第 5 章

微分方程式

5.1　微分方程式とは何か？

未知関数とその導関数を含む方程式を微分方程式 (differential equation) という.

微分方程式は微分積分学とほぼ同じくらいの長い歴史を持つ[1)]. 当初は主に物理学由来の問題（有名なものは，万有引力の働く 2 つの天体の運動に関するケプラー問題）を解くために使われたが，今では他の自然科学（化学，生物学，…），工学，医学，農学はもちろん，経済学など社会科学の分野にも広く応用されている. 特に近年コンピューター・シミュレーションが普及したため，その適用範囲はますます広がっている.

5.1.1　例

物理的イメージのわきやすい例を二つほどあげる.

自由落下

質点を自由落下させたとき，時刻 t における高さを $h(t)$ とすると，速度は $h'(t)$, 加速度は $h''(t)$ である (これは速度や加速度の定義であると考えると

---

1) 微分積分学を確立したニュートン（Sir Isaac Newton, 1642–1727, 英国）が微分方程式の創始者と考えられる.

良い).

適当な理想化のもとでは[2)]

$$h''(t) = -g \tag{1}$$

が成り立つ．ここで g は重力加速度とよばれる正の定数である (MKS 単位系で $g \fallingdotseq 9.8\mathrm{m/s^2}$ という値を持つ).

(1) を t で積分すると

$$h'(t) = \int h''(t)dt = -gt + C_1. \tag{2}$$

ここで C_1 は積分定数である．これをもう一度 t で積分すると

$$h(t) = \int h'(t)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2. \tag{3}$$

この C_2 も積分定数である．

(2) に $t = 0$ を代入することで

$$C_1 = h'(0).$$

つまり C_1 は時刻 0 における速度に他ならない．力学の習慣に従って v_0 という記号で表すことにする．

$$C_1 = h'(0) = v_0.$$

一方 (3) に $t = 0$ を代入して，

$$C_2 = h(0).$$

つまり C_2 は時刻 0 における高さである．これを h_0 という記号で表すことにすると

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0.$$

以上の計算を振り返ると，物体の高さ $h(t)$ について，

$$h''(t) = -g \tag{4}$$

[2)] まず空気抵抗が無視できるとする．また重力加速度は本当は場所により変化するがそれも無視する．

を満たすという条件から，その具体的な形

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

を見出したことになる．このように未知関数（ここでは $h(t)$）の導関数（ここでは 2 階導関数 $h''(t)$）についての方程式 (4) を微分方程式とよぶ．$h(t)$ のことをこの微分方程式の解とよぶ．ここでは積分の計算をすることで解が得られた．

（この問題を（$v_0 = 0$, $h_0 = 0$ の場合に）初めて解いたのは有名なガリレオ(Galileo Galilei[3], 1564–1642) である．彼の時代には微分積分学がまだなかったので，解決には大変な困難があった[4]．）

単振動（調和振動）

数多くの振動現象が，単振動の方程式とよばれる微分方程式

$$x''(t) = -\omega^2 x(t) \quad (\omega \text{ は正の定数})$$

に帰着される．ここで t は時刻で，$x(t)$ はある量の変位（基準からのずれ）を表す．両辺に $x'(t)$ をかけて移項すると

$$x'(t)x''(t) + \omega^2 x(t)x'(t) = 0.$$

この式の左辺が

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2\right]\right\}$$

に等しいので，

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2\right]\right\} = 0.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}\left[x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2\right] = C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

---

[3] 当時の有名なイタリア人は，姓でなく名前でよばれる習慣があったので，今でも姓でなく名前のガリレオで呼ばれることが多い．

[4] ガリレオ・ガリレイ著，今野武雄，新田節次訳，新科学対話（下），岩波文庫 33-906-4，岩波書店 (1948).

これを $dx/dt = x'(t)$ について解くと

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2C - \omega^2 x^2}.$$

両辺を $\sqrt{2C - \omega^2 x^2}$ で割って，t について積分して

$$\int \frac{1}{\sqrt{2C - \omega^2 x^2}} \frac{dx}{dt} dt = \pm \int dt = \pm t + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}).$$

この等式の左辺は置換積分の公式から

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C - \omega^2 x^2}}$$

に等しい．$\sqrt{2C}/\omega = a$ とおくと，$\sqrt{2C - \omega^2 x^2} = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$ なので，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C - \omega^2 x^2}} = \frac{1}{\omega} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}).$$

ゆえに $\dfrac{1}{\omega} \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) = \pm t + (C_1 - C_2)$. $C_3 = \pm\omega(C_1 - C_2)$（複号同順）とおくと，

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \pm(\omega t + C_3) \quad (C_3 \text{ は任意定数}).$$

これを x について解くと

$$\begin{aligned} x &= a \sin\left(\pm(\omega t + C_3)\right) = \pm a \sin(\omega t + C_3) \\ &= C_4 \sin(\omega t + C_3) \quad (\text{ただし } C_4 := \pm a). \end{aligned} \tag{5}$$

ここで C_3, C_4 は（微分方程式だけからは定まらない）任意の定数であり，上の例と同様に初期条件等の条件から決定される．この (5) から，x は t の周期関数で，その周期は $T = 2\pi/\omega$ であることが分かる．後でこの方程式のより見通しが良く，一般性の高い解き方を学ぶ（151 ページ）．　□

5.1.2　基本的な用語

微分方程式についての基本的な用語を紹介しておこう．

分類

独立変数が 1 個の微分方程式を常微分方程式(**ordinary differential equation**)，独立変数が 2 個以上ある微分方程式を偏微分方程式(**partial differential equation**) という．以下，このテキストでは常微分方程式のみを扱うことにする（単に微分方程式とよんだら常微分方程式のことを指すとする）.

未知関数も 1 個だけの場合（単独方程式とよばれる）を主に考えるが，これを一般化することはそれほど難しくない.

微分方程式に含まれる最高階の導関数の階数をその微分方程式の階数 (**order**) という.

例 **5.1**　自由落下の方程式 $y'' = -g$ は 2 階の常微分方程式である.

前項の 2 つの例では，時刻を t, 高さを h, 初速度を v_0 のように，量を表すのに問題の意味に由来する文字を採用したが，以下の説明では，特に断りがない限り，独立変数を x で，未知関数を y で表す．当然導関数 y', y'', ..., $y^{(n)}$, ... は，それぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, ..., $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, ... を意味する.

n 階の単独常微分方程式は，一般に

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (F \text{ は既知の関数})$$

と表すことができる.

最高階の導関数について解かれたもの，つまり

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (G \text{ は既知の関数})$$

いう形をしている微分方程式を正規形の微分方程式という．本書では正規形の微分方程式のみ扱う.

解

微分方程式を満たす関数をその微分方程式の解 (solution) といい，解を求めることを微分方程式を解く (solve) という.

きちんと定式化して証明を与えるのは容易なことではないので細かいことは省略するが，次の 2 点を指摘しておく．

(A) 微分方程式はたとえ解があっても，それを具体的な式で表せるとは限らない（「解があっても解けない」ことがある）．

(B) 微分方程式の解は普通は無数に存在する[5]．

(A) については，例えばもっとも簡単な形の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

において，解を $y = \displaystyle\int f(x)\,dx$ のように不定積分を用いて表せても，これ以上簡単にできない場合があることから[6]，難しさを想像できるであろう．実はより一般の微分方程式では，不定積分を使っても解が表せない場合がある（歴史的には三体問題[7]の研究などからその困難さが明らかになった）．この問題への対処として，解を表現できるような新しい関数を導入するという手段があり，一定の効果はあるが，そのやり方にも限界がある．微分方程式を解かないで，まず解の存在を確認してから，直接解の性質を調べたりする方法が発達している．本書では，具体的な式変形で解が求まる（なおかつ他への応用が効く基本的な）場合のみを考察する．

(B) については，つぎの簡単な例を見ることで納得できるであろう．

例 **5.2** 例えば，$y' = 1$ の解は

$$y = x + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

であり，$y'' = 0$ の解は

$$y = C_1 x + C_2 \quad (C_1,\, C_2 \text{ は任意の定数})$$

[5] 解を 1 つ選ぶためには，後述する初期値問題のように微分方程式以外に何か適当な条件を付加する必要がある．

[6] たとえば $\sqrt{x^4+1}$ や $\exp(-x^2)$ の原始関数は，（積分記号を用いずに）第 2 章までで学んだ関数だけでは表せない（いわゆる初等関数ではない）ことが分かっている．

[7] 太陽，地球，月のように，万有引力に従う 3 つの天体からなる系の運動を明らかにせよ，という問題．二体問題が鮮やかに解けた（予想通り Kepler の法則に従う運動が解となる）のに対して，三体問題は多くの研究者の挑戦にも関わらず長い間解決できず，ついに否定的に解決された（解を具体的に表すことが不可能であることが証明できた）．

である．(C や C_1, C_2 を変えると別の解が得られるのだから）ともに解は無限個存在するわけである． □

多くの場合，値を自由に選ぶことのできる文字（任意定数，あるいはパラメーターとよばれる）を用いて，解の「大部分」をひとまとめに式で表すことができる．そのとき，そのような形で表された解を一般解という[8]．多くの場合，一般解は方程式の階数と同じ個数の独立な任意定数を含む．上の例で $y = x + C$ や $y = C_1x + C_2$ は一般解であり，任意定数の個数はそれぞれ $1, 2$ で，確かに方程式の階数に一致している．これに対して，個々の解のことを特解（または特殊解）という．

一般解としてまとめることのできない仲間外れの解も，ときとして存在する．このような解は特異解とよばれる．この章の内容の大部分をしめる線形微分方程式（定義は後述）では特異解は現れず，一般解はすべての解を表す．

初期値問題

微分方程式に,（解を一つに限定するような）解の満たすべき条件がいくつか加わっている問題を考えることが多い．本書では，変数の一つの特定の値で，解の 0 階から $n-1$ 階までの微分係数の値を指定する条件（初期条件）を加えた初期値問題を扱う．

例 **5.3** 「微分方程式

$$h''(t) = -g$$

の解で

$$h(0) = h_0, \quad h'(0) = v_0 \tag{6}$$

を満たすものを求めよ」という問題は初期値問題であり，(6) が初期条件である． □

[8]「大部分」という言葉があることから，これは数学的な定義とは言いかねるものである．しかし厳密に定義できる言葉しか使わないことにすると，窮屈で説明がしづらくなるので，ここでは慣習に従うことにした．

一般化すると，n 階の微分方程式

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{7}$$

に

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(i)}(x_0) = y_i,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_{n-1} \tag{8}$$

という形の条件（ここで $x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ は与えられた定数である）を加えて，(7), (8) を満たす y を求めよ，という問題を初期値問題とよび，(8) を初期条件という．

n 階常微分方程式の初期値問題 (7), (8) では解が一つに決定されることが多い．

解曲線

図形的イメージも大切である．1 階正規形常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

の解を，横軸 x, 縦軸 y の座標平面上に描いたとき，微分方程式は，解のグラフの傾きが $f(x, y)$ で与えられること，初期条件は解のグラフが点 (x_0, y_0) を通ることを意味する．解のグラフのことを解曲線あるいは積分曲線とよぶ (例として、後述の図 5.1(131 ページ) を見よ)．

問題

1. つぎの微分方程式の階数を示し，可能なものについては，正規形に直せ．
(1) $x^2y'' + yy' = 3x$ (2) $y'^2 - y^2 - \log(1 + x^2) = 0$ (3) $yy''' = y''^2$
(4) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ (5) $3y^{(4)} - 2y^{(3)} + y + e^x = 0$
(6) $x^2y''' + xy'' + (x^2 - 1)y' = 0$ (7) $y''^2 = k(1 + y'^2)$, k は正の定数．
(8) $(x^2y')' + 4x^2y = 0$

2.　左側の関数 y が，適当な範囲で，右側の微分方程式をみたすことを確かめよ（a, b, c, d などは定数）.

(1)　$y = a + bx + cx^2 + dx^3$,　　$y^{(4)} = 0$

(2)　$y = x(a - \cos x)$,　　$xy' - y = x^2 \sin x$

(3)　$y = a^{-1} \cosh ax + b$,　　$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}$

(4)　$y = ax + f(a)$(f はある関数),　　$f(y') + xy' = y$

(5)　$xy - \log y = a$,　　$y' = y^2/(1 - xy)$

(6)　$x^2 + a^2y^2 = b^2$,　　$y'/y + y''/y' = 1/x$

(7)　$y = \begin{cases} \sqrt{x+b} & (0 < x \leq a) \\ \sqrt{a+b} & (a < x) \end{cases}$,　　$y' = \dfrac{f(x)}{y}$

ただし $f(x) = \begin{cases} 1/2 & (0 < x \leq a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$

3.　つぎの形の一般解をもつ微分方程式を求めよ（C, C_1, C_2, C_3 などは任意定数）.

(1) $y = C$　(2) $y = Cx$　(3) $y = Cx^2+1$　(4) $y = x+Cx^2$　(5) $y = Cx+C$

(6) $y = Cx + Cx^2$　(7) $y = Cx^2 + C^2$　(8) $y = Ce^x$　(9) $y = \sin(x + C)$

(10) $x^2 + y^2 = C$　(11) $y = (x + C)^3$　(12) $y = C_1 + C_2x$

(13) $y = C_1x + C_2x^2$　(14) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$　(15) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

(16) $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}$　(17) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

(18) $y = C_1(x + C_2)^2$

4.　$\dfrac{d}{dx}f(x) = 0$ ならば $f(x) = C$（C は任意定数）であることを用いて，つぎの微分方程式の一般解を求めよ（a, b などは定数である）.

(1) $xy' + y - 1 = 0$　(2) $xy'' + y' - x = 0$　(3) $x + a^2yy' = 0$

(4) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$　(5) $(x + y)(1 + y') = x$　(6) $y' = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sec y}{1 + x^2}$

(7) $\dfrac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm 1$　(8) $\dfrac{y'}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm 1$　(9) $y'(y'' + y) = 0$

(10) $xy' - y = x^2f(x)$（$f(x)$ は与えられた関数）

5.2　変数分離形微分方程式

1 階正規形の微分方程式

$$y' = F(x, y)$$

のうちで，右辺が x だけの関数と y だけの関数の積になっている

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

の形をした微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ．このタイプの方程式は以下に紹介する手順で解を求めることができる（解けない微分方程式が多い中で，非常にありがたいケースであり，出会ったら逃さずに解くべき問題である）．

5.2.1　解き方

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2}$$

において，$g(y)$ が決して 0 にならないと仮定すると

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x).$$

これを x で積分すると

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx.$$

左辺は置換積分の公式で y についての積分に直せる．

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx. \tag{3}$$

(2) から (3) への変形は次のように形式的に書いて構わない．

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

注意 5.4 応用上は $g(y)$ が 0 になることも多い．その場合も上の手順で解が発見できることが多いが，もれてしまう解もあり，分母が 0 となる場合は吟味が必要である． q.e.d.

注意 5.5 なお，ここでは不定積分を使ったが，もちろん定積分で記述することもできる．

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} \, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx \quad \text{より} \quad \int_{y(x_0)}^{y(x_1)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx.$$

初期値問題を解く場合などは，こちらの方が便利なことがしばしばある．
q.e.d.

(3) で積分を実行して

$$G(y) = F(x) + C$$
$$(G(y),\ F(x) \text{ はそれぞれ } \frac{1}{g(y)},\ f(x) \text{ の原始関数，} C \text{ は積分定数}).$$

これを y について解くと

$$y = G^{-1}(F(x) + C) \quad (G^{-1} \text{ は } G \text{ の逆関数}).$$

こうして解が得られる． □

5.2.2 例

例 5.6 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$ を解け．

(解) $\displaystyle\int y^2 \, dy = \int x^2 \, dx$ より $\dfrac{y^3}{3} = \dfrac{x^3}{3} + C$（$C$ は積分定数）となり，

$$y^3 = x^3 + C' \quad (C' \text{ は積分定数}).$$

これを y について解いて $y = \left(x^3 + C'\right)^{1/3}$． □

例 5.7 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = -\left(x + x^3\right) e^y$ を解け．

(解) $\displaystyle\int e^{-y}dy = -\int (x+x^3)dx$ の積分を実行して

$$-e^{-y} = -\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+C\right) \quad (C \text{ は積分定数}).$$

指数関数と対数関数の関係[9]を用いて $-y$ について解くと

$$-y = \log\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+C\right), \quad \text{すなわち} \quad y = -\log\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+C\right). \ \square$$

例 **5.8** 微分方程式

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = 2y$$

を解け.

(解) $\dfrac{dy}{y} = 2\,dx$ より,

$$(5) \qquad \int \frac{dy}{y} = \int 2\,dx.$$

ゆえに

$$\log|y| = 2x + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}).$$

対数関数と指数関数の関係から

$$|y| = e^{2x+C_1} = e^{C_1}e^{2x}, \quad \text{ゆえに} \quad y = \pm e^{C_1}e^{2x}.$$

$\pm e^{C_1}$ は 0 以外の値を取りうる任意定数である．これを C とおくと,

$$y = Ce^{2x} \quad (C \text{ は } 0 \text{ 以外の値を取る任意定数}).$$

ところで，(5) を導く変形は $y \neq 0$ でなければ正当化されない．そう考えて，式 (4) を眺めていると

$$y = 0 \quad (\text{恒等的に } 0)$$

---

[9] $e^x = y \iff x = \log y$.

という解を発見することができる．これは $y = Ce^{2x}$ で $C = 0$ とおいたものと考えられる．つまり

$$y = Ce^{2x} \quad (C \text{ は任意定数}) \tag{6}$$

という一般解が得られる．実はこれ以外には解は存在しない．実際，y を微分方程式 (4) の任意の解とするとき，$y' - 2y = 0$ であるから

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{-2x}\right) = y' \cdot e^{-2x} + y \cdot (-2)e^{-2x} = e^{-2x}(y' - 2y) = e^{-2x} \cdot 0 = 0$$

が成り立つので，適当な定数 C が存在して

$$ye^{-2x} = C.$$

これから

$$y = Ce^{2x}.$$

例えば初期条件

$$y(0) = y_0$$

をつけると，

$$y_0 = y(0) = Ce^{2\cdot 0} = Ce^0 = C.$$

ゆえに

$$y = y_0e^{2x}. \ \square$$

注意 **5.9**　しばしば (6) を導くまでの議論で，$y \neq 0$ のときと $y = 0$ のときで場合分けして考えたのだから，それだけで十分である（他に解はあるはずがない）と考える人がいるが，それは誤解である．y は単なる数でなく，関数なので，$y = 0$ と $y \neq 0$ の二つの場合に場合分けするというのは穴がある．y を分母にして計算し続けるということは，y が決して 0 にならないことを仮定しているわけだが，一方で,「$y = 0$ も解」というときの $y = 0$ は，y が恒等的に 0 に等しい（定数関数 0）ということを意味している．実はそれ以外に，y は x の値によっては 0 になったり，0 でなかったりする，という第三の場合がありうるので，場合分けとしては（もれがあって）不完全である．具体例については，例 5.53（184 ページ）を見よ．　$\square$

上の例 5.8 は重要なので，一般化してまとめておく．

定理 **5.10** a を定数とするとき，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = ay \tag{7}$$

の任意の解は

$$y = Ce^{ax} \quad (C \text{ は任意定数}) \tag{8}$$

で与えられる（微分方程式 (7) の任意の解は適当な定数 C を用いて (8) で表せ，また任意の定数 C に対して式 (8) で定めた y は微分方程式 (7) の解になる）．初期条件

$$y(0) = y_0$$

を与えると

$$y = y_0 e^{ax}.\square$$

このタイプの微分方程式 (7) は，良い環境下での生物の増殖（人口問題で言うとマルサスの法則）や，放射性元素の崩壊など，様々なところで現われる．

例 **5.11**（ロジスティック方程式） オランダの数学者ヴェルハルスト (P. F. Verhulst, 1804–1849) の提唱したロジスティック方程式 (**logistic equation**) とは

$$\frac{dy}{dx} = (a - by)y \quad (a,\, b \text{ は正定数}) \tag{9}$$

の形の方程式である[10]．

人口の時間変化モデルとして，マルサスの法則

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

[10] 本によっては $y' = a(1 - by)y$ としてある．もちろん本質的には同じものであるが，結果を比較するときには注意が必要である．

があったが[11)]，現実には，人口密度が大きくなると，環境が悪くなって出生率が低下するため，このモデルからのずれが大きくなる．y が大きくなったときに出生率が低下するという効果を考慮にいれたものが，(9) である[12)]．

変数分離形なので，以下に示すようにして解くことができる．

$$\int \frac{dy}{(a-by)y} = \int dx$$

であるが，部分分数分解

$$\frac{1}{(a-by)y} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-a/b}\right)$$

より

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-a/b}\right) dy = a\int dx.$$

積分を実行して

$$\log\left|\frac{y}{y-a/b}\right| = ax + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

これから

$$\frac{y}{y-a/b} = C'e^{ax} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

分母を払って $y = C'e^{ax}(y-a/b)$．これを y について解くと

$$y = \frac{a}{b}\frac{C'e^{ax}}{C'e^{ax}-1}$$

という一般解が得られる[13)]．$x=0$ のとき $y=y_0$ となる解を求めよう．上式に代入して C' を求めると

$$C' = \frac{y_0}{y_0 - a/b}.$$

11) マルサス (T. R. Malthus, 1766–1834) は英国の経済学者で，1798 年に『人口の原理』を著わし，人口は幾何級数的（＝等比数列的＝指数関数的）に増加するが，生存手段は算術級数的（＝等差数列的＝ 1 次関数的）にしか増加しないと論じた．

12) 一松信『微分積分学入門第二課』近代科学社 (1990) によると，「（ロジスティック方程式は）最初人口論に現れた．その後新製品の売り上げ，新分野の論文数，学習など，最初は急激に増加するが，やがて飽和に達して頭打ちになる現象によくあてはまることが知られた．その種の観測データから，定数 a（初期増加率），b（飽和値）を求めて，それによって製品や分野の評価をしようという試みもされている．」

13) 細かい注意であるが，これは $y \equiv a/b$ という解を表せない．

これから

$$y = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)e^{-ax}}.$$

この式から解の性質を読み取ってみよう．$0 \le y_0 \le a/b$ の場合，解は $-\infty < x < \infty$ で存在する．$y_0 < 0$ の場合，解は $x < -\dfrac{1}{a}\log\dfrac{by_0}{a - by_0}$ で存在する．$y_0 > a/b$ の場合，解は $x > -\dfrac{1}{a}\log\dfrac{by_0}{a - by_0}$ で存在する．$y_0 = 0$ のとき $y \equiv 0$,$y_0 = a/b$ のとき $y \equiv a/b$ である．$0 < y_0$ の場合 $\lim_{x\to\infty} y = a/b$ が成り立つ．□

簡単のため $a = b = 1$ の場合に解曲線を描いてみよう．

$$\frac{dy}{dx} = (1 - y)y, \quad y(0) = y_0$$

の解は

$$y = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-x}}.$$

横軸を独立変数 x, 縦軸を関数（従属変数）y として解のグラフ（解曲線）を描いてみたものが図 5.1 である．

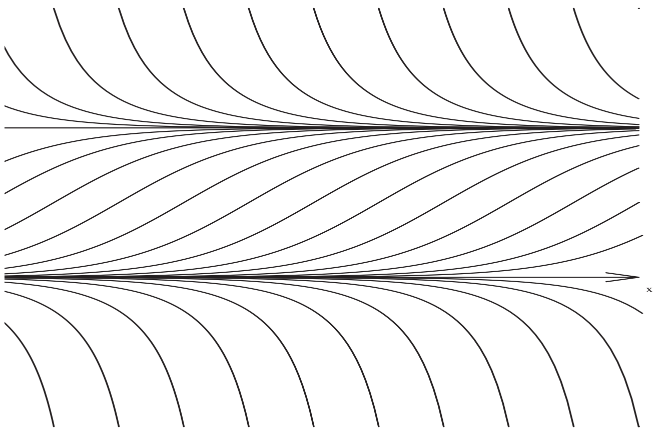


図 5.1: ロジスティック方程式の解曲線

問題

1.　次の微分方程式を解け.

(1) $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$　(2) $y' = y^2/x$　(3) $y' = \dfrac{y^2-1}{2x}$　(4) $x^3y' + y^2 = 0$

(5) $y' = 3y^{2/3}$　(6) $y' = \sqrt{y-1}$　(7) $x^2y' + y^2 = 0$　(8) $y^3 + x^6y' = 0$

(9) $y - xy' = x^2y'$　(10) $y' + ay^2 = 0$　(11) $\sin x \sin^2 y - y' \cos x = 0$

(12) $(1+x)y + (1-y)xy' = 0$　(13) $y' \tan x = \cot y$

(14) $(1+x^3)y' + x^2y^2 = 0$　(15) $y' = a(b^2 - y^2)$　(16) $y' = \dfrac{\cos^2 y}{1+x^2}$

(17) $y' = \dfrac{1+\sin x}{\sec^2 y}$　(18) $y' = \dfrac{xy}{x^2-1}$　(19) $x(1+y^2)y' = y(1+x^2)$

(20) $yy' = x(y+1)$　(21) $xy' - y^2 + 1 = 0$　(22) $y' = e^{2(x+y)}$

(23) $y' = e^{-(x+y)}$　(24) $y' = |y|$　(25) $y' = \dfrac{x}{y}$　(26) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$

(27) $y' = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$　(28) $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$　(29) $y' = \dfrac{y^2}{x^3}$　(30) $y' = \dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$

2.　次の変数分離形の微分方程式を解け.

(1) $(4x + 2xy^2)dx - (x^2y + y)dy = 0$　(2) $2y\,dx + e^{-2x}\,dy = 0$

(3) $(y^2+1)dx - x\,dy = 0$　(4) $\sin^2 y\,dx + \cos^2 x\,dy = 0$

(5) $4y\,dx + x^3(2+y^2)dy = 0$　(6) $y\cos x\,dx + \sin x\,dy = 0$

(7) $4x(y^2+1)dx - y(x^2+2)dy = 0$　(8) $e^x\,dx - e^y\,dy = 0$

(9) $\left(y + \dfrac{1}{y}\right)dx = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)dy$

注:　例えば $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ は $f(x,y) + g(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ という意味に解釈せよ.

5.3　1 階線形微分方程式，定数変化法

1 階正規形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

において，$F(x,y)$ が y の 1 次式 $a(x)y+b(x)$ である場合，すなわち

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{1}$$

を **1 階線形微分方程式**とよぶ[14)]．これも以下に示すように具体的な式計算で解を求めることができる．

特に $b(x)$ が恒等的に 0 である場合，すなわち

$$y' = a(x)y \tag{2}$$

を同次方程式とよび[15)]，そうない場合を非同次方程式という．

例 **5.12**（線形でない方程式）　$y' = a(x)y^2$ や $y' = a(x)\sin y$ などは線形でない微分方程式である． □

5.3.1　同次方程式の解法

実は同次方程式 (2) は変数分離形であるから前節で説明した方法で解くことができる．重複になってしまうが書いておく．

$$\frac{dy}{y} = a(x)\,dx \quad より \quad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx.$$

$a(x)$ の原始関数の一つを $A(x)$ とすると，

$$\log|y| = A(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

これから $|y| = e^{A(x)+C} = e^C e^{A(x)}$ となるので

$$y = \pm e^C e^{A(x)}.$$

$\pm e^C$ は任意定数なので C' とおいて，

$$y = C' e^{A(x)}.$$

しかし以上の議論は既におなじみの「分母 $=0$」の問題があるので，すぐ後で証明し直す．

[14)] $L[y] = y' - a(x)y$ とおくとき，微分方程式 (1) は $L[y] = b(x)$ と書け，L は次の意味で線形作用素となるからである: $L[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]$,$L[ky] = kL[y]$（ここで y, y_1, y_2 は関数，k は定数）．

[15)] 斉次方程式ということもある．

定理 **5.13**（**1** 階線形同次微分方程式）

$$y' = a(x)y \tag{3}$$

の一般解は，$A(x)$ を $a(x)$ の一つの原始関数 $(A'(x) = a(x))$ として，

$$y = Ce^{A(x)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である．□

補足　特に初期条件

$$y(0) = y_0 \tag{4}$$

をつけた初期値問題の解は

$$y = y_0 e^{A(x)}, \quad A(x) = \int_0^x a(t)\,dt. \tag{5}$$

注意 **5.14**　(5) はもちろん一つの式で書ける．その場合は e の右肩が重くなるので，印刷の都合上つぎのように表されることが多い:

$$y = y_0 \exp\left(\int_0^x a(t)\,dt\right).$$

定理の証明　$A(x)$ を $a(x)$ の原始関数の一つとするとき，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(ye^{-A(x)}) &= y' \cdot e^{-A(x)} + y \cdot e^{-A(x)}(-A'(x)) = e^{-A(x)}\left(y' - A'(x)y\right)\\ &= e^{-A(x)}\left(y' - a(x)y\right).\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}y' = a(x)y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(ye^{-A(x)}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ye^{-A(x)} = C \quad (C \text{ はある定数})\\ &\Leftrightarrow \quad y = Ce^{A(x)} \quad (C \text{ はある定数}).\ \square\end{aligned}$$

初期条件 $y(0)=y_0$ を満たす解を求めるため，$x=0$,$y=y_0$ を代入すると $y_0=Ce^{A(0)}$ となるので，$C=y_0e^{-A(0)}$．ゆえに

$$y=y_0e^{A(x)-A(0)}.$$

$a(x)$ の原始関数 $A(x)$ を $A(0)=0$ となるように定めると式が簡単になって便利である．それには

$$A(x)=\int_0^x a(t)\,dt$$

とおけばよい．つまり初期値問題 (3), (4) の解は

$$y=y_0e^{A(x)},\quad A(x)=\int_0^x a(t)\,dt$$

と書ける．

問　初期条件を 0 でない時刻 x_0 で課す，つまり条件

$$y(x_0)=y_0$$

を満たす y を求めよ，という問題が生じることもある．この場合に解はどう表されるか？

5.3.2　非同次方程式の解法

次に非同次方程式 (1) $y'=a(x)y+b(x)$ を考える．これは変数分離形ではないことに注意しよう．この解を得るために定数変化法(**variation of parameter**, variation of constants) とよばれる方法を用いよう（これは線形同次微分方程式の一般解が得られているときに，線形非同次微分方程式を解くために使える一般的な方法であり，この後にもその変種が登場する）．

同次方程式 (2) の一般解は

$$y=Ce^{A(x)}\quad（C\text{ は任意定数，}A(x)\text{ は }a(x)\text{ の原始関数の任意の一つ}）$$

であったが，(1) の一般解を

$$y=C(x)e^{A(x)} \tag{6}$$

の形で探してみよう．積の微分法より

$$y' = C'(x) \cdot e^{A(x)} + C(x) \cdot e^{A(x)} A'(x) = e^{A(x)} \left(C'(x) + C(x)a(x) \right).$$

これと (6) を (1) に代入すると

$$e^{A(x)} \left(C'(x) + C(x)a(x) \right) = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x).$$

これから $e^{A(x)}C'(x) = b(x)$ となるので

$$C'(x) = e^{-A(x)}b(x).$$

これを積分して $C(x)$ が求まる:

$$C(x) = C(0) + \int_0^x C'(t)\,dt = C(0) + \int_0^x e^{-A(t)}b(t)\,dt.$$

この $C(x)$ を (6) に代入して

$$\begin{aligned} y = C(x)e^{A(x)} &= \left(C(0) + \int_0^x e^{-A(t)}b(t)\,dt \right) e^{A(x)} \\ &= C(0)e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_0^x e^{-A(t)}b(t)\,dt. \end{aligned}$$

初期条件 $y(0) = y_0$ を満足する解を簡単な形で求めるため，$A(x)$ として

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt$$

を採用する．$x = 0$, $y = y_0$ を代入すると

$$y_0 = C(0)e^{A(0)} + e^{A(0)} \cdot 0 = C(0)e^0 + 0 = C(0).$$

$C(0) = y_0$ を代入すれば解の公式が得られる．以上をまとめておこう．

定理 **5.15**（**1** 階線形非同次微分方程式）

$$y' = a(x)y + b(x)$$

の一般解は $A(x)$ を $a(x)$ の原始関数の一つとして，

$$y = e^{A(x)} \left(\int_0^x e^{-A(t)}b(t)\,dt + C \right) \quad (C\text{ は任意定数})$$

で与えられる． □

補足　特に初期条件

$$y(0) = y_0$$

を課した初期値問題の解は

$$y = e^{A(x)} \left(\int_0^x e^{-A(t)} b(t)\, dt + y_0 \right), \quad A(x) = \int_0^x a(t)\, dt.$$

例 5.16（定数係数 **1** 階常微分方程式）　$a(x)$ が定数 a の場合の初期値問題，つまり

$$y' = ay + b(x), \tag{7}$$

$$y(0) = y_0 \tag{8}$$

を考えよう．もちろん上で導いた式に $a(x) \equiv a$（定数）を代入すれば解けるわけだが，こういうものは結果の式を暗記するものではなく，計算手順を覚えるべきものであるので，もう一度解いてみよう．まず $b(x)$ のない

$$y' = ay$$

を解く．これは

$$y = Ce^{ax} \quad (C \text{ は任意定数})$$

が一般解である．そこで

$$y = C(x)e^{ax}$$

とおいてみる．積の微分法によって

$$y' = C'(x) \cdot e^{ax} + C(x) \cdot e^{ax} a = e^{ax}(C'(x) + aC(x)).$$

これを微分方程式 (7) に代入すると

$$e^{ax}(C'(x) + aC(x)) = a\,(C(x)e^{ax}) + b(x).$$

これから $e^{ax}C'(x) = b(x)$ が得られるので，両辺に $\dfrac{1}{e^{ax}} = e^{-ax}$ をかけると

$$C'(x) = e^{-ax} b(x).$$

積分して

$$C(x) = C(0) + \int_0^x e^{-at} b(t)\,dt.$$

ゆえに

$$y = \left(C(0) + \int_0^x e^{-at} b(t)\,dt \right) e^{ax} = C(0)e^{ax} + e^{ax} \int_0^x e^{-at} b(t)\,dt.$$

$x = 0$ のとき $y = y_0$ であるから,

$$y_0 = C(0).$$

つまり

(9) $$y = e^{ax} \left(y_0 + \int_0^x e^{-at} b(t)\,dt \right). \square$$

問題

1. 次の微分方程式を解け（a, b, c, d は定数とする）.

(1) $y' + ay = 0$ (2) $y' + ay = b$ (3) $y' + y \cot x = \operatorname{cosec} x$ $(0 < x < \pi/2)$

(4) $y' + 2xy = x$ (5) $y' - y \tan x = \sin x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$

(6) $y' - 2xy = e^{x^2}$ (7) $y' + y \cos x = \sin 2x$ (8) $xy' + y = x \log x$ $(x > 0)$

(9) $y' + ay = e^{bx}$ (10) $y' + \dfrac{a}{x} y = 0$ (11) $y' - xy = x$

(12) $y' + \dfrac{1}{x} y = 1 - x^2$ $(x > 0)$ (13) $xy' + y = 4x(1 + x^2)$

(14) $xy' - (y + x^2 \sin^2 x) = 0$ (15) $y' + y \cos x = -\sin x e^{-\sin x}$

(16) $x(1 - x^2)y' + (x^2 - 1)y = x^3$ $(0 < x < 1)$ (17) $y' - ay = \sin x$

(18) $(1 + x^2)y' = xy + \sqrt{1 + x^2}$ (19) $y' + (1 + x^2)y = e^{-x^3/3}$

(20) $y' + ay = bx^2 + cx + d$ (21) $xy' + (1 + x)y = e^x$

2. 次の初期値問題を解け.

(1) $y' + y = 1, \quad y(0) = 0$ (2) $y' = x - y, \quad y(0) = 0$

(3) $y' + \dfrac{a}{x} y = 0, \quad y(1) = b$ (4) $y' - ay = \sin x, \quad y(0) = 0$

(5) $y' + xy = 0, \quad y(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (6) $y' + y \tan x = 0, \quad y(0) = 2$

3.　つぎの条件をみたす連続関数 $y(x)$ を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x y(t)\,dt = y(x)+1$　(2) $\displaystyle\int_0^x ty(t)\,dt = y(x)+1$

(3) $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{t^2+1}y(t)\,dt = \frac{1}{2}x^2 - y(x)$

5.4　変数分離形，1 階線形に帰着できるもの

変数変換[16)]をすることで，既に見た微分方程式（変数分離形方程式や 1 階線形方程式）に帰着して解くことの出来る問題がある．

5.4.1　同次形方程式

$f(x)$ を与えられた連続関数として

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形に表せる微分方程式を同次形方程式という．名前の由来は右辺で x と y が同じ次数で現れることによる．

この場合 $x \neq 0$ の範囲で考えることにして，次のように変数変換すれば変数分離形方程式に帰着する．

$u = \dfrac{y}{x}$ すなわち $y = xu$ とおいて新しい未知関数 $u = u(x)$ を導入すると，

$$y' = (xu)' = u + xu' \quad より \quad u + xu' = f(u) \qquad すなわち \quad u' = \frac{f(u)-u}{x}$$

となり変数分離形である．この解は $u \equiv a$ （ただし a は $f(a) - a = 0$ をみたす数）および

$$Cx = \exp\left(\int \frac{du}{f(u)-u}\right)$$

から得られるものである（$\exp(t)$ は指数関数 e^t のことを表す）．これに $u = \dfrac{y}{x}$ を代入すればすべての解 y が得られる．

例 **5.17**　$y' = \dfrac{y^2+2xy}{x^2}$ を考える．これは同次形である．$f(u) = u^2 + 2u$ であるから $a^2 + a = a(a+1) = 0$ より定数解は $u \equiv 0$ または $u \equiv -1$．これよ

[16)] ただし独立変数だけでなく，従属変数（関数）の変換も考える．

り $y \equiv 0$, $y = -x$ が解として得られる．また

$$Cx = \exp\left(\int \frac{du}{u^2+u}\right) = \frac{u}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1}$$

から $y = \dfrac{Cx^2}{1-Cx}$（C は任意定数）も解であり，これらがすべてとなる． □

5.4.2 ベルヌーイ (Bernoulli) の方程式

n を整数，$p(x)$, $q(x)$ を与えられた連続関数として

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

の形に表せる微分方程式をベルヌーイの方程式とよぶ．$n = 0$ ならば 1 階線形，また $n = 1$ ならば 1 階同次線形なので $n \neq 0, 1$ とする．このとき $y^{1-n} = u$ とおけば $u' = (1-n)y^{-n}y'$ より

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

となり，u について 1 階線形方程式である．

5.4.3 リッカチ (Riccati) の方程式

$p_0(x)$,$p_1(x)$,$p_2(x)$ を与えられた連続関数として

$$y' = p_0(x)y^2 + p_1(x)y + p_2(x)$$

の形の微分方程式をリッカチの方程式とよぶ．この方程式の解 y_1 が一つ求まっている場合には，$y = y_1 + \dfrac{1}{u}$ とおけば，u についての 1 階線形方程式

$$u' + (2p_0(x)y_1 + p_1(x))u = -p_0(x)$$

が得られる．

5.4.4 その他

(a) a, b, c を定数かつ $b \neq 0$ として

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式を考える．$u = ax + by + c$ とおけば $u' = bf(u) + a$ となり変数分離形である．

(b) a, b, c, a', b', c' を定数として

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

の形の方程式を考える．$ab' - a'b \neq 0$ の場合には連立 1 次方程式 $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ の（唯一つの）解を (x_0, y_0) として変換 $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$ を行えば

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)$$

となり同次形である．また $ab' - a'b = 0$ の場合には (a) の形になる．

問題

1. 次の同次形微分方程式を解け．
   (1) $y' = 1 + \dfrac{2x}{y}$ (2) $y' = 2 - \dfrac{y}{x}$ (3) $y' = \dfrac{1}{4} + \dfrac{y^2}{x^2}$
   (4) $2(y - x)y' - x - 2y = 0$ (5) $(2x - 3y)y' = x - 2y$
   (6) $xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(x > 0)$ (7) $x^2 y' = 2(x - y)^2$
   (8) $xy^2 y' = x^3 + y^3$ (9) $xy' = y + x\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$
   (10) $y' = \mathrm{cosec}\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}$ (11) $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$
   (12) $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - 2xy - y^2}$ (13) $y' = \dfrac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$
2. 次のベルヌーイの微分方程式を解け．
   (1) $(1 + x^2)y' + 4xy = 8x\sqrt{y}$ (2) $(1 + x^2)y' - 2xy + xy^2\cos x = 0$

(3) $y' + 2xy = 2xy^3$ (4) $y' + xy = e^{x^2}y^3$ (5) $y' + y^3e^{-x^2} - xy = 0$
(6) $xy' + 2y = 2xy^{4/3}$ (7) $xy' + 2y = \sqrt{y}\log x$
(8) $x^2y' - 2xy = y^2\cos x$ (9) $(x-1)y' + 2y = \sqrt{(x^2-1)y}$ $(x > 1)$

3. 次のリッカチの微分方程式を解け．
(1) $y' = xy^2 - (2x-1)y + x - 1$ (2) $y' = y^2 + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)y - \dfrac{2}{x} - 2$
(3) $y' = y^2 - 3xy + 2x^2 + 1$ (4) $y' = y^2 - 4xy + 4$
(5) $y' = y^2 - 2x^2y + x^4 + 2x$ (6) $y' = y^2 + \dfrac{y}{2x} - x$
(7) $y' = y^2 + 3y + 2$ (8) $y' = y^2 - 2y + 1$

4. 次の微分方程式を解け．
(1) $y' = (x-y)^2$ (2) $y' = \cos(x+y)$ (3) $y' = \sec(x+y) - 1$
(4) $(x+y+1)y' = 1$ (5) $(x+y+2)y' = x+y$
(6) $\sqrt{x+y+1}\,y' = \sqrt{x+y-1}$

5. 次の微分方程式を解け．
(1) $(x-2y-1)y' = 2x - 3y + 3$ (2) $(x-y)y' = x+y+1$

5.5 定数係数 2 階線形常微分方程式 (1) 同次方程式の解法

5.5.1 定義と例

定数 p,q と，区間 I 上で定義された関数 f が与えられたとき，

(1)
$$y'' + py' + qy = f(x)$$

を定数係数 2 階線形常微分方程式とよぶ．特に $f(x) \equiv 0$ の場合の

(2)
$$y'' + py' + qy = 0$$

を同次方程式，一般の場合の (1) を非同次方程式という．

このタイプの方程式は応用上頻出し，非常に重要である．特に，釣り合いの位置の近傍での微小な振動を表す方程式はこの形になることが多い．

例えば，滑らかで水平な床の上においたフックの法則に従うバネでつながれた重りの運動を記述する運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (m \text{ は重りの質量，} k \text{ はバネ定数})$$

は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

と書けるので (2) に該当する．

また速度に比例する抵抗が存在する場合の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad (\gamma \text{ は正定数})$$

も

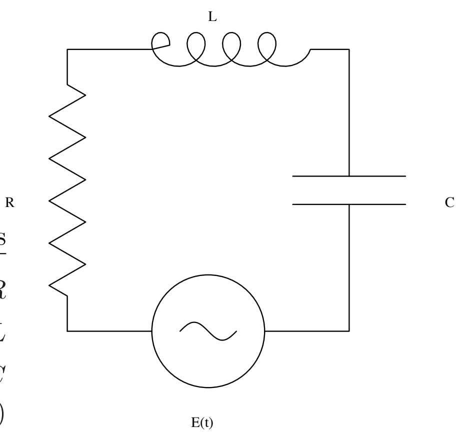
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

と書けるのでやはり (2) に該当する．

次の図のように発電器 $E(t)$, 抵抗 R, コイル（インダクタンス L），コンデンサー（コンダクタンス C）を直列につないだ電気回路を流れる電流 $I(t)$ は，微分方程式

$$RI(t) + L\frac{dI}{dt}(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(s)\,ds = E(t)$$

を満たす．



PSfrag replacements

R

L

C

$E(t)$

変形すると

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=\frac{E'(t)}{L}$$

となり，(1) に該当することが分かる．

この節では，同次方程式 (2) の代表的な解法である「特性根の方法」を説明する．

5.5.2 特性方程式，特性根

微分方程式 $y''+py'+qy=0$ に対して，2 次方程式

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

を微分方程式の特性方程式 (**characteristic equation**)，特性方程式の根[17)]を特性根 (**characteristic root**) とよぶ．

例 **5.18** $y''-3y'+2y=0$ の特性方程式は $\lambda^2-3\lambda+2=0$ で，特性根は $\lambda=1,2$. □

補題 **5.19** α が $\lambda^2+p\lambda+q=0$ の根ならば，$y=e^{\alpha x}$ は (2) の解である. □

証明 $y=e^{\alpha x}$ ならば，

$$y'=\alpha e^{\alpha x},$$
$$y''=\alpha^2e^{\alpha x}$$

であるから，

$$y''+py'+qy=(\alpha^2+p\alpha+q)e^{\alpha x}=0\cdot e^{\alpha x}=0.\square$$

[17)] 方程式を満たす未知数の値のことを一般に方程式の解とよぶが，2 次方程式，3 次方程式などのいわゆる代数方程式では（解の代りに）根という言葉が使われることが多い（詳しい説明は省略するがニュアンスが異なる）．

補題 5.20（重ね合せの原理 **(principle of superposition)**）　y_1, y_2 が (2) の解ならば，

(3) $$y = Ay_1 + By_2 \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

も (2) の解である． □

証明　$y = Ay_1 + By_2$ より

$$y' = Ay_1' + By_2',$$
$$y'' = Ay_1'' + By_2''$$

であるから

$$y'' + py' + qy = A(y_1'' + py_1' + qy_1) + B(y_2'' + py_2' + qy_2) = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0. \square$$

上の二つの補題から，$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根を α, β とするとき，

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

は (2) の解であることが分かる．

例 5.21　$y = Ae^x + Be^{2x}$（A, B は任意定数）は，$y'' - 3y' + 2y = 0$ の解である． □

実は $\alpha \neq \beta$ の場合，(2) の解は (3) 以外にないことが示せる．一方，$\alpha = \beta$ の場合にはもう一工夫必要である．順番に考察していこう．

5.5.3　特性根が相異なる場合

命題 5.22（定数係数 **2** 階線形同次方程式 **(1)** 特性根が相異なる場合）　特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 根 α, β をもつとき，

(4) $$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

は (2) の一般解である．すなわち，

(a) 任意の定数 A, B に対して，(4) で定まる y は (2) の解である．

(b) (2) の任意の解は，適当な定数 A, B を用いて，$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ と一意的に表される． □

証明 (a) は済んでいる．(b) については，次の二点を示せばよい．

［任意の解は $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$ の 1 次結合で書ける］ y が $y'' + py' + qy = 0$ の解であるとする．

$$y_1 := \frac{y' - \beta y}{\alpha - \beta}, \quad y_2 := \frac{y' - \alpha y}{\beta - \alpha}$$

とおくと

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[(y' - \beta y) - (y' - \alpha y)\right] = \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha - \beta)y = y.$$

また

$$\begin{aligned} y_1' - \alpha y_1 &= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[(y'' - \beta y') - \alpha(y' - \beta y)\right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y\right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}(y'' + py' + qy) = 0. \end{aligned}$$

これから，ある定数 A が存在して $y_1 = Ae^{\alpha x}$ となることが分かる．同様にしてある定数 B が存在して $y_2 = Be^{\beta x}$ となることが分かる．ゆえに

$$y = y_1 + y_2 = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}.$$

［係数 A, B は一意的に定まる］ 定数 A_1, B_1, A_2, B_2 に対して

$$y = A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{\beta x} = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{\beta x}$$

が成り立つならば

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2$$

であることを示そう．

$$C_1 = A_1 - A_2, \quad C_2 = B_1 - B_2$$

とおくと，

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} = 0 \tag{5}$$

が成り立つ．微分して

$$C_1 \alpha e^{\alpha x} + C_2 \beta e^{\beta x} = 0.$$

この式から (5) の α 倍を引くと

$$C_2(\beta - \alpha) e^{\beta x} = 0.$$

仮定より $\alpha \neq \beta$ であるから $C_2 = 0$. (5) に代入して

$$C_1 e^{\alpha x} = 0.$$

これから $C_1 = 0$. $C_1 = C_2 = 0$ より，$A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$. □

例 **5.23** $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ で，特性根は $\lambda = 1, 2$. したがって

$$y = Ae^x + Be^{2x} \quad (A,\ B\ \text{は任意定数})$$

が一般解である． □

5.5.4 特性根が重根である場合

補題 **5.24** $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が重根 α をもつとき，$y = xe^{\alpha x}$ は (2) の解である． □

証明　$y = xe^{\alpha x}$ とすると，

$$y' = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x},$$
$$y'' = \alpha e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x} = \alpha^2 x e^{\alpha x} + 2\alpha e^{\alpha x}$$

であるから，

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (\alpha^2 x + 2\alpha + p\alpha x + p + qx)e^{\alpha x} \\ &= \left[(\alpha^2 + p\alpha + q)x + (p + 2\alpha)\right] e^{\alpha x} \end{aligned}$$

となるが，α は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の重根であるから，

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0,$$
$$\alpha = \frac{-p + \sqrt{\text{判別式}}}{2} = \frac{-p + \sqrt{0}}{2} = -\frac{p}{2} \quad \text{であるから} \quad p + 2\alpha = 0$$

が成り立ち，

$$y'' + py' + qy = [0 \cdot x + 0]\, e^{\alpha x} = 0.\square$$

命題 5.25（**定数係数 2 階線形同次方程式 (2) 特性根が重根の場合**）　特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が重根 α をもつとき，

(6) $$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} \quad (A,\, B \text{ は任意定数})$$

は (2) の一般解である．すなわち，

(a)　任意の定数 A, B に対して，(6) で定まる y は (2) の解である．

(b)　(2) の任意の解は，適当な定数 A, B を用いて，$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x}$ と一意的に表される． □

証明　(a) は済んでいる．(b) については，次の二点を示せばよい．

［任意の解は $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$ の 1 次結合で書ける］　y が $y'' + py' + qy = 0$ の解であるとする．$y = e^{\alpha x}u$ とおくと，

$$y' = \alpha e^{\alpha x} u + e^{\alpha x} u' = e^{\alpha x}(u' + \alpha u),$$

$$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x} u + 2\alpha e^{\alpha x} u' + e^{\alpha x} u'' = e^{\alpha x}(u'' + 2\alpha u' + \alpha^2 u)$$

であるから

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y \\ &= e^{\alpha x}(u'' + 2\alpha u' + \alpha^2 u) - 2\alpha e^{\alpha x}(u' + \alpha u) + \alpha^2 e^{\alpha x} u \\ &= e^{\alpha x} u''. \end{aligned}$$

$y'' + py' + qy = 0$ であったから $e^{\alpha x} u'' = 0$. これから $u'' = 0$. ゆえに定数 A, B が存在して $u = A + Bx$. ゆえに

$$y = e^{\alpha x} u = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x}.$$

［係数 A, B は一意的に定まる］　定数 C_1, C_2 について

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} = 0 \tag{7}$$

が成り立つと仮定して $C_1 = C_2 = 0$ を導けばよい．微分して

$$C_1 \alpha e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} + C_2 \alpha x e^{\alpha x} = 0.$$

この式から (7) の α 倍を引くと

$$C_2 e^{\alpha x} = 0.$$

ゆえに $C_2 = 0$. (7) に代入して

$$C_1 e^{\alpha x} = 0.$$

これから $C_1 = 0$. □

例 **5.26**　$y'' - 2y' + y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ で，特性根は 1（重根）．ゆえに一般解は

$$y = Ae^x + Bxe^x \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).\ \square$$

5.5.5 特性根が虚数である場合

微分方程式

$$y'' + y = 0 \tag{8}$$

の特性方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$ で，特性根は $\lambda = \pm i$（i は虚数単位）である．そこで定理 5.22 を機械的に適用すると，一般解は

$$y = Ae^{ix} + Be^{-ix} \quad (A,\, B \text{ は任意定数}) \tag{9}$$

となるが，e^{ix}, e^{-ix} は一体何であろうか？

実は指数関数 e^x は，複素変数に一般化され，その一般化された指数関数に対しても

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad (\lambda \text{ は複素数の定数})$$

などの性質は保たれるので，(9) は確かに微分方程式 (8) の解を与えるのである．

要約 **5.27**（複素変数の指数関数） 指数関数は複素変数まで拡張できる．その定義には色々な方法があるが，どれを採用しても結果は一致する．ここでは $z = x + iy$（x, y は実数，i は虚数単位）に対して

$$e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y)$$

と定義する．

- 実変数に関する指数関数の拡張になっている．
- 指数法則 $e^{z+w} = e^z e^w$ が成立する．
- 特にオイラーの公式

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{10}$$

  が成り立つ．$y = \pi$ を代入して有名な $e^{i\pi} = -1$ が得られる．(10) で y の代りに $-y$ とした

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i \sin y \tag{11}$$

と (10) を連立方程式とみて，次式が得られる．

$$\cos y = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right), \quad \sin y = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right).$$

- λ が複素数であっても

$$\frac{d}{dz}\left(e^{\lambda z}\right) = \lambda e^{\lambda z}.$$

- 任意の複素数 z に対して，次のベキ級数展開が成り立つ．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

- $\left|e^{x+iy}\right| = e^x.$

以上の事実の証明は付録 6.19 で与える． □

p, q が実定数の場合，$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が 1 つ虚根を持てば，残りの根も虚根であり，それらは互いに複素共役である．ゆえに

$$\lambda = a \pm ib \quad (a, b \in \mathbf{R};\ b \neq 0)$$

と書ける．

$$\begin{aligned} Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} &= Ae^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + Be^{ax}(\cos bx - i\sin bx) \\ &= (A+B)e^{ax}\cos bx + i(A-B)e^{ax}\sin bx. \end{aligned}$$

$C_1 = A + B$, $C_2 = i(A - B)$ とおくと，

$$y = C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax}\sin bx. \tag{12}$$

また A, B は任意定数であることから，C_1, C_2 も任意定数である[18]．C_1, C_2 を実数の範囲のみで動かせば，(12) は任意の実数値関数の解を表す．

例 **5.28**（単振動の方程式を解き直す） $y'' = -\omega^2 y$ (ω は正定数) の特性方程式は $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ で，特性根は $\pm i\omega$. ゆえに一般解は

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x \quad (A,\ B \text{ は任意定数}). \quad \text{q.e.d.}$$

[18] これは $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ において係数行列が正則であることから分かる．

例 **5.29**　$y'' + y' + y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ で，特性根は $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. ゆえに一般解は

$$y = Ae^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + Be^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \quad (A,\, B \text{ は任意定数}). \ \square$$

5.5.6　まとめ

$y'' + py' + qy = 0$（p, q は定数）の一般解は次のように求まる.

(i)　$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 根 α, β を持つならば,

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A,\, B \text{ は任意定数}).$$

(ii)　$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が重根 α を持つならば,

$$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} \quad (A,\, B \text{ は任意定数}).$$

(iii)　p, q が実定数で，$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が虚根 $a + ib$ $(a, b \in \mathbf{R};\, b \neq 0)$ を持つならば,

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx \quad (C_1,\, C_2 \text{ は任意定数}).$$

このように 2 階方程式の一般解は，適当な二つの関数 φ_1, φ_2 を用いて,

$$y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) \quad (C_1,\, C_2 \text{ は任意定数})$$

と書ける場合がしばしばあるが，このとき φ_1, φ_2 を解の基本系とよぶ．つまり

1. 特性方程式が相異なる 2 根 α, β を持つ場合，$e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$ は解の基本系
2. 特性方程式が重根 α を持つ場合，$e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$ は解の基本系
3. 特性方程式が互いに複素共役である虚根 $a \pm ib$ を持つ場合，$e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \sin bx$ は解の基本系

5.5.7 発展：n 階方程式

以上の話は，一般の自然数 n に対する n 階方程式

(13) $$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

に一般化される（ここで $a_1, \ldots, a_n$ は定数である）.

まず $n = 3$ の場合，すなわち

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0 \quad (p,\ q,\ r \text{ は定数})$$

について述べよう．この微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

である．その根を α, β, γ とする．

(i) α, β, γ がすべて相異なるならば

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} \quad (A,\ B,\ C \text{ は任意定数})$$

が一般解である．

(ii) $\alpha = \beta \neq \gamma$ であるならば

$$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} + Ce^{\gamma x} \quad (A,\ B,\ C \text{ は任意定数})$$

が一般解である．

(iii) $\alpha = \beta = \gamma$ であるならば

$$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} + Cx^2 e^{\alpha x} \quad (A,\ B,\ C \text{ は任意定数})$$

が一般解である．

(iv) $p,\ q,\ r$ が実数であり，$\alpha,\ \beta$ が虚数，つまり $\alpha, \beta = a \pm ib$ $(a, b \in \mathbf{R},$ $b \neq 0)$ と書ける場合は

$$y = Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx + Ce^{\gamma x} \quad (A,\ B,\ C \text{ は任意定数})$$

が一般解である．

最後に n が一般の自然数の場合をまとめておこう．λ に関する方程式

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

を (13) の特性方程式という．これは n 次代数方程式であるから，(重根を重複度の分だけ数えると）ちょうど n 個の根を持つ．相異なるものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, それらの重複度を $m_1, \ldots, m_r$ とするとき（もちろん $m_1 + \cdots + m_r = n$），(13) の一般解は

$$y = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j} C_{jk}x^{k-1}e^{\lambda_j x} \quad (C_{jk}\text{ は任意定数})$$

で与えられる．

問題

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．
(1) $y'' - 6y' + 8y = 0$　(2) $y'' - 3y' + 2y = 0$　(3) $y'' - a^2y = 0$
(4) $y'' + ay' + k^2y = 0$　(5) $y'' + 2y' + y = 0$　(6) $y'' - 6y' + 9y = 0$
(7) $y'' - 4y' + 5y = 0$　(8) $y'' + 2y' + 5y = 0$

2. (1) $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 0$　(2) $y''' - 3y'' - 13y' + 15y = 0$
(3) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$　(4) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$
(5) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$　(6) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
(7) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$　(8) $y^{(4)} - y = 0$

5.6 定数係数 2 階線形常微分方程式 (2) 非同次方程式と重ね合せの原理

前節で扱った同次方程式

(1)
$$y'' + py' + qy = 0$$

の右辺を一般にした非同次方程式

(2)
$$y'' + py' + qy = f(x)$$

の解法を追求する．

まず，線形方程式の基本的性質である「重ね合せの原理」に基づく「特解を（一つでも）求めればよい原理」（ここだけの用語である）を理解するのが基本である．

5.6.1　重ね合せの原理

記号 $L[y]$ を

(3) $$L[y] := y'' + py' + qy$$

で定めるとき，(1), (2) はそれぞれ $L[y] = 0$, $L[y] = f(x)$ と表される．

補題 **5.30**（L の線形性）　p, q を定数として，x を変数とする関数 y で 2 回微分可能なものに対して

$$L[y] = y'' + py' + qy$$

とおくとき，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i)　任意の 2 回微分可能な関数 y, z について

(4) $$L[y+z] = L[y] + L[z].$$

(ii)　任意の 2 回微分可能な関数 y と 定数 k について

(5) $$L[ky] = kL[y].\square$$

証明　(i) の証明は

$$\begin{aligned} L[y+z] &= (y+z)'' + p(y+z)' + q(y+z) \\ &= y'' + z'' + p(y' + z') + q(y+z) \\ &= (y'' + py' + qy) + (z'' + pz' + qz) \\ &= L[y] + L[z]. \end{aligned}$$

(ii) も同様である. □

(4), (5) が成り立つことを L は線形（線型，linear）であると言う.

この記号を用いて，補題 5.20（重ね合せの原理）「y_1, y_2 が (1) の解ならば，$y = Ay_1 + By_2$ も (1) の解である」を再度証明してみよう.

(証明) y_1, y_2 が (1) の解であるとは，$L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$ ということである.

$$L[y] = L[Ay_1 + By_2] = AL[y_1] + BL[y_2] = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$$

であるので，y は (1) の解である. □

補題 5.30(1) の一つの言い換えを示そう.

補題 **5.31**（一般化された重ね合せの原理） $j = 1, 2$ について，y_j が

$$y'' + py' + qy = f_j(x)$$

の解ならば

$$y = y_1 + y_2$$

は

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

の解である. □

証明

$$L[y] = L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x). \ \square$$

例 **5.32** $y_1 = \dfrac{1}{4}e^x$ は

$$y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = e^x$$

を満たす. また $y_2 = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{27}$ は

$$y_2'' - 6y_2' + 9y_2 = x$$

を満たす．ゆえに $y = y_1 + y_2 = \dfrac{1}{4}e^x + \dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{27}$ は

$$y'' - 6y' + 9y = e^x + x$$

の解である． □

5.6.2 「特解を求めればよい」原理

定理 5.33（特解があれば同次方程式に帰着できる） u を (2) の一つの解とするとき，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i) z が (1) の任意の解とするとき，$y = u + z$ とおくと，y は (2) の解になる．

(ii) y が (2) の任意の解とするとき，$z = y - u$ とおくと，z は (1) の解になる．

言い換えると，y と z に

$$y = u + z$$

という関係があるとき，

$$z \text{ が (1) の解} \iff y \text{ が (2) の解}. \square$$

証明 (i) $L[y] = L[u+z] = L[u] + L[z] = f(x) + 0 = f(x)$.
(ii) $L[z] = L[y-u] = L[y] - L[u] = f(x) - f(x) = 0$. □

上の定理の内容を

$$\boxed{\text{非同次方程式の一般解} = \text{非同次方程式の特解} + \text{同次方程式の一般解}}$$

と表現することがある．集合で表すと，

$$X_0 = \text{(1) の解全体}, \quad X_f = \text{(2) の解全体}$$

とするとき，

$$X_f = \{u + z; z \in X_0\}.$$

例 **5.34**　微分方程式

$$y'' - 3y' + 2y = 1 + x \tag{6}$$

を考えよう．$u = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$ はこの方程式を満たす（つまり方程式の特解である）．対応する同次方程式

$$z'' - 3z' + 2z = 0$$

の一般解は

$$z = Ae^x + Be^{2x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

であるから，(6) の一般解は

$$y = u + z = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).\ \square$$

5.6.3　簡単な特解の発見法（未定係数法）

以下に挙げるような特定の f（擬多項式とよぶことがある）についてのみ有効でしかない（適用範囲が限られている）が，簡単な特解発見法がある．

(a)　$f(x) =$ (x の n 次多項式) $\times e^{\alpha x}$ で，α が特性方程式の m 重根 ($m \geq 0$) の場合は

$$u(x) = (n \text{ 次多項式}) \times x^m e^{\alpha x}$$

とおいて，$L[u] = f(x)$ が成り立つように多項式の係数を定めればよい．

(b)　$f(x) =$ (x の n 次多項式) $\times e^{ax} \times \left\{ \begin{array}{c} \cos bx \\ \text{または} \\ \sin bx \end{array} \right\}$（ただし $a, b \in \mathbf{R}$）で，$a + ib$ が特性方程式の m 重根 ($m \geq 0$) の場合は

$$u(x) = (n \text{ 次多項式}) \times x^m e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$$

とおけばよい．

この方法は一般性がないが，とにかく簡単なのが長所である．

例 **5.35** $L[y] = y'' - 5y' + 6y$ とするとき，次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $L[y] = 6x^2 + 2x - 2$ (2) $L[y] = e^{2x}$ (3) $L[y] = \sin x$

解 特性根は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ より $\lambda = 2, 3$. したがって対応する同次方程式 $L[z] = 0$ の一般解は $z = Ae^{2x} + Be^{3x}$ （A, B は任意定数）である．

(1) 0 は特性根でないので（上の (a) の記号で $\alpha = 0$, $m = 0$, $n = 2$），

$$u = ax^2 + bx + c$$

の形の特解があるはずである．

$$u' = 2ax + b, \quad u'' = 2a$$

であるから

$$\begin{aligned} L[u] &= 2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) \\ &= 6ax^2 + (6b - 10a)x + (2a - 5b + 6c). \end{aligned}$$

これが $6x^2 + 2x - 2$ に等しいためには

$$6a = 6, \quad 6b - 10a = 2, \quad 2a - 5b + 6c = -2$$

が必要十分で，$a = 1$, $b = 2$, $c = 1$. ゆえに $u = x^2 + 2x + 1$. 求める一般解は

$$y = z + u = Ae^{2x} + Be^{3x} + x^2 + 2x + 1.$$

(2) 2 は特性方程式の単根（1 重根）であるから（上の (a) の記号で $\alpha = 2$, $m = 1$, $n = 0$），

$$u = axe^{2x}$$

の形の特解があるはずである．

$$u' = ae^{2x} + 2axe^{2x}, \quad u'' = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}$$

であるから,

$$L[u]=(4ae^{2x}+4axe^{2x})-5(ae^{ax}+2axe^{2x})+6axe^{2x}=-ae^{2x}.$$

これが e^{2x} と等しいためには $-a=1$. ゆえに $a=-1$, $u=-xe^{2x}$. 求める一般解は

$$y=z+u=Ae^{2x}+Be^{3x}-xe^{2x}$$

(3) $\pm i$ は特性方程式の根ではないから（上の (b) の記号で $a=0$, $b=1$, $m=0$, $n=0$）,

$$u=a\cos x+b\sin x \quad (a,\ b \text{ は定数})$$

の形の特解があるはずである.

$$u'=-a\sin x+b\cos x, \quad u''=-a\cos x-b\sin x$$

であるから,

$$\begin{aligned}L[u]&=(-a\cos x-b\sin x)-5(-a\sin x+b\cos x)+6(a\cos x+b\sin x)\\&=(5a-5b)\cos x+(5b+5a)\sin x.\end{aligned}$$

これが $\sin x$ と等しいためには $5a-5b=0$, $5a+5b=1$. これから $a=b=1/10$. ゆえに $u=\dfrac{1}{10}(\cos x+\sin x)$. もとめる一般解は

$$y=z+u=Ae^{2x}+Be^{3x}+\frac{1}{10}(\cos x+\sin x). \ \square$$

問題

1. 次の微分方程式を解け.

(1) $y''-6y'+8y=e^x$ (2) $y''-6y'+8y=3e^{2x}$ (3) $y''-3y'+2y=\sin x$
(4) $y''-3y'+2y=e^x$ (5) $y''-a^2y=xe^{ax}$ (6) $y''+a^2y=x^2$
(7) $y''+2y'+y=e^{-x}$ (8) $y''+2y'+y=x^2$ (9) $y''-6y'+9y=x+e^x$
(10) $y''-6y'+9y=\cos x$ (11) $y''-2y'=1+x$

2. (1) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^{-x}$ (2) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = x + e^{x}$
(3) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = e^{2x} + \sin 2x$ (4) $y^{(4)} - y'' = 1 + \cos x + e^{-x}$
(5) $y^{(4)} - y'' = 1 + x + e^{x}$

5.7 1 変数ベクトル値関数と曲線

n 次元数ベクトルの空間 $\mathbf{R}^n$ と，n 次元ベクトル値関数，$\mathbf{R}^n$ 内の曲線，$\mathbf{R}^n$ 内の点の運動について説明する．これらの内容はベクトル値関数をのぞけば，$n = 2$ の場合を高等学校の数学で学習済みのはずである．それらに慣れている場合は記号を確認する程度で構わない．

5.7.1 $\mathbf{R}^n$ のベクトル

n 個の実数 a_1, a_2, …, a_n を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

のように組にしたものを n 次元実（列）ベクトルとよび，n 次元実ベクトル全体の集合を $\mathbf{R}^n$ で表し，n 次元実ベクトル空間と呼ぶ．

この本では，$\mathbf{R}^n$ の要素を文字を使って表す場合，実数と混同しないようにするため，なるべく太字のローマ字 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, …, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ で表すことにする．

$\boldsymbol{a}$ がベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ であるとき，a_i を $\boldsymbol{a}$ の第 i 成分とよぶ．また $\boldsymbol{a}$ を $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ と書くこともある（行列の転置の記号の利用）．

二つのベクトル $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ と $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ が等しいとは，すべての成分が等しいこと，すなわち $a_i = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が成り立つことであると定義する．

$\mathbf{R}^n$ には次のようにして加法と実数倍という二つの演算を導入する:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}.$$

この加法の単位元は，零ベクトルと呼ばれる成分がすべて 0 である n 次元ベクトル

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T$$

である．

また $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ に対して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積（スカラー積，ドット積ともいう）と呼ばれる実数 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

で定める．$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ のことを $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書く流儀もある．

問　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{a}$ と書けることを示せ．

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ に対して，$\boldsymbol{a}$ の長さまたはノルムと呼ばれる実数 $|\boldsymbol{a}|$（$\|\boldsymbol{a}\|$ と書く流儀もある）を

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

で定める．

5.7.2 ベクトル値関数

$\mathbf{R}$ の区間 I で定義された n 個の実数値関数 f_1, f_2, …, f_n があるとき，

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in I)$$

とおくと，$\boldsymbol{f}$ は I から $\mathbf{R}^n$ への写像であると考えられる．このような写像 $\boldsymbol{f}$ を I 上の n 次元ベクトル値関数とよぶ．

ベクトル値関数の和，実数値関数倍，内積，ノルム

$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ を区間 I 上のベクトル値関数，c を I 上の実数値関数とするとき，次のようにして自然に和 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$，実数値関数倍 $c\boldsymbol{f}$，内積 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$, ノルム $|\boldsymbol{f}|$ が定まる．

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(t)=\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{g}(t) \quad (t\in I),\\
&(c\boldsymbol{f})(t)=c(t)\boldsymbol{f}(t) \quad (t\in I),\\
&(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(t)=\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t) \quad (t\in I),\\
&|\boldsymbol{f}|(t)=|\boldsymbol{f}(t)| \quad (t\in I).
\end{aligned}$$

ベクトル値関数の極限

区間 I 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(t)$ と，I の内部または境界に属する a, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_n)^T$ に対して，

$$\lim_{t\to a}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{b}$$

であるとは，すべての番号 i について

$$\lim_{t\to a}f_i(t)=b_i$$

が成り立つことであると定義する．これは実は

$$\lim_{t\to a}|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{b}|=0$$

が成り立つことと同値である．

ベクトル値関数の連続性，微分可能性

実数値関数に対して，連続，微分可能，C^m 級，C^∞ 級という言葉を定義したが，ベクトル値関数についても，それらの言葉を用いる．

例えば成分関数 $f_1, \ldots, f_n$ がすべて a で連続であるとき，$\boldsymbol{f}$ は a で連続であるという．この条件は

$$\lim_{t \to a} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}(a)$$

とも書ける．

また $f_1, \ldots, f_n$ がすべて I で連続であるとき，$\boldsymbol{f}$ は I で連続であるという．

またベクトル値関数 $f_1, \ldots, f_n$ がすべて a で微分可能であるとき，$\boldsymbol{f}$ は a で微分可能であるといい，

$$\boldsymbol{f}'(a) := \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix}$$

とおく．$\boldsymbol{f}$ が I のすべての点 t で微分可能であるとき，$\boldsymbol{f}$ は I で微分可能であるといい，$t \mapsto \boldsymbol{f}'(t)$ を導関数という．

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}(t) = \boldsymbol{f}'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}.$$

微分可能なベクトル値関数 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$, 実数値関数 f, 定数関数 k に対して，以下の公式が成り立つ．

(1) $(\boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}'(t) + \boldsymbol{g}'(t)$.

(2) $(k\boldsymbol{f}(t))' = k\boldsymbol{f}'(t)$.

(3) $(c(t)\boldsymbol{f}(t))' = c'(t)\boldsymbol{f}(t) + c(t)\boldsymbol{f}'(t)$.

(4) $(\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}'(t) \cdot \boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}'(t)$.

5.7.3 曲線

曲線とそれに関係するいくつかの用語の定義をしておこう．

高等学校の数学で，1 つの実変数 t に対する 2 つの実数値関数 $x(t), y(t)$ があるとき，$(x(t), y(t))$ を点の座標と考え，t を変化させたときの点の軌跡と

して曲線を表すことを学んだ．$\boldsymbol{f}(t) := (x(t), y(t))$ とおくと，$\boldsymbol{f}$ は 2 次元のベクトル値関数に他ならない．

この考え方を用いて $\mathbf{R}^n$ 内の曲線を定義しよう．数直線 $\mathbf{R}$ の区間 I で定義された連続な n 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}\colon I \to \mathbf{R}^n$ があるとき，$\boldsymbol{f}$ は $\mathbf{R}^n$ 内の曲線であるという．

直観的には写像（ベクトル値関数）の値域である $\mathbf{R}^n$ の部分集合

$$\{\boldsymbol{f}(t) \mid t \in I\}$$

の方が曲線と呼ぶにふさわしく感じられるかも知れないが，ここでは写像（ベクトル値関数）自体を曲線と呼ぶことにしていることに注意しよう．

また曲線といっても，「まっすぐである」ことは否定しておらず，直線や線分も曲線の特別な場合として含んでいる．

写像として微分可能であるものを微分可能な曲線，写像として C^k 級であるものを C^k 級の曲線，写像として区分的に C^k 級であるものを区分的に C^k 級の曲線という．(区分的に C^k 級の曲線という概念があると，多角形のように角のある曲線が定義しやすくなる．)

曲線 $\boldsymbol{f}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ が閉曲線であるとは，$\boldsymbol{f}(a) = \boldsymbol{f}(b)$ が成り立つことをいう．

曲線が単純であるとは，自分自身と交わらない（ただし始点と終点が一致すること——$I = [a,b]$, $\boldsymbol{f}(a) = \boldsymbol{f}(b)$ という場合は「交わる」とは考えない）をいう．単純な曲線のことを ジョルダン（**Jordan**）曲線ともいう．

微分可能な曲線 $\boldsymbol{f}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{f}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ ならば，$\boldsymbol{f}'(t_0)$ は曲線上の点 $\boldsymbol{f}(t_0)$ における接線に平行なベクトルを表す．ゆえに，その接線のパラメーター表示は，s をパラメーターとして，

$$\boldsymbol{g}(s) = \boldsymbol{f}(t_0) + s\boldsymbol{f}'(t_0) \quad (s \in \mathbf{R})$$

となる．

C^1 級の曲線 $\boldsymbol{f}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ が，任意の $t \in [a,b]$ に対して $\boldsymbol{f}'(t) \neq \mathbf{0}$ をみたすとき，$\boldsymbol{f}$ は正則な曲線であるという．正則な曲線では，その曲線上の到る

ところで接線が引けて，その方向が連続的に変化するので，直観的には「なめらかな」曲線となる（決して「とがる」ことはない）.

例 **5.36** $\boldsymbol{f}(t)=(2\cos t, 2\sin t)^T$ $(t\in[0,2\pi])$ は $\boldsymbol{f}'(t)=(-2\sin t, 2\cos t)^T \neq \mathbf{0}$ $(t\in[0,2\pi])$ をみたすから，正則曲線である．点 $(\sqrt{3},-1)$ における接線のパラメーター表示は，対応するパラメーターの値が $t_0=11\pi/6$ であるから，

$$\boldsymbol{g}(s)=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\quad(s\in\mathbf{R}).\square$$

C^1 級の曲線 $\boldsymbol{f}\colon[a,b]\to\mathbf{R}^n$ の長さ（弧長）を

$$\int_a^b\left|\boldsymbol{f}'(t)\right|dt=\int_a^b\sqrt{\sum_{j=1}^n\left(\frac{df_j}{dt}\right)^2}dt$$

で定義する.

5.7.4 質点の運動

質点が時間の経過とともにその位置を変えるとき，時刻 t における位置ベクトルを $\boldsymbol{f}(t)$ で表すと，一つのベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ が得られる.

ここでは独立変数を t, 従属変数を $\boldsymbol{x}$ と書くことにしよう:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t).$$

このとき

$$\boldsymbol{v}(t):=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}'(t)$$

を時刻 t における質点の速度という．また速度のノルム（大きさ）$|\boldsymbol{v}(t)|$ のことを速さとよぶ.

速度の導関数

$$\boldsymbol{\alpha}(t):=\boldsymbol{v}'(t)$$

は質点の加速度を表す.

例 **5.37**（等速円運動） $r > 0$,ω を定数とするとき，

$$\boldsymbol{x}(t) := (r\cos\omega t, r\sin\omega t)^T$$

で与えられる運動は等速円運動と呼ばれるものである．速度 $\boldsymbol{v}(t)$, 加速度 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{x}'(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)^T,\\ \boldsymbol{\alpha}(t) &= \boldsymbol{v}'(t) = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t)^T = -\omega^2\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

となる．速さは

$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2 + (r\omega\cos\omega t)^2} = r\,|\omega|$$

であり定数関数である． □

問題

1. 次の各曲線の，与えられた点 t における接線を求めよ．
(1) $\boldsymbol{f}(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t = \pi/6$ (2) $\boldsymbol{f}(t) = (t, \log t)^T$, $t = e$
(3) $\boldsymbol{f}(t) = (t, \log(1-t^2))^T$, $t = 1/2$ (4) $\boldsymbol{f}(t) = (e^t\cos t, e^{2t}\sin t)^T$, $t = \pi$
(5) $\boldsymbol{f}(t) = (e^t, t, t^2)^T$, $t = 1$ (6) $\boldsymbol{f}(t) = (\sin 2t, \log(1+t), t)^T$, $t = \pi/2$
(7) $\boldsymbol{f}(t) = (e^t, \cos t, \sin t)^T$, $t = \pi/4$

2. 実数値連続関数 $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ のグラフは，あるパラメーター表示によって平面曲線とみることができる．どのようなパラメーター表示か．また，それは単純曲線であり，閉曲線ではないことを示せ．弧長を式で表せ．

3. 速さが定数関数である運動を等速運動と呼ぶ．等速運動においては，速度と加速度は直交することを示せ．

5.8 連立微分方程式

これまではただ一つの未知関数についてのただ一つの微分方程式を扱ってきたが，その一般化を考えよう．

n 個の未知関数 y_1, ..., y_n に関する方程式

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \\ \quad \vdots \\ F_n\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

を連立 **1** 階微分方程式あるいは **1** 階微分方程式系とよぶ（ここで F_1, ..., F_n は与えられた $2n+1$ 変数の関数である）．特に微分方程式が導関数 $\dfrac{dy_i}{dx}$ について解かれている場合，すなわち

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \quad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

の形をしている場合を正規形の連立 **1** 階微分方程式（あるいは 1 階微分方程式系）とよぶ．

例 **5.38**　既に学んだ単独の（すなわち連立ではない）2 階微分方程式

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

（p, q は定数，$f(x)$ は関数でともに与えられている）

があるとき，

$$y_1 = y, \quad y_2 = \frac{dy}{dx}$$

とおくと，

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x) - \left(p\frac{dy}{dx} + qy\right) = -qy_1 - py_2 + f(x)$$

であるから，

$$\begin{cases} f_1(x, y_1, y_2) = y_2 \\ f_2(x, y_1, y_2) = -qy_1 - py_2 + f(x) \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases} \tag{4}$$

これは (2) で $n = 2$ とした形をしている．すなわち単独の 2 階微分方程式 (3) を連立の 1 階微分方程式 (2) に書き換えることができた． □

同様にして，高階の導関数を含む任意の微分方程式を 1 階の連立微分方程式に帰着することができる．

n 成分のベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ を用いて $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ を $f_i(x, \boldsymbol{y})$ と書き，また

$$\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$

のように関数の組もベクトルとして表すことにより，(2) は

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \tag{5}$$

と書ける．ただし

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$$

とする．ここでは $\boldsymbol{y}$ は x を独立変数とする，値が n 次元のベクトルである関数と見なしている．

(5) は既に出て来た単独の（正規形）1 階微分方程式と似た形をしているが，実は単独方程式の場合とほぼ同様のことが成立する．たとえば多くの場合

(6) $\quad x = a$ のとき $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ （このことを $\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{b}$ と書ける）

という形の条件を与えることで解がただ一つに決定される．(6) を初期条件，微分方程式 (5) の解で初期条件を満たすものを求めよ，という問題を初期値問題と呼ぶのは単独の方程式の場合と同様である．

5.9 定数係数連立 1 次線形微分方程式

A を各成分が定数である n 次の正方行列とするとき，

(1)
$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}$$

という形をした微分方程式を定数係数連立 **1** 次線形微分方程式とよぶ．例えば $n = 2$ のとき，$A = (a_{ij})$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ として成分表示すれば，

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

の形になるものである．

初期条件としては，与えられたベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，

(2)
$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b}$$

という形の条件を課す．

与えられた正方行列 A, 複素数 λ に対して，λ が A の固有値であるとは，

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{u}$ が存在することをいう．このとき $\boldsymbol{u}$ は，A の固有値 λ に属する固有ベクトルとよばれる．

線形代数でよく知られた事実を紹介しよう（ここでは証明抜きで認めることにする）．

要約 5.39（固有値に関する基本的事実） λ が A の固有値であるための必要十分条件は，λ が A の固有多項式と呼ばれる n 次多項式

$$p(\lambda) := \det(\lambda I - A) \quad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列，} \det \text{ は行列式})$$

の根であることである．ゆえに重複度を込めて数えると，固有値はちょうど n 個存在することになる．$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ が A の相異なる固有値全体とするとき，それらに属する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ は 1 次独立である．

もしも $r = n$ である場合は，$P := (\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)$ とおくと，P は正則行列であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．

例 5.40（**2** 次正方行列の固有値） $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき

$$\lambda I - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a)(\lambda - d) - (-b)(-c) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc).$$

ゆえに A の固有値は，2 次方程式 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ の 2 根である．

例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ とすると，$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ から $\lambda = -2, 5$. $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を成分で表すと

$$\begin{cases} x + 3y = -2x, \\ 4x + 2y = -2y \end{cases}$$

となり，これは $x+y=0$ と同値である．これから -2 に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られる．

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を成分で表すと

$$\begin{cases} x+3y=5x, \\ 4x+2y=5y \end{cases}$$

となり，これは $4x-3y=0$ と同値である．これから 5 に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ が得られる．

$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は 1 次独立なので，$P:=(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ とおくと，P は正則で,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 15 \\ 2 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & 35 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる[19]． □

さて，$\boldsymbol{y}:=e^{\lambda x}\boldsymbol{u}$ とおこう．$\boldsymbol{u}$ は x によらないので,

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right)\boldsymbol{u}=e^{\lambda x}\lambda\boldsymbol{u}.$$

$\boldsymbol{u}$ は λ に属する固有ベクトルであるから,

$$e^{\lambda x}\lambda\boldsymbol{u}=e^{\lambda x}A\boldsymbol{u}=A\left(e^{\lambda x}\boldsymbol{u}\right)=A\boldsymbol{y}.$$

[19] あるいは $AP=A(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})=(A\boldsymbol{u}\ A\boldsymbol{v})=(-2\boldsymbol{u}\ 5\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ の両辺に左から P^{-1} をかけてもよい．

ゆえに

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}.$$

すなわち $\boldsymbol{y} = e^{\lambda x}\boldsymbol{u}$ は，微分方程式 (1) の解である．

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ が A の固有値で，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ がそれらに属する A の固有ベクトルであるとするとき，任意の定数 $c_1, \ldots, c_n$ に対して

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x) := c_1 e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r e^{\lambda_r x}\boldsymbol{u}_r$$

とおくと，$\boldsymbol{y}$ も微分方程式 (1) の解である．実際，

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(c_1 e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r e^{\lambda_r x}\boldsymbol{u}_r\right)\\ &= c_1\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{u}_1\right) + \cdots + c_r\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda_r x}\boldsymbol{u}_r\right)\\ &= c_1 A e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r A e^{\lambda_r x}\boldsymbol{u}_r\\ &= A\left(c_1 e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r e^{\lambda_r x}\boldsymbol{u}_r\right) = A\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

簡単のために，$r = n$ で，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立と仮定すると，任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，

$$\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \tag{3}$$

をみたす係数 $c_1, \ldots, c_n$ が存在する[20]．これから次の定理が成り立つことが分かる．

定理 5.41 n 次正方行列 A に対して，A の n 個の固有ベクトルで 1 次独立なものが存在するならば，任意の $\boldsymbol{b}$ に対して，初期値問題

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b}$$

の解が存在する． □

---

[20] $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を横に並べて作った行列を P，$c_1, \ldots, c_n$ を縦に並べて作ったベクトルを $\boldsymbol{c}$ とおくと，$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = P\boldsymbol{c}$ であるから，$\boldsymbol{c} = P^{-1}\boldsymbol{b}$ とすればよい．

証明　与えられた $\boldsymbol{b}$ に対して (3) をみたす $c_1, \ldots, c_n$ を取って，

$$\boldsymbol{y} := c_1 e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_1 e^{\lambda_n x}\boldsymbol{u}_n$$

とおくと，$\boldsymbol{y}$ は初期値問題の解となる．　□

（実は n 個の固有ベクトルで 1 次独立なものが存在する，という仮定は不要である．後述の定理 5.45 を見よ．）

例 **5.42**　$A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 25 \end{pmatrix}$ とするとき，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$A\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u}, \quad A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}.$$

これから一般解は

$$\boldsymbol{y} = c_1 e^{2x}\boldsymbol{u} + c_2 e^{3x}\boldsymbol{v} \quad (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数}).\square$$

例 **5.43**　$A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 21 & -15 \\ 15 & -29 \end{pmatrix}$ とするとき，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$A\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u}, \quad A\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{v}.$$

これから一般解は

$$\boldsymbol{y} = c_1 e^{2x}\boldsymbol{u} + c_2 e^{-3x}\boldsymbol{v} \quad (c_1,\, c_2 \text{ は任意定数}).\square$$

発展：行列の指数関数を用いた解の表示

行列の指数関数 e^{tA} を導入すると，微分方程式の解が簡潔に表示できる．線形代数や行列の級数についての知識が必要になるので，今の段階で数学的に厳密な議論を展開することはできないが，概要を説明しよう．

任意の n 次正方行列 A，任意の実数 t に対して

$$e^{tA} = \exp tA := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} A^n \quad (\text{ただし } 0! = 1,\ A^0 = I)$$

とおく．これを具体的に計算するには，A の ジョルダン標準形もしくはスペクトル分解（いずれも線形代数で取り扱われる項目である）などを用いるとよい．ここでは一般の場合の計算法の詳細は省略するが，A が簡単な形をしている場合の例をいくつかあげておく．

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ のとき，

$A^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & 0 \\ 0 & \mu^m \end{pmatrix}$ であり，$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$.

(2) $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$（$P$ は正則行列）のとき，

$A^m = P\begin{pmatrix} \lambda^m & 0 \\ 0 & \mu^m \end{pmatrix}P^{-1}$ であり，$e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}P^{-1}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ のとき，$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & -e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix}$.

特に $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のときは，$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

このうち $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の場合の計算を示しておこう．

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$ であるから，$A^{2k} = (-1)^k I$, $A^{2k+1} = (-1)^k A$ であり，

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}A^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}A^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}A^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}A \\ &= \cos tI + \sin tA = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

次の命題は，この e^{tA} が指数関数と呼ばれるにふさわしい性質を持つことを示している．

命題 5.44（行列の指数関数の性質） A を任意の正方行列，t, s を任意の実数とするとき

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}, \quad \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA} = e^{tA}A, \quad t = 0 \text{ のとき } e^{tA} = I. \square$$

この指数関数を用いると定数係数連立 1 階微分方程式の初期値問題 (1), (2) は次のように解決される．

定理 5.45（初期値問題の解） 任意の n 次正方行列 A, n 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，$\boldsymbol{y} := e^{xA}\boldsymbol{b}$ とおくと，

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b}.$$

すなわち $\boldsymbol{y} = e^{xA}\boldsymbol{b}$ は初期値問題 (1), (2) の解である． □

この定理は定理 5.10 の一般化と考えられる．

例 5.46（減衰振動） 単振動に速度に比例する抵抗の効果を入れた方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\omega^2 y - \gamma\frac{dy}{dx} \quad (\omega > 0, 0 \leq \gamma < 2\omega)$$

に $z = dy/dx$ を導入して 1 階方程式に直した

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -\omega^2 y - \gamma z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

を考える．A の固有多項式は $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2$ であるから，A の固有値は $\alpha \pm i\beta$ ($\alpha := -\gamma/2$, $\beta := \sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}$, i は虚数単位）であり，固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \pm i\beta \end{pmatrix}$（複号同順）がとれる．$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ とおくと[21)]，

[21)] P は固有ベクトルの実部と虚部を並べたものである．

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. ゆえに

$$e^{xA} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ -e^{\alpha x}\sin\beta x & e^{\alpha x}\cos\beta x \end{pmatrix} P^{-1}.$$

特に $\gamma = 0$ の場合は $\alpha = 0$, $\beta = \omega$, $e^{xA} = \begin{pmatrix} \cos\omega x & \dfrac{1}{\omega}\sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \cos\omega x \end{pmatrix}$. □

問題

1. つぎの連立微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\begin{cases} y_1' = 5y_1 - y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 3y - z \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 \\ y_2' = -2y_1 + 6y_2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y' = y - 3z \\ z' = -3y + z \end{cases}$ (5) $\begin{cases} y' = 2z \\ z' = -2y \end{cases}$ (実数値関数の解を求めよ)

5.10 微分方程式の解の可視化

微分方程式の解を図示(可視化)することを考える.

例えば微分方程式の解を数式で表せない場合であっても,数値計算で近似解を求められることが多く,そのようなときに便利な手段となる.

ここでは 1 階正規形常微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y})$ のうちで,F が x によらずに $\boldsymbol{y}$ だけの関数である場合,すなわち $F(x, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y})$ と書ける方程式(このような方程式を自励系の微分方程式とよぶ)を考える:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = f(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{b}.$$

この解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ を図示するための方法を二つ紹介する.

いずれの場合も解から得られる曲線を解曲線と呼ぶのはまぎらわしいが,ともに定着しているので仕方がない.

5.10.1　解のグラフ

解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ の，関数としてのグラフとして得られる曲線（解曲線と呼ばれる）を描く．

$n = 1$（つまり $\boldsymbol{y}$ は実数 y）の場合は xy 平面，$n = 2$（つまり $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$）の場合は xy_1y_2 空間内の曲線となる．

既に例 5.11 において，解のグラフを掲げてある（$n = 1$ であるので，xy 平面内の曲線となっている）．

任意の初期値に対して解の一意性が成り立つと仮定すると，2 つの解曲線は完全に一致するか，共有点を一つも持たないかのどちらかに限られる（ところどころで交差する，というようなことはありえない）．

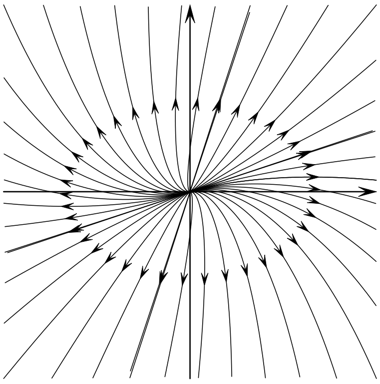
この方法は微分方程式が自励系でない場合にもそのまま利用できる．

5.10.2　解の軌跡

解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ で，x をパラメーターと考えて，点 $\boldsymbol{y}(x)$ の軌跡（これも解曲線または軌道と呼ばれる）を描く．

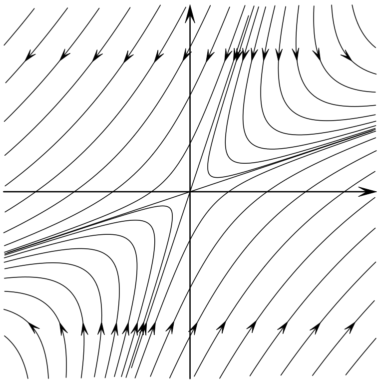
$n = 2$（つまり $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$）の場合は y_1y_2 平面内の曲線，$n = 3$（つまり $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$）の場合は $y_1y_2y_3$ 空間内の曲線となる．

前節の例の微分方程式の解の軌道を示そう．

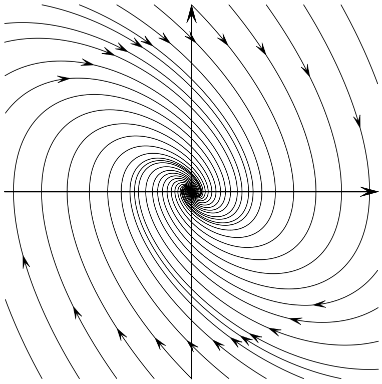


例 5.42 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 25 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$ の解の軌道

原点から遠ざかる向きに移動する．



例 5.43 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 21 & -15 \\ 15 & -29 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$ の解の軌道



例 5.46　$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \omega = 1, \gamma = 1$

解の一意性により，2 つの解曲線（軌道）は完全に一致するか（もちろん軌跡として考えてのことで，パラメーターのずれは無視してのことである[22)]），共有点を一つも持たないかのどちらかに限られる．

解曲線で埋め尽くされた平面，空間を，それぞれ相平面 (phase plane), 相空間 (phase space) とよぶ．

解の軌跡はただ 1 点となる場合もあることに注意しよう．一般に $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ となる点 $\boldsymbol{b}$ を初期値とする解は $\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{b}$ であり[23)]，軌跡は $\boldsymbol{b}$ ただ 1 点からなる．このような点，つまり $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{b}$ のことを平衡点という．

例 **5.47**　定数係数線形常微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

において，原点 $(0,0)^T$ は平衡点である．a_{ij} の値によっては他にも平衡点が現われる場合がある． □

[22)] 例え話をすると，小田急線新宿発箱根湯本行きの電車は運行時間を考えれば複数あるが，軌跡は一つしかない．

[23)] 確認：$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{b}$ は解である．また初期値問題の解の一意性を仮定しているので，$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b}$ を満たす微分方程式の解はこれ以外にない．

例 **5.48** 微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

の平衡点は方程式 $y_2 = 0, -\sin y_1 - y_2 = 0$ を解いて得られる $(y_1, y_2)^T = (n\pi, 0)^T$（$n$ は整数）である． □

一方，解が周期関数となることもあるが，この場合は解の軌跡は閉曲線になる．

例 **5.49**（周期軌道の例——単振動） 単振動の方程式を 1 階方程式に直した

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b}$$

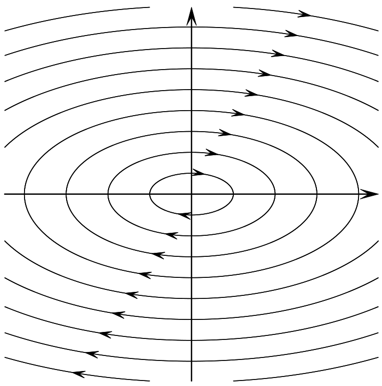
の解 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ はエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y_1^2 = \frac{1}{2}b_2^2 + \frac{1}{2}\omega^2 b_1^2$$

を満たす．これから解の軌道は 1 点 $\mathbf{0}$（$\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ の場合）か，楕円

$$\frac{y_1^2}{b_1^2 + (b_2/\omega)^2} + \frac{y_2^2}{(\omega b_1)^2 + b_2^2} = 1 \quad (\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0})$$

のいずれかである． □



例 5.49 $\omega = 1/2$ の場合の相平面

時計回りに移動する

5.11　初期値問題の基礎理論

5.11.1　はじめに

常微分方程式という方法論を使い始めてみてすぐに気がつくのは，問題の解を既知の関数で表すことができない場合がある，という事実である．このことは常微分方程式のもっとも簡単な場合と言える「原始関数を求める問題」ですでにそうであったことから，容易に了解できるであろう．

この困難を解決する一つの方法は，特定の問題の解を表現できるような新しい関数を導入することである．これは一定の成果をおさめたが，一方で解が存在すること自体を保証する方法[24)]が求められたのも当然のことであろう．

5.11.2　解の存在

常微分方程式の初期値問題の解の存在を保証するには，次の定理（コーシー・ペアノ（Peano）の定理とよばれる）が便利である（証明は省略）．

定理 5.50（f が連続ならば解は存在する）　$f(x,y)$ が連続関数ならば，

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

に対して，十分小さな範囲では解が存在する．つまり，ある正数 δ と，区間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ で定義された関数 u で，

$$u'(x) = f(x,u(x)) \quad (x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)), \quad u(x_0) = y_0$$

を満たすものが存在する． □

注意 5.51　しばしば「この微分方程式は現実に起っている現象を表しているのだから，解が存在するのは当たり前である」と考える人がいるが，それは誤解である．例えば物理現象を「記述する」微分方程式であるとしても，微分方程式は現象そのものではなく，せいぜい近似としか言えないものである．実際に現象が起こることは「状況証拠」に過ぎず，数学的な証明にはならない．

[24)] 例えば，高校数学の段階でも，方程式の解を具体的に式で表示できなくても，グラフによる考察（曲線と曲線が交わる——厳密には中間値の定理を根拠とする）から解の存在の証明せよ，あるいは解の個数を調べよ，という問題があった．

5.11.3 解の存在範囲

前項の定理で，δ という範囲を制限するものが出て来てしまったが，これは仕方がないことである．

例 **5.52** 常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

は変数分離形なので容易に解ける．これに

$$y(0) = a \quad (a \text{ は正定数})$$

という初期条件をつけた初期値問題の解は

$$y = \frac{1}{1/a - x} \quad (x \in (-\infty, 1/a)).$$

$\displaystyle\lim_{x \to 1/a-0} y = \infty$ となっている．このように解の大きさが無限大に発散することを解の爆発, そのときの変数の値（ここでは $1/a$）のことを爆発時刻とよぶ．$x \geq 1/a$ の範囲まで解を延長することは不可能であることに注意しよう．□

爆発が起らない場合は，解は方程式が意味を持つ（f の定義域をはみ出ない）範囲で存在することが知られている．爆発が起らないための十分条件としては，次のリプシッツ（**Lipschitz**）条件が有名である．

y に関するリプシッツ条件

$$\text{定数 } L \text{ が存在して} \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

特に $f(x, y)$ が y の 1 次関数（$f(x, y) = A(x)y + b(x)$ という形）である場合（言い換えると線形微分方程式の場合）は，ごく緩い仮定（例えば $A(x)$ が有界）の下でリプシッツ条件が成り立つ（したがって解の爆発は起らない）．

5.11.4 解の一意性

常微分方程式の初期値問題の解の存在が分かったとして，つぎに気になるのは，解がただ一つに限るかということである．

解の一意性が成り立たない例を紹介しよう．

例 **5.53**　微分方程式

(1) $$y' = 3|y|^{2/3}$$

について，変数分離形微分方程式の解法の定跡に従って（分母が 0 になるのを気にせずに）一般解を求めると

$$y = (x-C)^3 \quad (C\ \text{は任意定数})$$

が得られる．一方，

$$y = 0 \quad (\text{恒等的に } 0)$$

も微分方程式の解である．ところが，それ以外に

$$y = \begin{cases} (x-C_1)^3 & (x < C_1) \\ 0 & (x \geq C_1), \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & (x < C_2) \\ (x-C_2)^3 & (C_2 \leq x), \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} (x-C_1)^3 & (x < C_1) \\ 0 & (C_1 \leq x \leq C_2) \\ (x-C_2)^3 & (C_2 < x) \end{cases}$$

なども解になる（解を図示してみよ）．これらは初期条件 $y(0) = 0$ を課した初期値問題の解としても有効である（$C_1 \leq 0$, $C_2 \geq 0$ とすればよい）．　□

そこで解の一意性を保証する条件が知りたくなるが，次のものが有名である．

定理 **5.54**（リプシッツ条件をみたす場合の一意性）　連続関数 $f(x,y)$ が y に関するリプシッツ条件

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (L\ \text{は定数})$$

を満たすとき，常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (x \in [a,b]), \quad y(a) = y_0$$

の解 $y = \varphi_1(x) (x \in [a,b_1])$, $y = \varphi_2(x)$ $(x \in [a,b_2])$ に対して，

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad (x \in [a,b_*],\ b_* := \min\{b_1,b_2\})$$

が成り立つ．　□

証明　$\psi(x) := \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ $(x \in [a, b_*])$ とおく．

$$\varphi_j(x) = y_0 + \int_a^x f(s, \varphi_j(s))\, ds \quad (j = 1, 2)$$

より

$$\psi(x) = \int_a^x \left[f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\right]\, ds$$

ゆえに

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\le \int_a^x |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))|\, ds \\ &\le \int_a^x L\, |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds = L \int_a^x |\psi(s)| ds. \end{aligned}$$

ここで $M := \max_{x \in [a, b_*]} |\psi(x)|$ とおくと，

$$\begin{aligned} &|\psi(x)| \le LM(x-a), \\ &|\psi(x)| \le L \int_a^x LM(s-a)\, ds = L^2 M \frac{(x-a)^2}{2}, \\ &|\psi(x)| \le L \int_a^x L^2 M \frac{(s-a)^2}{2}\, ds = L^3 M \frac{(x-a)^3}{3!}, \cdots \end{aligned}$$

以下帰納的に

$$|\psi(x)| \le M \frac{[L(x-a)]^n}{n!} \le M \frac{[L(b_* - a)]^n}{n!} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

これから $n \to \infty$ の極限を考えると，$\psi(x) \equiv 0$ が分かる．ゆえに $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ $(x \in [a, b_*])$. □

常微分方程式の初期値問題の場合，一意性が成り立つというのは解が枝分かれをしないことであるから，一意性を保証するにはリプシッツ条件は局所的なもので十分であり（つまり L は全体で統一的に取れなくても構わない），例えば f が C^1 級であればよいことが分かる．すなわち次が成立する．

系 **5.55**（C^1 級ならば一意性が成立）　f が C^1 級の関数であるとき，常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (x \in [a, b]), \quad y(a) = y_0$$

の解 $y = \varphi_1(x)$ $(x \in [a, b_1])$, $y = \varphi_2(x)$ $(x \in [a, b_2])$ に対して，

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad (x \in [a, b_*],\ b_* := \min\{b_1, b_2\})$$

が成り立つ． □

上の例の $f(x, y) = |y|^{2/3}$ では，$y = 0$ で f は微分不可能で，リプシッツ条件も 0 のところで崩れていることに注意しよう．

まとめ

1 階正規形常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(x, y), \quad f(x_0) = y_0$$

については，

(1) f が連続であれば，(x_0, y_0) の十分近くで解は存在する．

(2) f が C^1 級であれば，解は一意である．

(3) f が C^1 級であっても爆発という現象がありうる．y に関するリプシッツ条件

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad (L \text{ は定数})$$

が成り立てば爆発は起こらない．特に有界な係数を持つ線形方程式では爆発は起こらない．

したがって自然数 $N \geq 3$ に対し

$$\int_{\pi/2}^{(N+1)\pi/2} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=2}^{N} \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=2}^{N} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\delta \cdot \frac{1}{k\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k}.$$

ここで $N \to \infty$ とすれば $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ は発散することが分かる.

6.19　複素変数の指数関数の性質の証明

5.5.5 で紹介した複素変数の指数関数の性質を確認しておく.

$z = x + iy$ $(x,y \in \mathbf{R})$ に対して

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

と定義するわけであるが, z が実数, 言い換えると $y = 0$ である場合, $\cos y + i \sin y = 1$ であるから, $e^z = e^x$ であり記号に矛盾はおこらない.

指数法則については, $z = x + iy$, $w = u + iv$ $(x, y, u, v \in \mathbf{R})$ としたとき,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x(\cos y + i \sin y) \cdot e^u(\cos v + i \sin v) \\ &= e^{x+u} [\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\cos y \sin v + \sin y \cos v)] \\ &= e^{x+u} (\cos(y+v) + i \sin(y+v)) = e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

$z = iy$ すなわち $x = 0$ の場合は $e^x = e^0 = 1$ であるから, Euler の公式 $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ は明らかである. 特に $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ であるから, $e^{i\pi} = -1$.

複素変数を持つ関数の微積分である関数論を学ぶと公式 $\dfrac{d}{dz}\left(e^{\lambda z}\right) = \lambda e^{\lambda z}$ が成り立つことは容易に確認できるが, ここでは実変数の関数 $\mathbf{R} \ni x \mapsto e^{\lambda x} \in \mathbf{C}$ の微分が $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) = \lambda e^{\lambda x}$ となることを示そう（本文の議論を展開するにはそれで十分なので）.

複素数値関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ に対しても，微分は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義するが，変数の各値 x における関数値 $f(x)$ を

$$f(x) = u(x) + iv(x) \quad (u(x),\, v(x) \in \mathbf{R})$$

と実部虚部に分解して二つの実数値関数 u, v を得るとき，

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

が成り立つ．

$\lambda = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ とするとき，$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{\lambda x} &= \frac{d}{dx}\left[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right] \\ &= \alpha e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}\cdot(-\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x) \\ &= e^{\alpha x}\left[(\alpha + i\beta)\cos\beta x + (i\alpha - \beta)\sin\beta x\right] \\ &= e^{\alpha x}(\alpha + i\beta)(\cos\beta x + i\sin\beta x) = \lambda e^{\lambda x}.\end{aligned}$$

指数関数 e^x, $\sin x$, $\cos x$ のマクローリン展開と，二つの絶対収束級数の積の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} a_j b_k,$$

および 2 項定理を用いると

$$\begin{aligned}e^z &= e^x(\cos y + i\sin y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{x^j}{j!}\frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!k!} x^j (iy)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+iy)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

6.20　2 階線形非同次方程式に対する定数変化法

定数 p, q と関数 $f(x)$ が与えられたとき，

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

の特解の求め方として，本文中では未定係数法を紹介したが，1 階線形非同次方程式のところで紹介した定数変化法（の変種）で特解を求めることもできる．この方法はさらに大きく二つに分類できる．

(a)　連立 1 階方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}(x)$$

に直して，公式[2)]

$$\boldsymbol{y} = e^{xA}\boldsymbol{y}_0 + e^{xA}\int_{x_0}^{x} e^{-tA}\boldsymbol{F}(t)\,dt$$

を用いる．

　この公式は定数変化法で簡単に導出できて「暗記要らず」であり，また理論的な考察には非常に便利だが，具体的な問題を解く場合には，計算は大げさと言うか非常に煩雑になりやすい．

(b)　直接 2 階方程式のままで扱う方法

同次方程式の解の基本系 y_1, y_2 を求めておいて，

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

とおいてみる．まず

$$y' = [c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2] + [c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'].$$

このまま y'' を計算するとき，第 1 項の微分が煩雑になるので，

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \tag{2}$$

[2)] 既に見た定数係数 1 階線形非同次方程式の解の公式（本文中にある）の一般化である．

という条件を仮定してしまう（c_1, c_2 に条件として課す）．すると，

$$y' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2',$$
$$y'' = [c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'] + [c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'']$$

であるから，

$$L[y] = y'' + py' + qy = c_1(x)L[y_1] + c_2(x)L[y_2] + [c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2']$$
$$= c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'.$$

ゆえに $L[y] = f(x)$ を満たすには，

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \tag{3}$$

でなければならない．
(2), (3) を連立方程式として解いて $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ を求め，積分して $c_1(x)$, $c_2(x)$ を求め，特解 $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ を得る．

例 **6.47**（**2** 階方程式に対する定数変化法の例）　$L[y] = y'' - 6y' + 8y = e^x$．まず同次方程式 $L[z] = 0$ の一般解は $z = Ae^{2x} + Be^{4x}$．そこで特解を

$$y = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x}$$

とおいてみる．

$$y' = \left(c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(c_1(x)2e^{2x} + c_2(x)4e^{4x}\right)$$

であるが

$$c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x} = 0 \tag{4}$$

を仮定すると

$$y' = 2c_1(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{4x}.$$

これから

$$y'' = \left(2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(4c_1(x)e^{2x} + 16c_2(x)e^{4x}\right).$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
L[y] &= \left(2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(4c_1(x)e^{2x} + 16c_2(x)e^{4x}\right) \\
&\quad - 6\left(2c_1(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{4x}\right) + \left(c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x}\right) \\
&= 2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}.
\end{aligned}
$$

これが e^x に等しければよいので，

$$
2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x} = e^x. \tag{5}
$$

(4), (5) をまとめて，

$$
\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}.
$$

これを c_1', c_2' について解く．

$$
\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}e^{-x} \\ \dfrac{1}{2}e^{-3x} \end{pmatrix}.
$$

これを満たす c_1, c_2 としては，例えば

$$
\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{-x} \\ -\dfrac{1}{6}e^{-3x} \end{pmatrix}
$$

とすれば良い．つまり特解として

$$
u = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x} = \frac{1}{2}e^{-x}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{-3x}e^{4x} = \frac{1}{3}e^x
$$

が得られる．これから $L[y] = e^x$ の一般解は

$$
y = Ae^{2x} + Be^{4x} + \frac{1}{3}e^x. \square
$$

この方法も理論的な問題にはしばしば効力を発揮するが，実際の問題を解くには計算が面倒になりがちである．

6.21　ラプラス変換と微分方程式

6.21.1　定義と計算

f が区間 $[0,\infty)$ で定義された複素数値の関数であり，適当な $s \in \mathbf{R}$ に対して

$$(1) \qquad L[f](s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

が意味を持つ（右辺の広義積分が収束する）とき，関数 $L[f]$ を f のラプラス（**Laplace**）変換とよぶ．右辺の広義積分が収束するとき，ラプラス変換は収束するという．

積分範囲が非有界である広義積分なので，f が連続であると仮定するだけでは，ラプラス変換が収束するとは限らないことに注意する．一方ある s_0 に対してラプラス変換が収束するとき，$s > s_0$ をみたす任意の s に対してラプラス変換は収束し，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$$

となる（証明は難しくないが省略する）．

例 **6.48**　(1) $f(t) = 1$ とするとき，

$$L[f](s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}\,dt.$$

$s = 0$ ならば明らかに発散する．$s \neq 0$ のとき

$$L[f](s) = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^R = \lim_{R\to\infty} \frac{1 - e^{-sR}}{s}.$$

これが収束するには $s > 0$ であることが必要十分で，そのとき極限は $1/s$. まとめると，

$$L[f](s) = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

(2) $f(t) = e^{2t}$ とするとき，

$$L[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{2t}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{(2-s)t}\,dt.$$

この後の議論は (2) と同様で，広義積分が収束するための必要十分条件は $s > 2$ で，このとき

$$L[f](s) = \frac{0-1}{2-s} = \frac{1}{s-2}.$$

(3) $f(t) = t$ とする．

$$L[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} t\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} t\,dt$$

であるが，$s = 0$ ならばこの広義積分が発散することは明らか．$s \neq 0$ ならば部分積分して

$$\int_0^R e^{-st} t\,dt = \frac{1 - e^{-sR}(1+Rs)}{s^2}.$$

これから，広義積分が収束するための必要十分条件は $s > 0$ で，このとき $L[f](s) = \dfrac{1}{s^2}$ であることが分かる．

(4) $f(t) = e^{t^2}$ とするとき任意の実数 s に対して，$L[f](s) = \infty$ であり，f のラプラス変換は定義されない． □

注意 6.49 $L[\ ]$ のかっこ $[\ ]$ の中に関数を表す文字でなく，直接 t の式を書いて表すこともある．この書き方を使うと上の例の結果は $L[1](s) = \dfrac{1}{s}$, $L[e^{2t}](s) = \dfrac{1}{s-2}$, $L[t](s) = \dfrac{1}{s}$ と書ける． □

命題 6.50（線形性） (1) 関数 f, g に対して，$L[f](s)$ が $s > a$ で，$L[g](s)$ が $s > b$ で収束するならば，$L[f+g](s)$ は $s > \max\{a,b\}$ で収束し，

$$L[f+g](s) = L[f](s) + L[g](s) \quad (s > \max\{a,b\}).$$

(2) 関数 f に対して $L[f](s)$ が $s > a$ で収束するとき，任意の実数 c に対して $L[cf](s)$ は $s > a$ で収束し，

$$L[cf](s) = cL[f](s) \quad (s > a).\Box$$

証明は簡単（積分の線形性を使うだけ）なので省略する．

簡単な関数（非同次方程式の特解を発見する方法のところで述べた擬多項式）のラプラス変換についてまとめておこう．

命題 6.51　(1)　任意の複素数 a に対して

$$L\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a} \quad (s > \mathrm{Re}\, a).$$

(2)　任意の自然数 n に対して

$$L\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right](s) = \frac{1}{s^n} \quad (s > 0).$$

(3)　任意の実数 ω に対して

$$L\left[\cos \omega t\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad L\left[\sin \omega t\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.\square$$

証明　(1) は上の例と同様なので略する．(2) は部分積分によって

$$L\left[t^{n+1}\right](s) = \frac{n+1}{s} L[t^n](s)$$

という漸化式を得るので後は帰納法を用いればよい．(3) は Euler の公式を使って，

$$\begin{aligned}
L[\cos \omega t](s) &= L\left[\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right](s) = \frac{L\left[e^{i\omega t}\right](s) + L\left[e^{-i\omega t}\right](s)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \\
L[\sin \omega t](s) &= L\left[\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right](s) = \frac{L\left[e^{i\omega t}\right](s) + L\left[e^{-i\omega t}\right](s)}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.\square
\end{aligned}$$

注意 6.52　上の命題の内容は次のように一般化してまとめられる．

$$L\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{at}\right] = \frac{1}{(s-a)^\alpha} \quad (s > \mathrm{Re}\, a).$$

ただし Γ はガンマ関数[3)]を表す．　□

3) ガンマ関数については第 4 章で学ぶ．a が自然数のとき $\Gamma(a) = (a-1)!$.

6.21.2 逆ラプラス変換

ラプラス変換 $L[f](s)$ が恒等的に 0 になるような関数 f は，それ自身恒等的に 0 であることが証明できる．ゆえに与えられた関数 φ に対して，任意の s に対して $L[f](s) = \varphi(s)$ が成り立つような関数 f は，もし存在するならば一意的に定まる:

$$L[f_1] = L[f_2] = \varphi \quad \Longrightarrow \quad f_1 = f_2.$$

そのような f のことを φ の逆ラプラス変換とよび，$L^{-1}[\varphi](t)$ で表す．

例 **6.53** $L[1](s) = \dfrac{1}{s}$ であるから，$L^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] = 1$, $L[e^{2t}](s) = \dfrac{1}{s-2}$ であるから，$L^{-1}\left[\dfrac{1}{s-2}\right](t) = e^{2t}$. $L[t](s) = \dfrac{1}{s^2}$ であるから，$L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right] = t$. □

ラプラス変換の線形性から，逆ラプラス変換の線形性

$$L^{-1}[\varphi + \psi](s) = L^{-1}[\varphi](s) + L^{-1}[\psi](s),$$
$$L^{-1}[c\varphi](s) = cL^{-1}[\varphi](s) \quad \text{（ただし } c \text{ は定数）}$$

が導かれる．

不定積分の計算をするための方法として，事前に色々な関数の導関数を調べておいて，それを逆向きに読むということがかなりの部分を占めたが，逆ラプラス変換の計算でも事情は似ていて，事前に色々な関数のラプラス変換を調べておいて，それを逆向きに読むことで逆ラプラス変換を求めることが多い．

よく使われるものを表にしてまとめておこう．

$f(t)$	$\varphi(s) = L[f](s)$	収束範囲	原関数	ラプラス変換
1	$1/s$	$s > 0$	$t^n f(t)$	$(-1)^n \varphi^{(n)}(s)$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$	$\dfrac{1}{t} f(t)$	$\displaystyle\int_s^\infty \varphi(s)\, ds$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > \mathrm{Re}\, a$	$e^{at} f(t)$	$\varphi(s-a)$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$	$f'(t)$	$s\varphi(s) - f(0)$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$	$\displaystyle\int_0^t f(t)\, dt$	$\dfrac{1}{s}\varphi(s)$
$\sinh \omega t$	$\dfrac{a}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert\omega\rvert$	$f(t-a)(a \geq 0)$	$e^{-as}\varphi(s)$
$\cosh \omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert\omega\rvert$	$f(at)(a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\varphi\left(\dfrac{s}{a}\right)$

6.21.3 微分方程式への応用

定理 6.54 任意の自然数 n について

(2) $L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).\square$

証明 任意の正数 R に対して

$$\int_0^R e^{-st} f'(t)\, dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^R + s \int_0^R e^{-st} f(t)\, dt.$$

$R \to \infty$ のとき $e^{-sR} f(R) \to 0$ となるので,

$$L[f'](s) = sL[f](s) - f(0).$$

この公式を 2 回使って

$$\begin{aligned} L[f''](s) &= L[(f')'](s) = sL[f'](s) - f'(0) \\ &= s\,(sL[f](s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2 L[f](s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

以下同様にして (2) が示せる（正確には帰納法による）. $\square$

この定理は定数係数線形常微分方程式を解くために利用できる.

例 **6.55**（定数係数線形常微分方程式の初期値問題）　微分方程式の初期値問題

$$y'' - y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

を考える．この微分方程式の両辺のラプラス変換を取り，線形性を用いると

$$L[y''](s) - L[y](s) = L[1](s).$$

定理 6.54 を用いると

$$s^2 L[y](s) - sy(0) - y'(0) - L[y](s) = L[1](s).$$

初期条件と $L[1](s) = 1/s$ を代入して，

$$s^2 L[y](s) - s \cdot 0 - 1 - L[y](s) = \frac{1}{s}.$$

$L[y](s)$ について解くと

$$L[y](s) = \frac{1}{s(s-1)}.$$

右辺を部分分数分解して

$$L[y](s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

これを逆ラプラス変換すると

$$y = L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) - L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) = e^t - 1.\square$$

問題

1.　積分を直接計算することによって，つぎの関数のラプラス変換を求めよ．また本文中で紹介した定理を利用する別解も考えよ．

(1) t^2　(2) $\sin at$　(3) $\cos at$　(4) te^{at}　(5) $e^{at}\cos bt$　(6) $e^{at}\sin bt$

2.　つぎの関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $e^{-2t} + 2e^{-5t}$　(2) $1 - e^{-t}$　(3) $-5e^{-2t} + 8e^{-3t}$　(4) $2 + e^{-2t} - 3e^{-3t}$

(5) $e^{-t} - e^{-5t}$　(6) $e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t$　(7) $1 - 2\sin 5t$

(8) $\dfrac{1}{a^2}\left(t - \dfrac{1}{a}\sinh at\right)$　(9) $t\cosh t$　(10) $e^{-3t} + 2e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$

3. つぎの関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{3s+9}{s^2+7s+10}$ (2) $\dfrac{1}{s(s+1)}$ (3) $\dfrac{3s+1}{s^2+5s+6}$ (4) $\dfrac{7s+12}{s(s+2)(s+3)}$

(5) $\dfrac{4}{s^2+6s+5}$ (6) $\dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$ (7) $\dfrac{s^2-10s+25}{s(s^2+25)}$ (8) $-\dfrac{1}{s^2(s^2-a^2)}$

(9) $\dfrac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$ (10) $\dfrac{3s^2+9s+5}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

4. ラプラス変換を利用して，つぎの初期値問題を解け（独立変数は t）．

(1) $y''-2ay'+a^2y=0$, $y(0)=b$, $y'(0)=c$

(2) $y''-3y'+2y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$

(3) $y''+y=t$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$

(4) $y'''+y''+4y'+4y=-2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$

(5) $y''-y'-6y=3t^2+t-1$, $y(0)=-1$, $y'(0)=6$

(6) $4y''+y=-2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1/2$

(7) $y''+2y'+y=e^t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

(8) $y''+2y'+3y=3t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

(9) $2y''+6y=1$, $y(0)=a$, $y'(0)=b$

(10) $y''+3y=\sin t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

(11) $y'''+y'=e^{3t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$

5. ラプラス変換を利用して，つぎの連立微分方程式の初期値問題を解け．

$$\begin{cases} y'=ay+bz+p(z) \\ z'=cy+dz+q(z) \end{cases} \quad \begin{cases} y(0)=k \\ z(0)=\ell \end{cases} \quad (a,\ b,\ c,\ d,\ k,\ \ell\ \text{は定数})$$

(逆ラプラス変換を実行する必要はない．)

6.22 べき乗の定義

a の b 乗 a^b について，高等学校では以下の場合にとりあえず「定義」が済んでいる．おさらいしておこう．

(13) $\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$ (14) $\dfrac{b^2}{a(a^2+b^2)}$ (15) $\dfrac{\pi}{2a}$ (16) $\dfrac{\pi}{2}$
(17) -2

2. (1) $9a^{2/3}$ (2) $\pi/4$ (3) $\log\dfrac{2}{3}$ (4) $1/3$ (5) $\log 2$

4.2 **1.** (1) 収束 (2) 収束 (3) 発散 (4) 収束
(5) 発散 (6) 発散 (7) 収束 (8) 発散 (9) 収束
(10) 収束 (11) 収束 (12) 収束 (13) 収束 (14) 収束
(15) 収束 (16) 収束 (17) 収束 (18) 収束 (19) 収束
(20) 発散 (21) 収束 (22) 発散

絶対収束の問題の解答（本文中にも挿入した）

2. 1) 発散 2) 収束 3) 発散 4) 収束 5) 収束 6) 発散 7) 発散 8) 収束 9)$k>2$ なら収束，$k\leq 2$ なら発散 10) 収束 11) 収束 12) 収束 13) 収束 14) 収束 15) 発散 16) 収束 17) 収束 18) 発散 19) 収束

第 5 章　微分方程式

5.1 **1.** (1) 2 階，$y''=-\dfrac{1}{x^2}yy'+\dfrac{3}{x}$ (2) 1 階，$y'=\pm\sqrt{y^2+\log(1+x^2)}$
(3) 3 階，$y'''=\dfrac{(y'')^2}{y}$ (4) 2 階，$y''=\dfrac{2x}{1-x^2}y'-\dfrac{6}{1-x^2}y$
(5) 4 階，$y^{(4)}=\dfrac{2}{3}y^{(3)}-\dfrac{1}{3}y-\dfrac{1}{3}e^x$ (6) 3 階，$y'''=-\dfrac{1}{x}y''-\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)y'$
(7) 2 階，$y''=\pm\sqrt{k(1+(y')^2)}$ (8) 2 階，$y''=-\dfrac{2}{x}y'-4y$

2. 略

3. (1) $y'=0$ (2) $y'=\dfrac{y}{x}$ (3) $y'=\dfrac{2}{x}y-\dfrac{2}{x}$ (4) $y'=\dfrac{2}{x}y-1$
(5) $y'=\dfrac{y}{x+1}$ (6) $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x}y$ (7) $(y')^2+2x^3y'-4x^2y=0$
(8) $y'=y$ (9) $y'=\cos(\sin^{-1}y)$, $((y')^2+y^2=1)$ (10) $yy'+x=0$
(11) $y'=3y^{2/3}$ (12) $y''=0$ (13) $x^2y''-2xy'+2y=0$ (14) $y'''=0$
(15) $y''-3y'+2y=0$ (16) $y''-a^2y=0$ (17) $y''+y=0$
(18) $2yy''=(y')^2$

4. (1) $y=1+\dfrac{C}{x}$ (2) $y=\dfrac{x^2}{4}+C_1\log|x|+C_2$ (3) $x^2+a^2y^2=C$

(4) $y = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2}$ (5) $y^2 + 2xy = C$ (6) $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1} x + C\right)$
(7) $a^2 - y^2 = (C \pm x)^2$ (8) $y = a\sin(C \pm x)$
(9) $y = C_1 \sin(C_2 \pm x)$ (10) $y = x\left(C + \displaystyle\int f(x)\,dx\right)$

5.2 **1.** (1) $y = C/x$ (2) $y = -\dfrac{1}{\log|x| + C}$ (3) $y = \dfrac{1+Cx}{1-Cx}$, $y = -1$
(4) $y = \dfrac{2x^2}{Cx^2 - 1}$ (5) $y = (x+C)^3$ (6) $y = 1 + \left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2$
(7) $y = \dfrac{x}{Cx-1}$ (8) $y^2 = \dfrac{5x^5}{Cx^5 - 2}$ (9) $y = \dfrac{Cx}{x+1}$ (10) $y = \dfrac{1}{ax+C}$
(11) $y = \cot^{-1}(\log|\cos x| + C)$ (12) $y - \log|y| = x + \log C|x|$
(13) $\sin x \cos y = C$ (14) $y = \left(\dfrac{1}{3}\log|1+x^3| + C\right)^{-1}$
(15) $y = -\dfrac{b(C + e^{2abx})}{C - e^{2abx}}$ (16) $y = \tan^{-1}(\tan^{-1} x + C)$
(17) $y = \tan^{-1}(x - \cos x + C)$ (18) $y = C\sqrt{|x^2 - 1|}$
(19) $\dfrac{1}{2}y^2 + \log|y| = \dfrac{1}{2}x^2 + \log C|x|$ (20) $y - \log|y+1| = \dfrac{1}{2}x^2 + C$
(21) $y = \dfrac{C + x^2}{C - x^2}$, $y = 1$ (22) $y = -\dfrac{1}{2}\log(-e^{2x} + C)$ (23) $y = \log(C - e^{-x})$
(24) $y = Ce^x$ $(C > 0)$ または $y = Ce^{-x}$ $(C < 0)$ (25) $y^2 = x^2 + C$
(26) $x > 0$ のとき $y = (\sqrt{x} + C)^2$, $x < 0$ のとき $y = -(\sqrt{-x} + C)^2$ (27) $x > 0$ のとき $y = ((\sqrt{x})^3 + C)^{2/3}$, $x < 0$ のとき $y = -((\sqrt{-x})^3 + C)^{2/3}$ (28) $y = \dfrac{x}{Cx+1}$
(29) $y = \dfrac{2x^2}{Cx^2 + 1}$ (30) $y^2 = (\sqrt{1+x^2} + C)^2 - 1$

2. (1) $y^2 = C(x^2+1)^2 - 2$ (2) $|y| = \exp(-\exp(2x) + C)$
(3) $y = \tan\log C|x|$ (4) $y = \cot^{-1}(\tan x + C)$ (5) $\log|y| + \dfrac{1}{4}y^2 = \dfrac{1}{x^2} + C$
(6) $y = \dfrac{C}{\sin x}$ (7) $y^2 = C(x^2+2)^4 - 1$ (8) $y = \log(e^x + C)$
(9) $y^2 = C(x^2+1) - 1$

5.3 **1.** (1) $y = Ce^{-ax}$ (2) $y = Ce^{-ax} + \dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$
(3) $y = (C + x)\,\mathrm{cosec}\, x$ (4) $y = Ce^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$ (5) $y = C\sec x - \dfrac{1}{2}\cos x$

(6) $y = Ce^{x^2} + xe^{x^2}$ (7) $y = Ce^{-\sin x} + 2(\sin x - 1)$
(8) $y = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{2}(x\log x - \dfrac{1}{2}x)$ (9) $y = Ce^{-ax} + \dfrac{1}{a+b}e^{bx}$
(10) $y = C|x|^{-a}$ (11) $y = C\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right) - 1$ (12) $y = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}x^3$
(13) $y = \dfrac{C}{x} + 2x + x^3$ (14) $y = Cx + \dfrac{1}{2}x(x - \cos x \sin x)$
(15) $y = (C + \cos x)e^{-\sin x}$ (16) $y = Cx - \dfrac{x}{2}\log(1 - x^2)$
(17) $y = Ce^{ax} - \dfrac{1}{1+a^2}(a\sin x + \cos x)$ (18) $y = \sqrt{1+x^2}(C + \tan^{-1} x)$
(19) $y = Ce^{-x-x^3/3} + e^{-x^3/3}$
(20) $y = Ce^{-ax} + \dfrac{b}{a}x^2 + \dfrac{1}{a}\left(c - \dfrac{2b}{a}\right)x + \dfrac{1}{a}\left(d - \dfrac{c}{a} + \dfrac{2b}{a^2}\right)$
(21) $y = \dfrac{C}{x}e^{-x} + \dfrac{1}{2x}e^{x}$

2. (1) $y = -e^{-x} + 1$ (2) $y = e^{-x} + x - 1$ (3) $y = bx^{-a}$
(4) $y = \dfrac{1}{1+a^2}(e^{ax} - a\sin x - \cos x)$ (5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$
(6) $y = 2\cos x \ (-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2})$

3. (1) $y = -e^{x}$ (2) $y = -e^{x^2/2}$ (3) $y = \dfrac{1}{4}\left(x^2 + 1 - \dfrac{1}{x^2+1}\right)$

5.4 **1.** (1) $(x+y)(y-2x)^2 = C$ (2) $y = \dfrac{C}{x} + x$
(3) $y = x\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\log|x| + C}\right)$ (4) $x^2 + 4xy - 2y^2 = C$
(5) $(x-y)(x-3y) = C$ (6) $y + \sqrt{x^2+y^2} = C$ (7) $y = x\left(\dfrac{x^3 - 2C}{2x^3 - C}\right)$
(8) $y^3 = 3x^3 \log Cx$ (9) $y = x\tan^{-1}(\log|x| + C)$
(10) $y = x(\pi - 1 - \cos^{-1}\log Cx)$ (11) $x^2 - y^2 = Cx$
(12) $x^2 + y^2 = C(2x+y)$ (13) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = C$

2. (1) $y = \left(\dfrac{C}{x^2+1} + 2\right)^2$ (2) $y = \dfrac{x^2+1}{x\sin x + \cos x + C}$
(3) $y^2 = \dfrac{1}{1 + Ce^{2x^2}}$ (4) $(C - 2x)y^2 = e^{-x^2}$ (5) $(C + 2x)y^2 = e^{x^2}$
(6) $y^{-1/3} = -2x + Cx^{2/3}$ (7) $2\sqrt{y} = \log x - 1 + \dfrac{C}{x}$ (8) $y(C - \sin x) = x^2$
(9) $y = \dfrac{1}{16(x-1)^2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C\right]^2$

3. (1) 1, $(y-1)(1-x+Ce^{-x})=1$ (2) 2, $(y-2)(1-3x+Ce^{-3x})=9x$
(3) x, $(x-y)\left(\int e^{-x^2/2}\,dx+C\right)=e^{-x^2/2}$
(4) $4x$, $(y-4x)\left(C-\int e^{2x^2}\,dx\right)=e^{2x^2}$ (5) x^2, $(y-x^2)(C-x)=1$
(6) $\sqrt{x}$, $(y-\sqrt{x})\left(-\dfrac{1}{2}+Ce^{-(4/3)\sqrt{x}^3}\right)=\sqrt{x}$
(7) -1, $(y+1)(1-Ce^{-x})+1=0$ (8) 1, $(y-1)(C-x)=1$

4. (1) $x-y=\coth(x+C)$ (2) $\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)=x+C$
(3) $\sin(x+y)=x+C$ (4) $x+y+2=Ce^{y}$ (5) $x+y+1=Ce^{x-y}$
(6) $(x+y+1)^2-(x+y)\sqrt{(x+y)^2-1}+\cosh^{-1}(x+y)=4x+C$

5. (1) $C(y-x-4)^2=e^{(x+9)/(y-x-4)}$
(2) $x=Ce^t\cos t-\dfrac{1}{2}$, $y=Ce^t\sin t-\dfrac{1}{2}$

5.5 **1.** (1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ (2) $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$
(3) $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$ $(a\neq 0)$, $y=C_1+C_2x$ $(a=0)$
(4) $y=C_1e^{(-a/2+\sqrt{a^2/4-k^2})x}+C_2e^{(-a/2-\sqrt{a^2/4-k^2})x}$ $(|a|\neq|2k|)$,
$y=C_1e^{-(a/2)x}+C_2xe^{-(a/2)x}$ $(|a|=|2k|)$ (5) $y=C_1e^{-x}+xC_2e^{-x}$
(6) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ (7) $y=C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\sin x$
(8) $y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x$

2. (1) $C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3e^{4x}$ (2) $C_1e^{-3x}+C_2e^{x}+C_3e^{5x}$
(3) $C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3e^{2x}$ (4) $C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$
(5) $C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_ex^2e^{-x}+C_4x^3e^{-x}$
(6) $C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3e^{-2x}+C_4xe^{-2x}$
(7) $C_1\cos x+C_2x\cos x+C_3\sin x+C_4x\sin x$
(8) $C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3\cos x+C_4\sin x$

5.6

1. (1) $y=\dfrac{1}{3}e^{x}+C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ (2) $y=-\dfrac{3}{2}xe^{2x}+Ae^{2x}+Be^{4x}$
(3) $\dfrac{1}{10}(3\cos x+\sin x)+C_1e^{x}+C_2e^{2x}$ (4) $-xe^{x}+C_1e^{x}+C_2e^{2x}$ (5) $a\neq 0$ のとき $\left(\dfrac{x^2}{4a}-\dfrac{x}{4a^2}\right)e^{ax}+C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$, $a=0$ のとき $y=\dfrac{x^3}{6}+C_1+C_2x$

(6) $a \neq 0$ のとき，$y = \left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{2}{a^4}\right) + C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$, $a = 0$ のとき $y = \dfrac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$ (7) $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + C_1 + C_2 x\right) e^{-x}$ (8) $y = x^2 - 4x + 6 + (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ (9) $y = \dfrac{x}{9} + \dfrac{2}{27} + \dfrac{e^x}{4} + (C_1 + C_2 x)\, e^{3x}$ (10) $y = \dfrac{1}{50}(4\cos x - 3\sin x) + (C_1 + C_2 x)e^{3x}$ (11) $y = -\dfrac{1}{4}(x^2 + 3x) + C_1 + C_2 e^{2x}$

2. (1) $y = -\dfrac{1}{12}e^{-x} + (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x}$

(2) $y = xe^x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)e^{2x}$

(3) $y = \dfrac{x^2}{32}e^{2x} + \dfrac{\sin 2x}{64} + (C_1 + C_2 x)e^{2x} + (C_3 + C_4 x)e^{-2x}$

(4) $y = -\left(1 + \dfrac{x}{4}(\sin x + e^{-x})\right) + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

(5) $y = -\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}e^x + C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$

5.7 1.

2. 弧長は $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

3. （ヒント）速度は $\boldsymbol{v}(t)$ とすると，等速運動であることは $(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{v}(t)) = C$（$C$ は定数）と表せる．この式を微分する．

5.9 1. (1) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{6x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$

第 6 章　付録と補足

6.7　**1.**　(1) -1　(2) k　(3) $5/3$　(4) 1　(5) ∞　(6) $25/9$
(7) -1　(8) $1/2$　(9) ∞　(10) 0　(11) ∞　(12) -1

2.　(1) 0　(2) $1/2$　(3) $-1/2$　(4) 0　(5) 1　(6) $\log a$
(7) $\log \dfrac{a}{b}$　(8) $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$　(9) $1/6$　(10) $1/6$　(11) $1/2$　(12) 1
(13) $2/\pi$　(14) 0　(15) $1/e$　(16) 1　(17) 1　(18) 1
(19) $-e/2$

6.21　**1.**　(1) $\dfrac{2}{s^3}$　(2) $\dfrac{a}{s^2+a^2}$　(3) $\dfrac{s}{s^2+a^2}$　(4) $\dfrac{1}{(s-a)^2}$
(5) $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$　(6) $\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$

2.　(1) $\dfrac{3s+9}{s^2+7s+10}$　(2) $\dfrac{1}{s(s+1)}$　(3) $\dfrac{3s+1}{s^2+5s+6}$
(4) $\dfrac{7s+12}{s(s+2)(s+3)}$　(5) $\dfrac{4}{s^2+6s+5}$　(6) $\dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$　(7) $\dfrac{s^2-10s+25}{s(s^2+25)}$
(8) $-\dfrac{1}{s^2(s^2-a^2)}$　(9) $\dfrac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$　(10) $\dfrac{3s^2+9s+5}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

3.　(1) $e^{-2t}+2e^{-5t}$　(2) $1-e^{-t}$　(3) $-5e^{-2t}+8e^{-3t}$　(4) $2+e^{-2t}-3e^{-3t}$
(5) $e^{-t}-e^{-5t}$　(6) $e^{-t}\cos 2t+e^{-t}\sin 2t$　(7) $1-2\sin 5t$
(8) $\dfrac{1}{a^2}\left(t-\dfrac{1}{a}\sinh at\right)$　(9) $t\cosh t$　(10) $e^{-3t}+2e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$

4.　(1) $y=be^{at}+(c-ab)te^{at}$　(2) $y=5e^t-2e^{2t}$　(3) $y=t+\cos t+2\sin t$
(4) $y=\dfrac{3}{10}\cos 2t+\dfrac{3}{5}\sin 2t+\dfrac{1}{5}e^{-t}-\dfrac{1}{2}$　(5) $y=\dfrac{4}{5}e^{3t}-\dfrac{9}{5}e^{-2t}-\dfrac{1}{2}t^2$
(6) $y=2\cos\dfrac{t}{2}+\sin\dfrac{t}{2}-2$　(7) $y=\dfrac{1}{4}e^t-\dfrac{1}{4}e^{-t}-\dfrac{1}{2}te^{-t}$
(8) $y=\dfrac{2}{3}e^{-t}\cos\sqrt{2}t+\dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}\sin\sqrt{2}t+t-\dfrac{2}{3}$
(9) $y=\left(a-\dfrac{1}{6}\right)\cos\sqrt{3}t+\dfrac{b}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t+\dfrac{1}{6}$
(10) $y=\dfrac{1}{2}\sin t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin\sqrt{3}t$　(11) $y=\dfrac{3}{10}\cos t-\dfrac{1}{10}\sin t+\dfrac{1}{30}e^{3t}-\dfrac{1}{3}$

5.

$$y=L^{-1}\left[\frac{(s-d)(L[p]+k)+b(L[q]+\ell)}{s^2-(a+d)s+ad-bc}\right],$$

$$z = L^{-1}\left[\frac{(s-a)(L[q]+\ell)+b(L[p]+k)}{s^2-(a+d)s+ad-bc}\right].$$