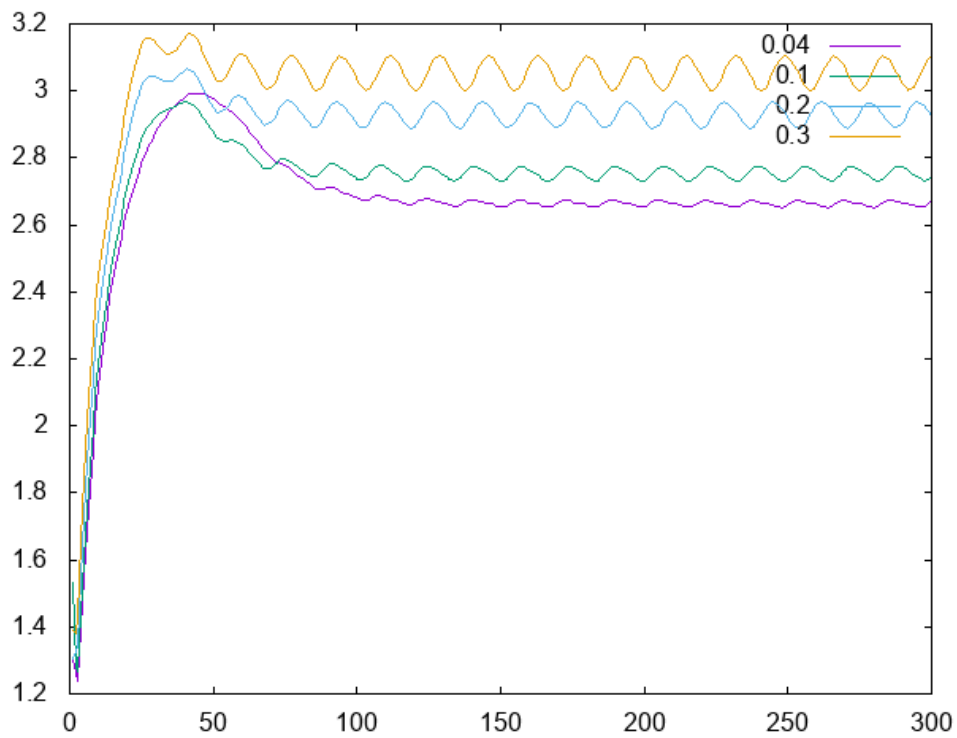


図 9 は、 $Re = 400$ で計算した時のグラフであり、横軸が時間、縦軸が揚力の値を表している。

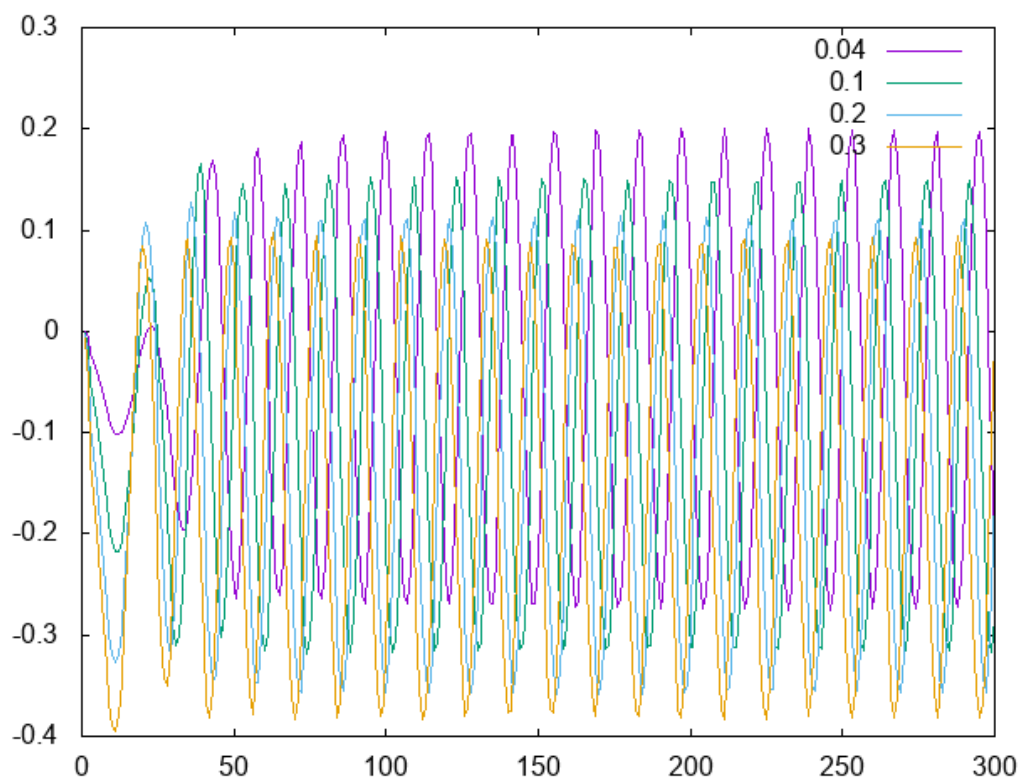
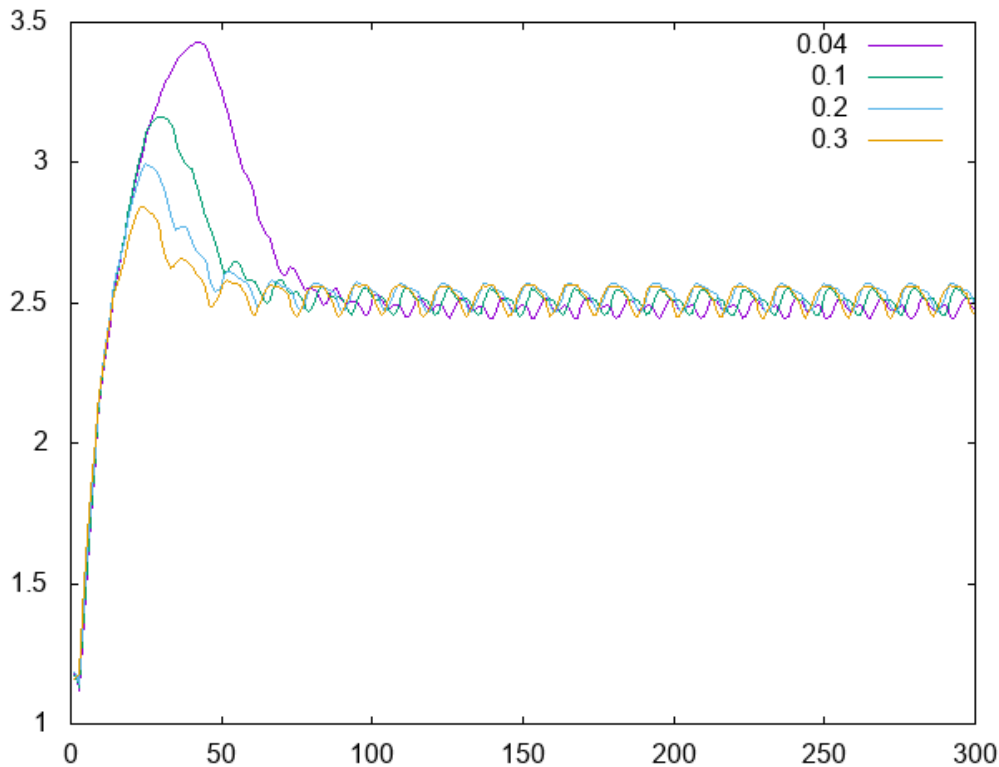


図 10 は、 $Re = 400$ で計算した時のグラフであり、横軸が時間、縦軸が抗力の値を表している。



6 結論

無回転、また回転を与えた場合ともに一定時間が経過すると周期的な流れになる。無回転の場合だと、回転を与えた時に比べ、揚力は0に近い値で振動をしており、平均値の絶対値は小さい。抗力は振動の幅は非常に小さく、値も小さくなっている。揚力については、グラフから見てわかるように、振動をしていることがわかった。また、回転数が多いほど、揚力の平均値の絶対値が大きくなる。抗力については、グラフから見てわかるように、回転数を多くすればするほど振動の幅が大きくなる。さらに、回転数を少なくすると抗力の値は小さくなる。

$Re = 40$ と $Re = 400$ の違いについて、揚力の値はレイノルズ数が大きくなると、振動の幅も大きくなった。レイノルズ数が大きくなるとボールの変化が大きくなることがわかった。抗力ではレイノルズ数が大きくなると、値は低くなった。レイノルズ数を大きくすると、空気からの抵抗が小さくなる。

7 謝辞

最後になりましたが、今回の卒業研究にあたり、流体の計算や FreeFEM++ の使い方など一から丁寧かつ親切に指導していただいた明治大学総合数理学部現象数理学科・桂田祐史先生、本研究を行うにあたり参考にさせていただいた龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻・野地誠氏には厚くお礼申し上げます。

参考文献

- [1]野地 誠、流体中に置かれた回転円柱の運動、2008 年度 龍谷大学理工学研究科修士論文(2009)
- [2]姫野 龍太郎、魔球をつくる 究極の変化球を求めて、岩波書店(2000)
- [3]姫野 龍太郎、変化球の大研究、岩波書店(2002)
- [4]竹内 淳、高校数学でわかる流体力学 ベルヌーイの定理から翼に働く揚力まで、ブルーバックス、講談社(2014)
- [5]鈴木 厚、*FreeFem++*による有限要素法プログラミング by 中級コース (2016)
- [6]田端 正久、流体問題の有限要素解析、数理科学 No.417、pp.13-19、(1998 MARCH)
- [7]桂田 祐史、流体力学の方程式に対する有限要素法、2009,2017
- [8]鈴木厚：FreeFEM++演習、数値解析チュートリアル 2007 予稿集