

# 「4章 惑星運動の数理」についてコメント

桂田 祐史

2019年11月18日, 2019年11月29日

11月15日に無事に、藤田・齊藤 [1] 4章が済んだ。最後は駆け足だったこともあり、少しコメントしておく (ゼミ中に喋ったことが多い)。

Kepler の法則は、惑星の運行の観測記録から得られた経験法則であるが、万有引力の法則と力学の法則を仮定すると、それから Kepler の法則が数学的に導かれる (Kepler の法則の証明と言って良い) ことは、Newton が著書「プリンキピア」の中で示した (1687年)。Newton は微積分の創始者かつ力学の創始者と言われるが (数学の世界でも、物理学の世界でも、偉い人と認定されている)、この Kepler の法則の証明は、その二つの「大発明」の威力をもっとも良く表すものとされている。

[1] では、太陽と地球の大きさを無視して点とみなすことの正当化するため、太陽と地球の距離に比べて、太陽と地球が小さいことを理由にあげていた (p. 59)。しかし、適当な仮定の元で、球形の物体が及ぼす重力は、球の中心にすべての質量が集中している質点の及ぼす重力と一致することが証明できる。このことは、以下の  $g$  を  $G, m, R$  で表す話にもつながるので、証明は省略するにしても、その事実自体は書いておいて欲しかったような気がする。(このことは割と多くの本に載っているが、2016年度の卒業研究レポート (<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/2015/> の川田「ケプラーの法則 — 2体問題より —」) がある。)

それから、こういう話をするときには、太陽、地球の大きさ (半径) と質量、地球と太陽の距離などは、一応調べておくと良い。ネットで簡単に調べられることなのだから<sup>1</sup>。

万有引力定数  $G$  は、実験で得たデータから算出するしかない。初めてそれに成功した人は、キャベンディッシュという物理学者である。この話は有名なことを別にしても、学ぶ価値はあると思う。 $G$  を測定することで、地球の質量、太陽の質量が分かるので ( $G$  と地球の質量  $m$ 、半径  $R$  を用いて、重力加速度  $g$  が表せることに注意。また惑星の運動を観測すると、テキスト中の  $\alpha (= GM)$  が求められことに注意。)、 $G$  の測定は、地球や太陽の重さを測る実験である、とも言える。

(以下続く。暇が出来たら書き足すかも。)

二対問題は鮮やかに解けたけれど、三体問題については色々な研究があり、ある意味で解けないことが分かった (これは数学の古典の1つ)。その数値シミュレーションも面白いかも。

宇宙の構造の進化を調べるため、膨大な数の天体が重力に従ってどのように動くかシミュレーションする、という研究もある。

---

<sup>1</sup>大きな数になるので、数値そのものを見てもピンと来ないかもしれない。そういう時は、その数値で色々計算してみると良い。片方が分かったら、もう片方は何倍であるとか。密度を求めてみるとか。私 (桂田) は、地球のサイズは一周 4 万 km、密度が 5.5 (これから質量  $m$  が分かる。 $m = 6.0 \times 10^{24}$  kg)、太陽のサイズは地球の 109 倍、質量は 33 万倍と覚えている。ちなみに、太陽と地球の距離は 1 億 5 千万 km、光の速さで 8 分 19 秒。

Kepler の法則は 3 つあるが、最初に 2 つ発表され、後から第三法則が発表された。その間に、Napier による対数表の発表があった。Napier による対数の発見が役に立った、という説がある (2 乗と 3 乗が比例する、という関係は対数でも取らないと、なかなか気がつかない)。

## 参考文献

[1] 藤田宏, 齊藤宣一 : はじめての応用解析, 岩波書店 (2019/9/19).