



Iwanami Mathematics

はじめての応用解析

Approach to and Encounter with
Applied Analysis

藤田 宏 Hiroshi Fujita

齊藤宣一 Norikazu Saito

現象の解析を舞台に
数学と出会う

講義にはもちろん、自習にも最適なテキスト



定価 (本体2800円+税) 岩波書店

はじめての応用解析

Iwanami Mathematics



はじめての応用解析

Approach to and Encounter with
Applied Analysis

Hiroshi Fujita 藤田 宏

Norikazu Saito 齊藤宣一

岩波書店

はしがき

本書の標題の「応用解析」は、解析学の応用を意味している。解析は、代数や幾何と併せて数学を大まかに区分したときの分野であり、微積分法の延長にあるといてよい。解析学の先端的な部分には微分方程式論、関数解析学、数値解析学が含まれる。

数学の応用は、自然界の現象や産業における課題などといった対象に関わるが、それぞれの目的意識からは、次の二通りに分けられる：

- (1) 数学の光により対象を解明し、その仕組みを理解する。
- (2) 数学の力により対象に働きかけ、課題を達成する。

古典的な大学制度に合わせた表現でいえば、(1)は理学部的(基礎科学的)な探究であり、(2)は工学部的(目的科学的)な達成である。医学になぞらえれば、(1)は基礎医学的な営みであり、(2)は臨床医学的な営みである。

さらに、(1)(2)のどちらの遂行に際しても、支えは「概念と方法」であると主張したい。細かくいえば、(1)では、そこにふさわしい「(数学的)概念」を用いて数学的なモデルをつくり、それを「(数学的)方法」によって解析し、納得できる結果が得られれば成功である。(2)では、数学的にモデル化された現象への有効な「働きかけ」をもたらす「(数学的)方法」の選定・創出が決め手となる。

純粋数学では、証明による体系性の担保が唯一の課題であるのに対して、応用数学では、概念(による理解)と方法(による達成)が眼目であり、学習法のスローガンでもある。本書の各章の題材の選択や論述の展開は、この趣旨にそって編成されている。

ちなみに、数学とその応用を、科学技術の諸分野との連携において位置付

け、かつ推進しようという数理科学は、前世紀の中ごろからその振興が叫ばれてきた。今世紀に到り、IT革命による学術情報の生成・伝達・知的処理の進歩により、世界中で数理科学が興隆している(実践的応用を前面に出すときは、応用数理との呼び名を用いる)。対象分野は伝統的な理工学を越えて、生命科学や社会科学に及んでいる。最近話題の人工知能(AI)技術やビッグデータ解析もその一翼である。

最新技術の基盤を支える数理を、(ブラックボックスとして敬遠しないで)知的な素人として、あるいは、専門性に応じて然るべく理解しておくことは、これからの社会で「知的に生きる力」である。その趣旨からもできるだけ多くの皆さんが本書により応用解析になじまれることを願っている。

他方、このような数理科学の営みが、興味深い数学現象を提示することによって、数学自身に活性を与え、発展的な数学の新分野をもたらすことは歴史が示している。応用解析の学習を数学者志望の人達にもすすめる所以である。

初心の方が本書を読むにあたっては、まずは、概念、問題設定、解析方法の大筋の把握を目指すのでよい。それだけでも十分有意義な歩留まりである。ただし、途中で止めないだけの熱意を持ち続けることはお願いしたい。数学の勉強では、わからないことに遭遇すると一歩も先に進めないというのは迷信である。わからないことはわからないままに受けとめておき、ひるまず勉強を続けるのがよい。この点は外国語の会話の勉強と同様である。

本書の前身は、筆者のうちの藤田が1991年に放送大学のテキストとして作成した単行本『応用数学』である。このテキストは複数回の改訂を経ながら12年間にわたり放送大学で使用され、また刊行された。実は、若手の筆者である齊藤は、学部学生のとときに、『応用数学』をゼミナールテキストとして、藤田の指導の下で学んだ。そして、大学(教育学部)の教員の任についた齊藤は、『応用数学』をテキストに用いて、講義やゼミの指導を行った。その経験によれば、『応用数学』は、その後に本格的な数学の勉強に進む学生にとって、ちょうど良い入門書となり、また、数学を学ぶ時間が限られている学生にとっても、基礎と応用を同時に学ぶことができる最良のテキストであった。

放送大学からの出版が終わった後、藤田・齊藤の両者の共著として、当世の応用解析にふさわしい加筆・修正を加え、岩波書店から本書を刊行することが決まったのは実は7年以上も前のことであった。この延引は、主として高齢の著者藤田の手元での停滞が理由であったが、一方、その間に、本書が掲げた目標の切実さが、時代のうねりとして強く認知される推移があり、さらに、著者齊藤が東京大学の数理科学研究科において数値解析の先端的な研究教育を担当し、その経験を本書に反映することができた。これらのことは佳しとしたい。

最後に、上記の長期の準備期間にわたり本年5月末の退職の日まで、絶えず有益な忠告と我慢強い激励によって著者達を支えて下さった元岩波書店編集部の吉田宇一氏と著作の仕上げの段階で尽力して下さった同編集部の彦田孝輔氏に感謝の意を捧げたい。

令和元年8月

藤田 宏
齊藤 宣一

目次

はしがき

本書で学ぶ際の心構え

1 増殖の数理	1
1.1 変化と関数	1
1.2 変化率	2
1.3 変化の法則	3
1.4 増殖率が一定な変化	4
1.5 非線形方程式に従う増殖	9
1.6 初期値問題の解の爆発など	11
問題	13
ノート	14
1. A 自然対数の底 e	14
1. B 変数分離法	16
2 振動の数理	19
2.1 自然界における振動現象	19
2.2 単振動	20
2.3 ニュートンの力学の法則	21
2.4 簡単な例	23
2.5 調和振動子	26
2.6 2階線形微分方程式と特性根の方法	28
2.7 減衰振動	33

問題	35
ノート	35
2. A 特性根の方法への補足	35
2. B 非同次の微分方程式	38
3 競合の数理	39
3.1 一方的な影響がある場合	39
3.2 互いに影響がある場合——特性根を用いる解析	43
3.3 互いに影響がある場合——行列を用いる解析	45
3.4 軍拡競争のモデル	49
問題	52
ノート	53
3. A 行列の指数関数	53
4 惑星運動の数理	57
4.1 惑星の運動とニュートン	57
4.2 惑星の運動方程式	58
4.3 保存量	62
4.4 円軌道の場合	65
4.5 一般の場合の解析	68
問題	76
ノート	77
4. A 2次曲線の極座標での方程式	77
4. B 惑星の運動が平面運動であることの証明	79
5 弦のつり合いの数理	83
5.1 弦のつり合い	83
5.2 弦の境界値問題の解法	88
5.3 グリーン関数	90
5.4 安定性	92
問題	94

ノート	96
5. A 境界値問題とグリーン作用素	96
5. B 一般の境界値問題のグリーン関数	98
6 熱伝導と波動の数理	103
6.1 熱方程式	103
6.2 フーリエ級数とフーリエ係数	104
6.3 針金の熱伝導	111
(a) 初期値境界値問題	111
(b) 解の一意性	112
(c) 解の構成	113
6.4 弦の振動	116
6.5 熱方程式の差分解法	119
6.6 波動方程式の差分解法	124
問題	127
ノート	128
6. A 熱方程式の導出	128
6. B 関数列の収束	130
6. C フーリエ展開可能性の問題	133
6. D 非線形熱方程式の差分解法	141
7 フーリエ変換	145
7.1 複素フーリエ級数	145
7.2 フーリエ変換への移行	150
7.3 フーリエ変換の性質	154
(a) 関数族 $S(\mathbb{R})$	155
(b) $S(\mathbb{R})$ におけるフーリエ変換	156
(c) 線形演算とフーリエ変換	156
(d) 微分演算とフーリエ変換	157
(e) 座標の掛け算とフーリエ変換	158
(f) たたみこみとフーリエ変換	159
7.4 フーリエ変換の微分方程式への応用	160

問題	165
ノート	166
7. A L^2 におけるフーリエ変換	166
7. B 多変数のフーリエ変換	168
8 変分法——出会いから応用へ	171
8.1 微分法から変分法へ	171
(a) 微分法と最大最小	171
(b) 変分法と汎関数	173
(c) 条件付きの変分問題	176
8.2 オイラーの方程式	179
(a) 弦のつり合い	179
(b) 一般の場合	183
(c) 自然境界条件	187
(d) ロバン境界条件	189
8.3 多変数の問題	190
(a) デイリクレ問題と変分法	190
(b) 多次元での自然境界条件	193
8.4 変分法に基づく近似解法	195
(a) リッツ-ガレルキンの方法	195
(b) 有限要素法. 空間 1 次元の場合	200
問題	203
ノート	204
8. A 変分法の基本補題の証明	204
8. B 行列 A の正定値性	204
8. C 有限要素法. 空間 2 次元の場合	205
9 超関数——出会いから応用へ	209
9.1 デルタ関数	209
(a) 一点に集中する分布	209
(b) 加重平均とデルタ関数	212

9.2	不連続関数の導関数	217
	(a) 運動量の変化と撃力	218
	(b) 超関数的導関数	220
9.3	超関数の定義と例	223
9.4	超関数の性質	228
	(a) 極 限	228
	(b) 微 分	229
	問 題	234
	ノ ー ト	234
	9. A (9.10)などの正確な導出	234
	9. B 定数関数の定める超関数の微分	235
	9. C 緩増加な超関数	237
	問題の略解	239
	参 考 書	247
	索 引	249

本書で学ぶ際の心構え

第1章から第3章までは、きわめて僅かの予備知識しか想定していない。高等学校での知識と大差がないことに張り合い抜けを感じられる向きもあるかもしれないほどである。その理由は、これらの章では数学的計算の難しさを極度に抑え、現象を数学的にモデル化させて結果を数理的に導く応用数学の基本姿勢を感じとってもらうことを旨としたこと、および、しばらく数学から遠ざかっていた人たちにも復習によって以後に必要な知識を思い出す余裕を確保するためである。

それ以後の章では、読者にかなりタフな解析に付き合っただかねばならない。しかし、細部を理解すべきところと、事実のイメージが得られさえすればよいところは区別して述べてあるので、読者が著者を信じて協力的な努力を惜しまずに勉強されるならば無事に通過できるはずである。

さて、第4章の解析は、微分方程式の話題としては相当に高度であるが、意欲さえあれば計算をたどることは可能であろう。その結果、ニュートンの輝ける成果を身近なものと感じとっていただきたい。

第5章の解析は難しくはないが、問題意識の納得が困難かもしれない。本来、ここでの扱いは関数解析的考察の伏線となるもので、その苦勞が本書の範囲では生きていないのが実状であるが、将来での効果を期待することにしよう。

第6章および第7章は、応用解析として重要な方法であるフーリエ級数とフーリエ変換のかなり本格的な解説である。このあたりからは、解説が急ピッチであるから、初読だけではわかった気がなくても落胆するにはおよばない。時間をかけて丹念にたどれば必ずマスターできるはずである。

第8章および第9章は性格が異なるが、ともに現代的な広い応用をもつ強力な方法と壮大な理論への出会いである。この出会いは、将来の長い付き合いと理解の端緒となり得るので、できるだけ多くを理解できるように頑張ってほしい。

ノートについて

本文内で解説するにはいささか技巧的すぎる事柄、あるいはこの段階では目線が高いと思われる事柄を、読者の皆さんの数理リテラシー向上の目的で、各章末にノートと

してまとめた。初読の際には、このノートの部分は飛ばして先を急いでも良い。あるいは、“お話”として味わっていただくだけでも結構である。もちろん、より深い数学的概念を修得することを目的とする読者は、ノートの部分も熟読することをおすすめする。

問題について

本書の各章末には簡単な問題が付記されているので、計算方法の理解の定着のためなどに大いに活用していただきたい。さらに、読者の皆さんには、問題を数理的に解析する思考の流れをより確実に理解するために、本文の説明や例に登場する計算を再構成してみられることをおすすめしておく。

1 増殖の数理

自然界や社会における現象には、時間とともに変化する量が現れる。人工衛星の運動を調べるときは、時間の関数としての人工衛星の位置が問題となる。また、大雨の時にダムの放水の時機を判断するためには、時間の関数としての貯水量に注意を払わねばならない。変化を数学的に調べるための基礎は関数の考えであり、ニュートン*1たちが創始した微積分の方法である。応用解析の入り口での第一歩として、身近な増殖現象に関する「倍率一定の変化」の考察から始めよう。

1.1 変化と関数

中学校以来なじんでいる概念であるが、関数について復習しておこう。関数を表すのには関数記号を用いる。たとえば、問題としている量 z が時間 t の関数であることは、関数記号 $f(\)$ を用いて

$$z = f(t) \quad (1.1)$$

と書くことができる。物理学や工学などの応用分野では、関数自身を表す文字、すなわち、従属変数を表す文字をそのまま関数記号に用いることが多い。

*1 Isaac Newton 1643-1727.

たとえば, (1.1)の代わりに

$$z = z(t)$$

と書くのである.

(1.1)で表される関数について, 関数記号が必要になれば, $z(\cdot)$, あるいは, $z(\cdot)$ を用いる.

1.2 変化率

やはり高等学校以来学んでいるように, 関数の変化を調べる有力な方法は変化率の応用, すなわち, 微分法である.

いま, ある初期時刻から測った時間を t とし, t の関数 $z = z(t)$ を考える. 時刻 t から Δt だけ時間が経った時刻 $t + \Delta t$ までを考える. この間の z の増分を Δz とすれば, $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$ であるから, これを Δt で割った

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

が, t から $t + \Delta t$ までの間の z の平均変化率である. ここで, t を固定し, Δt を 0 に近づけたときの極限が, 時刻 t における z の変化率(瞬間変化率)である. これは, 微分法の用語を用いれば, 関数 $z(t)$ の t における微分係数にほかならない. したがって, z の変化率自身を時間の関数とみれば, それは $z(t)$ の導関数

$$z'(t) = \frac{dz}{dt}(t)$$

にほかならない. まとめると,

$$\begin{aligned} z(t) \text{ の } t \text{ における変化率} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \\ &= z'(t) = \frac{dz}{dt}(t) \end{aligned}$$

である.

例1.1 数直線上を動く点Pの座標 x は、時間 t の関数 $x=x(t)$ である。 x の変化率(瞬間変化率)は、この動点の速度(瞬間速度) v にほかならない。さらに、速度 v の変化率は、この動点の加速度 α である。すなわち、

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

である。 □

1.3 変化の法則

一般に現実の変化はきわめて複雑であるが、なかには簡単な法則に従うものもある。

たとえば、量 $z=z(t)$ の変化率 k が一定であるならば、 z の変化は、

$$\frac{dz}{dt} = k \tag{1.2}$$

という簡単な法則に従っている。この場合、 z の初期値、すなわち、初期時刻 $t=0$ における z の値を z_0 で表すと、

$$z = z_0 + kt$$

である。

例1.2 (等速直線運動) 数直線上の動点が一定の速度 k で運動するとする。この動点の座標 $x=x(t)$ は、初期時刻における動点の座標を x_0 とおくと

$$x = x_0 + kt$$

で表される。 □

例1.3 (等加速度運動) 数直線上の動点の加速度が一定値 g であるとする。この動点の座標、速度を、それぞれ x, v とおくと

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad \text{すなわち,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g$$

である。このときの動点の初期座標を x_0 、初期速度を v_0 とおけば、

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

となる。

□

1.4 増殖率が一定な変化

簡単な規則に従う変化のうちで重要であり、いろいろな意味で基本的である典型の一つは“倍率一定”とよばれる変化である。これは、単位時間ごとに考えている量が一定の倍率で増加(減少)するものである。例を用いて説明しよう。

いま、ある容器の中にバクテリアが入っている。時刻 t における、このバクテリアの量を $z(t)$ で表す。バクテリアは絶えず増え続け、その増殖の規則は、時間が T 経てば量が α 倍になるものとする。ただし、 α は 1 より大きな定数である。

この変化の規則を式に書けば、

$$z(t+T) = \alpha z(t) \quad (1.3)$$

となる。

初期時刻 $t=0$ における z の値を z_0 とする。このとき、 $t=T, 2T, 3T, \dots$ といった T の自然数倍の時刻におけるバクテリアの量は簡単に求められる。すなわち、 n が自然数であるときは

$$z(nT) = \alpha^n z_0 \quad (1.4)$$

である。これによれば、 $t=nT$ のときの z の値は、公比 α の等比数列になっている。

では、 T を単位として測って半端なだけ時間が経ったときの z の値はどのようなのであろうか。すなわち、任意の時刻 t における z の値を求めたい。

まず、時間が T の半分、すなわち $\frac{T}{2}$ だけ経ったときバクテリアの量が何倍になるかを調べてみよう。そのために、時間が $\frac{T}{2}$ だけ経てば、バクテリアの量は γ 倍になるとおく。そうすると

$$z\left(t + \frac{T}{2}\right) = \gamma z(t)$$

であるから、

$$\begin{aligned} z(t+T) &= z\left(\left(t + \frac{T}{2}\right) + \frac{T}{2}\right) \\ &= \gamma z\left(t + \frac{T}{2}\right) = \gamma \cdot \gamma z(t) = \gamma^2 z(t) \end{aligned}$$

が得られる。この結果と(1.3)とを比較すると、 $\gamma^2 = \alpha$ となる。したがって、

$$\gamma = \sqrt{\alpha}$$

という関係がある。すなわち、時間が $\frac{T}{2}$ だけ経つごとにバクテリアの量は $\sqrt{\alpha}$ 倍になる。同様に考えると、 $\frac{T}{3}$ だけ時間が経つとバクテリアの量は $\sqrt[3]{\alpha}$ 倍になることがわかる。

この考察を進めると、 n を任意の自然数として、 $\frac{T}{n}$ だけ時間が経ったとき、バクテリアの量は

$$\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} \text{ 倍}$$

になることが得られる。この結果を式に書けば、

$$z\left(t + \frac{T}{n}\right) = \sqrt[n]{\alpha} z(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

である。

この(1.5)から z の変化率 $\frac{dz}{dt}$ を計算することができる。そのために

$$h = \frac{T}{n}$$

とおく。 $n \rightarrow \infty$ のとき $h \rightarrow 0$ である。さらに、式を見やすくするために

$$\beta = \frac{1}{T}$$

とおくことにする。この記号を用いると、

$$\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} = \alpha^{\frac{1}{T}h} = \alpha^{\beta h}$$

である。したがって、(1.5)を書き直して、

$$z(t+h) = \alpha^{\beta h} z(t)$$

とすることができる。これから、 z の平均変化率を次のように計算する。

$$\frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \frac{\alpha^{\beta h} - 1}{h} z(t). \quad (1.6)$$

ここで、 $h \rightarrow 0$ として、 $\frac{dz}{dt}$ を導くために極限值

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha^{\beta h} - 1}{h} \quad (1.7)$$

を求める。そのために、補助的に関数

$$f(x) = \alpha^{\beta x}$$

を考える。 $f(0) = \alpha^0 = 1$ であるから、(1.7)から、

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) \quad (1.8)$$

が得られる。一方、 $f(x)$ を自然対数の底 e を用いて

$$f(x) = e^{x\beta \log \alpha}$$

と書き直すことができる。これより、

$$f'(x) = \beta \log \alpha \cdot e^{x\beta \log \alpha}$$

となる。したがって、

$$f'(0) = \beta \log \alpha \cdot e^0 = \beta \log \alpha = \frac{\log \alpha}{T} \quad (1.9)$$

であることがわかる。これが求める(1.7)の極限值 L である。

よって、(1.6)から $z(t)$ の変化率 $\frac{dz}{dt}$ は、

$$\frac{dz}{dt} = az \quad (1.10)$$

となる。ここで、定数 a は、

$$a = \frac{\log \alpha}{T} \quad (1.11)$$

である。

このように、 z の変化の規則は方程式(1.10)で表される。

さて、 z の初期値 $z(0)$ を z_0 と書けば、微分方程式(1.10)の解 z のうちで、初期条件

$$z(0) = z_0$$

を満たす解は

$$z(t) = e^{at} z_0 \quad (1.12)$$

である。

この(1.12)が、問題のバクテリアの任意の時刻 t における量 $z(t)$ を表す式である。

(1.12)で $t = nT$ (n は自然数) とおいて計算すると、

$$\begin{aligned} z(nT) &= e^{anT} z_0 = e^{\left(\frac{\log \alpha}{T}\right) \cdot nT} z_0 \\ &= e^{n \log \alpha} z_0 = \alpha^n z_0 \end{aligned}$$

となり、確かに前出の(1.4)が再現される。

いまの例を離れても、問題に応じた定数 a を用いた微分方程式(1.10)に従う変化がいろいろあり、その解が(1.12)で与えられるのである。

(1.10)は、瞬間変化率が現在量に比例するという法則を表している。比例定数が a である。この意味で a を増殖係数(増殖率)とよぶことがある。 a が正数ならば、(1.10)により正の量 z の変化率は正となり、 z は t とともに増加する。確かに(1.12)によっても、 $a > 0$ ならば z は t とともに増加すること、特に指数関数的に増加することがわかる。逆に、 $a < 0$ ならば、 z は t が増すにつれて指数関数的に減少する。

(1.10)に支配される変化の別の例を見てみよう。

例題4 (放射性物質の半減期) ある容器に放射性物質が入っているとし、そ

の量を R で表す。一般に、放射性物質の量が半分になるまでの時間 T を、その放射性物質の半減期という。上のバクテリアの例のときの扱いに合わせれば

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

の場合に相当する。したがって、(1.10)に用いるべき増殖係数 a を(1.11)により求めれば、

$$a = \frac{\log \frac{1}{2}}{T} = -\frac{\log 2}{T}$$

となる。さらに、正数 $k = \frac{\log 2}{T}$ を用いれば、 $R = R(t)$ の変化を定める微分方程式は

$$\frac{dR}{dt} = -kR$$

と表される。これが半減期が与えられたときの、放射性物質の減少を支配する法則である。□

例 1.5 (マルサスの法則) 一定の地域に生息する、ある生物の個体数を N で表す。 N は個体数であるから自然数のはずだが、十分大きな数を考えているので、これを実数として扱い、時間 t の関数 $N = N(t)$ とみなす。あるいは、個体群密度を考えていると思ってもよい。この生物の出生率を β とする。すなわち、微小な時間 Δt の間の出生数が $\beta N \Delta t$ で与えられると考える。同様に死亡率を δ と書く。すなわち、 Δt の間の死亡数は $\delta N \Delta t$ であると考え、このとき、 N の変化率

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\beta N \Delta t - \delta N \Delta t}{\Delta t}$$

は、

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \delta)N \quad (1.13)$$

となる。これをマルサスの法則*2という。(1.13)によれば、この生物の増殖

*2 Thomas Robert Malthus 1766-1834.

率は $\beta - \delta$ である. □

1.5 非線形方程式に従う増殖

前節で扱ったバクテリアの増殖の例において, さらに次のような状況を設定してみよう. すなわち, バクテリアが増えすぎると環境が悪化し, 増殖率が低下すると仮定するのである. 具体的には, バクテリアの量 z の変化は, (1.10)に従い,

$$\frac{dz}{dt} = az$$

を満たすのであるが, ここでの a は定数ではなく, z の増加とともに,

$$a = p - qz \quad (p, q \text{ は正定数})$$

に従って小さくなると仮定しよう.

このとき, z の変化を支配する方程式は

$$\frac{dz}{dt} = (p - qz)z \tag{1.14}$$

である.

(1.14)によると z が小さな正の値から出発すると, $p - qz$ が正の間は z が増加する. z が大きくなり $\frac{p}{q}$ に近づくと増殖率 $p - qz$ が 0 に近づく. (1.14)によれば, このとき z の変化率が 0 に近づき, 一種の飽和現象が起こることが期待される. 本当にそのようになっていることが, 以下に示すように(1.14)を実際に解いてみて確かめられる.

なお, 微分方程式(1.14)をロジスティック方程式とよぶ.

さて, z の初期条件を

$$z(0) = z_0 \tag{1.15}$$

とおく. (1.15)のもとで(1.14)を解くのが目標である. なお, このように微分方程式を初期条件のもとで解く問題を初期値問題とよぶ.

(1.14)は変数分離型の方程式である. 変数分離型の方程式の解法(→ 1. B

項)を既習の読者は、復習をかねて計算を確かめてほしいが、未習の読者には、とりあえず結果の(1.18)を受け入れていただく。

(1.15)を考慮すれば、(1.14)より

$$\int_{z_0}^{z(t)} \frac{dz}{(p-qz)z} = \int_0^t dt \quad (1.16)$$

である。左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z(t)} \frac{dz}{(p-qz)z} &= \int_{z_0}^{z(t)} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{z} + \frac{q}{p-qz} \right) dz \\ &= \frac{1}{p} [\log z - \log(p-qz)]_{z=z_0}^{z=z(t)} \\ &= \frac{1}{p} \log \left(\frac{z(t)}{p-qz(t)} \cdot \frac{p-qz_0}{z_0} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

となる。したがって

$$c = \frac{z_0}{p-qz_0}$$

とおけば、(1.16)から $z=z(t)$ を定める等式

$$\frac{1}{p} \log \left(\frac{1}{c} \frac{z(t)}{p-qz(t)} \right) = t,$$

すなわち、

$$\frac{z(t)}{p-qz(t)} = ce^{pt}$$

が導かれる。これを $z(t)$ について解けば、 $z(t)$ を表す結果

$$z(t) = \frac{pce^{pt}}{1+qce^{pt}} = \frac{pz_0e^{pt}}{p+qz_0(e^{pt}-1)} \quad (1.18)$$

が得られる。

(1.18)により $z(t)$ の変化を調べることができる。特に、 $t \rightarrow \infty$ のときには

$$z(t) \rightarrow \frac{p}{q}$$

となること、すなわち、飽和が起こっていることがわかる。関数 z のグラフを描くと、図 1.1 のような曲線となる。この曲線は成長曲線、あるいは、ロジスティック曲線とよばれる。

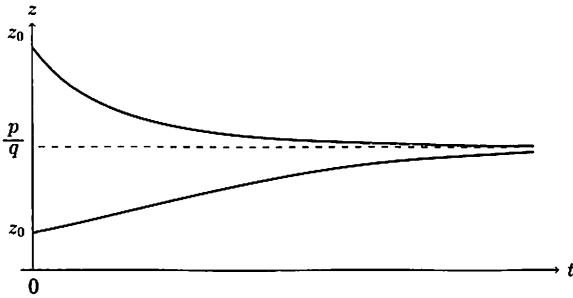


図 1.1 ロジスティック曲線 $z(t) = \frac{pz_0 e^{pt}}{p + qz_0(e^{pt} - 1)}$

この例のように非線形の方程式に従う増殖では飽和現象が起こり得るのであるが、逆に次節で説明するように、方程式によっては解が有限時間で無限大となる爆発現象が見られることがある。

1.6 初期値問題の解の爆発など

簡単な方程式について説明しよう。まず、微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = z^2 \tag{1.19}$$

を初期条件 $z(0) = \beta$ (ただし、 $\beta > 0$) のもとで考える。

$$z(t) = \frac{\beta}{1 - \beta t} \tag{1.20}$$

であることは、変数分離法により自分で解いてみればわかる。あるいは、微分を実行し、かつ、 $z(0)$ の値を計算する検算によって確かめてもよい。(1.20)によれば、 $t=0$ のとき $z(0) = \beta$ から出発した解は、 t が増えるに従って増加し、 $t \rightarrow \frac{1}{\beta}$ のとき $+\infty$ に発散する。このことを、解 $z = z(t)$ は有限時刻 $T = \frac{1}{\beta}$ において爆発 (blow up) するといい、 $t = T$ を爆発時刻とよぶ。

もう一つの例を見てみよう。微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = z^2 - 1 \tag{1.21}$$

の初期条件 $z(0) = z_0$ のもとでの解 $z = z(t)$ が $t \rightarrow \infty$ のときに、どのように振

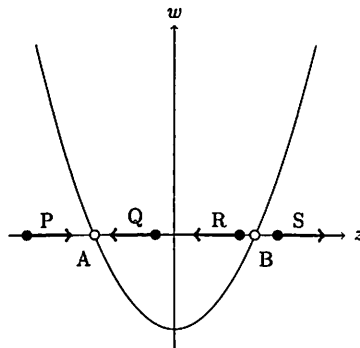


図 1.2 放物線 $w = f(z) = z^2 - 1$

る舞うかを考察する。

まず、 $z_0 = 1$ のときは、定数関数 $z(t) \equiv 1$ が初期値問題の解である*3。このように、時間 t によらない解を定常解とよぶ。図 1.2 は z 軸を横軸、 w 軸を縦軸としているが、記入された曲線は放物線 $w = f(z) = z^2 - 1$ である。初期値 $z_0 = 1$ のときの解が定常解であることは、図の点 B から出発した動点 $z = z(t)$ が動かないことを意味している。同様に $z_0 = -1$ に対応する点 A から出発した動点も動かない。しかし、A の左側にある点 P から出発した動点は、そこで $f(z)$ の値が正であり、その正の値が $\frac{dz}{dt}$ に等しい ($z = z(t)$ は微分方程式(1.21)の解である)ので、 z は増加する。すなわち P から出発した動点は右に動く。そうして右に向かって動き続け、 $t \rightarrow +\infty$ のとき、点 A に近づくのである。同時に A の右側(しかし B の左側)にある点 Q から出発した動点は、そこでの $f(z)$ の値が負だから、左に動く。そうして $t \rightarrow +\infty$ のとき、右側から A に近づく。結局、初期値 z_0 が、 $z_0 < 1$ を満たせば $z(t)$ は $t \rightarrow +\infty$ のとき $z = -1$ に漸近していく。

最後に、動点が B の右側にある点から出発すれば、そこで $f(z)$ は正だから、動点は右に動き続ける。しかし、有限時間で $z(t) \rightarrow +\infty$ になる(すなわち爆発が起こる)かどうかは、計算してみないとわからない。実際、

*3 $z(t) \equiv 1$ あるいは $z \equiv 1$ と書いたときは、 z は考えている区間で恒等的に 1 の値をとる定数関数であることを意味している。

$$\int_{z_0}^{z(t)} \frac{dz}{z^2-1} = \int_0^t dt = t \quad (1.22)$$

から $z(t)$ を解いてから検討してみてもよいが、(1.22)の左辺は $z \rightarrow +\infty$ のとき

$$\int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{z^2-1} = T \quad (1.23)$$

という有限値に収束する。言い換えれば、 $t \rightarrow T$ のとき $z(t) \rightarrow +\infty$ となるのである。

ついでながら、同じ定常解であっても、 $z \equiv 1$ の左右から出発した解が $z \equiv 1$ から離れていくのに反して、 $z \equiv -1$ の左右から出発した解はこの定常解に収束してくるのである(その考察には図 1.2 が有効であった)。このようなとき $z \equiv 1$ は不安定な定常解であり、 $z \equiv -1$ は安定な定常解であるという。

問題

問 1.1 時間 t の関数 $u = u(t)$, $v = v(t)$ が、

$$\frac{du}{dt} = 5u, \quad u(0) = 1, \quad \frac{dv}{dt} = 2v, \quad v(0) = e$$

を満足しているとき、 u と v の大きさが等しくなる時刻 T を求めよ。

問 1.2 次の微分方程式と初期条件を満たす解 $z = z(t)$ の $t \rightarrow \infty$ に対する振る舞いを調べよ。

- (1) $\frac{dz}{dt} = -3z + 2, \quad z(0) = 1.$
- (2) $\frac{dz}{dt} = (3-z)(z-1), \quad z(0) = 2.$
- (3) $\frac{dz}{dt} = z(3-2z), \quad z(0) = 1.$

問 1.3 k を定数とする。微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = kz - k^2 + 2$$

の任意の解 $z = z(t)$ が、 $t \rightarrow \infty$ のときに、定数 1 に収束するような k の値を求めよ。

問 1.4 自然対数の底 e に関する次の 2 つの公式が同値であることを(すなわち、一方か

ら他方が導けること)を確かめよ.

$$(a) e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

ただし, (a)における n は, もともとの公式では整数を意味しているが, ここでは実数と考えるとよい.

問 1.5 微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = z + z^3$$

を初期条件 $z(0) = a$ のもとで考える. ただし, a を正の定数とする. この解 $z = z(t)$ は有限の時刻で爆発する. 爆発時刻 T を求めよ.

ノート

1. A 自然対数の底 e

微分積分学で既習の通り, 自然対数の底 e は, 乗積極限式

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1.24)$$

で特徴付けられる数である. また, この(1.24)は,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad (1.25)$$

と同値である(→問 1.4).

これらを使うと, (1.7)の L は, より直接的に計算できる. すなわち, 定数 a を,

$$a = \frac{\log \alpha}{T} = \beta \log \alpha$$

とすると,

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ah} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ah} - 1}{ah} \cdot a = a = \frac{\log \alpha}{T}$$

と計算できるのである.

さて, 関数 $u(t) = e^t$ は次の微分方程式の初期値問題

$$\frac{du}{dt} = u, \quad (1.26)$$

$$u(0) = 1 \quad (1.27)$$

の解である。したがって、この微分方程式の解 $u(t)$ を用いて、 $e = u(1)$ と表される。このことを用いて e の乗積極限式(1.24)の動機付け(もっともらしさの説明)をしよう。そのための手段は後の章で、微分方程式の近似解法として本格的に解説する差分法である。差分法の出発点は「変域を小さな幅の小区間に分割し、各小区間では、未知関数の導関数を小区間の両端における関数値を用いた差分商(小区間における平均変化率のこと!)で置き換える」という発想である。

その方法を上の初期値問題に適用してみよう。変数の区間を

$$0 \leq t \leq 1$$

に制限して考える。まず、 n を正の整数として、この区間 $[0, 1]$ を幅 $h = \frac{1}{n}$ の小区間に n 等分し、両端を含む $n+1$ 個の分点を

$$t_0 = 0, \quad t_1 = h, \quad t_2 = 2h, \quad \dots, \quad t_n = nh = 1$$

とおく。これらの分点(差分法では節点とよばれる)における解 u の近似値を求めたい。それらを $u_0, u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{n-1}, u_n$ とおく。まず、 $u_0 = 1$ とする。初期条件(1.27)によりこれは正確な値である。そうして、微分方程式(1.26)を差分方程式

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = u_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.28)$$

で置き換える。

一般に差分方程式は、有限個の未知数 $\{u_{k+1}\}$ に対する連立方程式であり、その解を求めるには手間がかかるが、目下の(1.28)については、簡単である。すなわち(1.28)を

$$u_{k+1} = hu_k + u_k = (1+h)u_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

と変形し、初期条件 $u_0 = 1$ から出発すれば

$$\begin{aligned}
 u_1 &= (1+h)u_0 = (1+h), \\
 u_2 &= (1+h)^2 u_0 = (1+h)^2, \\
 &\vdots \\
 u_k &= (1+h)^k u_0 = (1+h)^k, \\
 &\vdots \\
 u_n &= (1+h)^n
 \end{aligned}$$

が得られる。すなわち、 u_k は初項が1で公比が $1+h$ の等比数列である。特に、 u_n に対する結果を $h = \frac{1}{n}$ を代入した形で記せば

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1.29)$$

となる。

さて、もとの微分方程式が格別の特異性をもたない限り、初期値問題に対する差分方程式の解 $\{u_k\}$ は、小区間の幅を0に近づけるにつれて真の解 u に収束することが知られている。

いまの場合、 n が何であっても、右端の節点では $t_n = 1$ であるから、差分法による近似の収束性を信じれば $h = \frac{1}{n} \rightarrow +0$ のとき、右端の節点における近似値 u_n は真の解 $u = e^t$ の $t=1$ における値 $e^1 = e$ に近づかずである。言い換えれば、 e の乗積極限式(1.24)は、初期値問題(1.26)、(1.27)の差分法による近似解の収束性に応ずるものであり、その意味でごく自然な公式なのである。

1. B 変数分離法

ロジスティック方程式(1.14)の解を求める際に、変数分離法を用いた。この方法は、一般に、

$$\frac{dz(t)}{dt} = f(z(t))g(t) \quad (1.30)$$

の形の微分方程式の解 $z = z(t)$ を見つけるために応用できる。ここで、 $f(w)$ は w の関数であるが、これに t の関数 $z(t)$ を代入して、結果的に t の関数

$f(z(t))$ を考えている。 $g(t)$ は t のみの関数である。微分方程式(1.30)の解のうち、初期条件

$$z(0) = z_0$$

を満たすものを求めよう。計算の便宜上、(1.30)において、 z の独立変数を s に書き直して、

$$\frac{1}{f(z(s))} \cdot \frac{dz(s)}{ds} = g(s)$$

と書いておく。この両辺を s について 0 から t まで積分すると、

$$\int_0^t \frac{1}{f(z(s))} \cdot \frac{dz(s)}{ds} ds = \int_0^t g(s) ds$$

となる。左辺の積分において、積分の変数を $w = z(s)$ と変換すると、 s が 0 から t まで変化するとき、 w は z_0 から $z(t)$ まで変化するから、

$$\int_{z_0}^{z(t)} \frac{1}{f(w)} dw = \int_0^t g(s) ds \quad (1.31)$$

となる。これが、1.5節で登場した(1.16)である。あとは、両辺の積分を具体的に計算して、結果を $z(t)$ の式として表現すればよい。

なお、(1.30)の左辺の導関数を表す記号 $\frac{dz}{dt}$ を分数とみなし、 $\frac{dt}{f(z)}$ を両辺に掛けて、

$$\frac{dz}{f(z)} = g(t) dt$$

と変形してから、左辺を z について z_0 から $z(t)$ まで、右辺を t について 0 から t まで積分しても、(1.31)と同じ等式が得られる(積分変数を表す記号が異なるが本質的な違いではない)。

例題を考えよう。 a と k を定数として、 $z = z(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = az + k \quad (1.32)$$

を初期条件 $z(0) = z_0$ のもとで解く。(1.31)により、

$$\int_{z_0}^{z(t)} \frac{dz}{az + k} = \int_0^t dt$$

であるが、この左辺は、

$$\int_{z_0}^{z(t)} \frac{dz}{az+k} = \frac{1}{a} [\log(az(t)+k) - \log(az_0+k)] = \frac{1}{a} \log \frac{az(t)+k}{az_0+k}$$

と計算できるので、

$$z(t) = \frac{1}{a} [(az_0+k)e^{at} - k]$$

となる。(1.12)は、この特別な場合($k=0$)に相当する。

2

振動の数理

自然界には振動する現象が多い。すなわち、問題とする量や状態が時間とともに増加減少を繰り返し、ゆれ動く現象である。前章の「増殖の数理」では、時間とともに単調に変化する量が基本的であったが、振動の数理では、時間の周期関数として変化する量が主役である。本章では、振動現象の解法として基本的な2階の線形微分方程式について学びながら、振動の数理になじんでいこう。

2.1 自然界における振動現象

振動する現象を実験により実現することは簡単にできる。たとえば、図 2.1 のようにバネの一端 A を固定し、他端 B を引っ張ってから静かに離せば、B はつり合いの位置を中心に振動する。

また、U 字管の中の水面は、U 字管を傾けてから直立させると、上下に振動する(図 2.2)。

さらに、はじかれたバイオリンの弦の運動は振動であり、地震は地面の振動である。また、機械の装置には、振動を利用して働かせるもの、また逆に、本来の運動に望ましくない振動が伴ってしまうものが多く見られる。

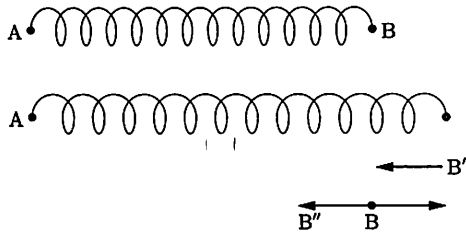


図 2.1 バネの振動

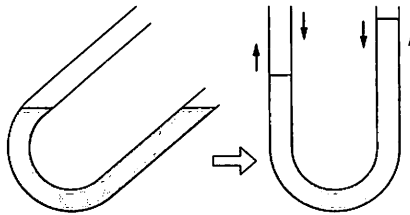


図 2.2 U字管における振動

2.2 単振動

最も単純であり、基本的な振動は、次で表現される単振動である。
数直線上の動点 P の座標 x が時間 t の関数として、

$$x = x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

の形に表されるとき、P は単振動をするという。ここで A , ω は正の定数であり、 A を振幅とよぶ。 δ も定数である。 ω が大きいと振動は速くなる。実際、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

とおくと、

$$x(t+T) = x(t),$$

すなわち、

$$A \sin \left(\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \delta \right) = A \sin(\omega t + \delta)$$

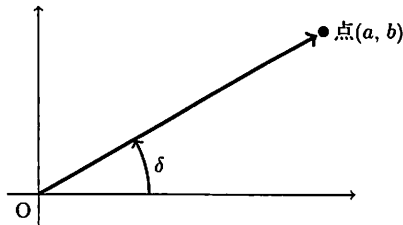


図 2.3 三角関数の合成

が成り立つ。このことを、 $x = x(t)$ は周期 T の周期関数であると表現する。 ω が大きくなれば周期は短くなり、単位時間の中に入る周期の数、すなわち、振動数 $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ は大きくなる。

また、 a, b を任意の実数としたとき、

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \delta)$$

と書くことができる。 δ は図 2.3 で示される角である。したがって、

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (2.1)$$

を座標にもつ点の運動は単振動である。

2.3 ニュートンの力学の法則

実際の現象の中で起こる振動を数理的に解析する基礎は力学の法則、すなわち、ニュートンの力学の法則である。力学それ自身は物理学の一つの分野であるから、ここでは詳しいことは扱わない。

本章では、ごく簡単な場合について、力学の法則がどのように数式化されるか、また、それによって現象が数理的に解析される手順、すなわち数学を用いて現象の様子を明快に究めることができる事情を説明したい。

さて、数学で動点を考えるときには、点の位置だけに着目している。これに対し、力学で運動する動点を考えるときには、その点は質量をもっていると考え、このとき、その点は質点であるという。すなわち、力学で動点を考えるときには、きわめて小さな物体であって、その位置は点で表されるが、その点

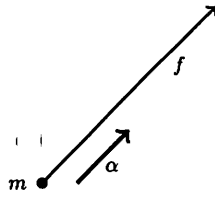


図 2.4 力学の法則

には質量が伴っていると考えるのである。

質点の質量は正数であり、それを表すには、しばしば文字 m が用いられる。これは質量を表す英語の mass からきている。なお、質量を測る基本の単位はキログラム (kg) である。また、地球上では、物体の質量と重さ(つまり、地球が引きつける力)とは比例するので質量が大きい物体は重い物体である。

さて、質量 m をもつ質点 P を考えよう。質点に力が働くと質点は動く。その運動を定める法則が

$$m\alpha = f \quad (2.2)$$

であることを、ニュートンは発見したのである。(2.2)において、 α は質点 P の加速度で、 f は P に働く力である(図 2.4)。力学の法則(2.2)の発見は、物理学およびそれに基づく科学技術の成立をもたらし、ひいては、今日の文明を發展させたともいえる偉業であった。

一般に、質点の運動は(3次元の)空間で起こる。したがって、(2.2)における α や f は、空間のベクトルとして扱わなければならない。

P の位置ベクトルを \mathbf{r} とすれば、 P の加速度(加速度ベクトル) α は、

$$\alpha = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (2.3)$$

のように、 \mathbf{r} の時間による2次導関数である。なお、 \mathbf{r} の時間 t による1次の導関数は P の速度ベクトル \mathbf{v} である。すなわち、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.4)$$

(2.3)や(2.4)では、ベクトルの値をとる関数 \mathbf{r} 、すなわちベクトル値関数 \mathbf{r} を t で微分している。ベクトル値関数を微分するには、時刻 t から時刻

$t + \Delta t$ までの平均変化率の、 $\Delta t \rightarrow 0$ に際しての極限をとればよいが、ベクトルを成分を用いて表しているときには、成分ごとに微分すればよい。たとえば、位置ベクトルの成分を x, y, z で表す、すなわち、

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$$

とおくと、次の表式が成り立つ。

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right),$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right).$$

このように、加速度や力がベクトルであると理解することは大切であるが、この章の以下の部分では 1 次元の運動だけを考えるので、ことさらベクトル記法を用いない。

すなわち、考える質点 P は x 軸上を動くとし、その座標を x と書く。このとき P の加速度 α は

$$\alpha = \frac{d^2x}{dt^2}$$

で与えられる。力についても x 軸に平行な力のみを考えるので、力は正負の実数 f で表されることになる。

このように、 x 軸上を動く質点 P に対する力学の法則(2.2)は、簡単に、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f \tag{2.5}$$

と書くことができる。

上のようにニュートンの力学の法則を表す方程式の右辺に文字 f がよく使われるのは英語 force (力) から来ている。

2.4 簡単な例

ニュートンの力学の法則(2.5)を用いての解析になじむために、簡単な例を扱ってみよう。まず、 x 軸上を動く質量 m の質点 P の運動を考察する。

例 2.1 質点に力が働かない場合を考える。(2.5)で $f=0$ とおけば

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

となるから、これより $v = \frac{dx}{dt}$ は定数である。例 1.2 ですで見たとように、これは等速直線運動を表している。すなわち、質点に力が働かないとき、その質点は一定の速度をもつ運動を行うのである。その一定の速度を v_0 とし、 $t=0$ における初期座標を x_0 とすると、P の座標 x は

$$x = x_0 + v_0 t$$

と書ける。 □

例 2.2 質点に一定の外力が働く場合を考えよう。例として、真上に投げ上げた質点 P の運動を考える。鉛直上方、すなわち、真上に向かって x 軸をとる。質点 P には重力によって下向きの力が働くが、その大きさは mg である。 m は質点 P の質量であり、 g は重力の加速度とよばれる物理定数である。力の大きさは mg であるが、向きは下向きであるので、力学の法則(2.5)に用いるときは、 $f = -mg$ として扱わねばならない(図 2.5)。したがって、(2.5)は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg$$

となる。ゆえに、 $\frac{d^2 x}{dt^2} = -g$ となるが、これは例 1.3 で見た等加速度運動であり、 x, v のそれぞれの初期値 x_0, v_0 を用いると

$$v = v_0 - gt, \quad x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

と表現できる。 □

例 2.3 速度 v に比例する抵抗が働く場合を考える。すなわち、抵抗の大きさが v の大きさに比例し、働く向きは運動を抑える向きに働くとする。式では

$$f = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \tag{2.6}$$

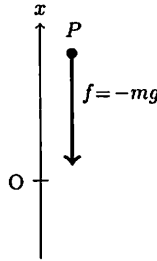


図 2.5 投げ上げ

と表される f を用いることになる. γ は正の定数である. (2.6) によれば, 右側に向かって x 軸をとったとすると確かに, $v > 0$ ($v < 0$) で質点が右に(左に)動いているときは, 力は左向き(右向き)に働いている. (2.6) を, 力学の法則 (2.5) に用いると,

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v, \quad \text{すなわち,} \quad \frac{dv}{dt} = -kv \quad (2.7)$$

が得られる. ただし, $k = \frac{\gamma}{m}$ とおいている. これは第 1 章で扱った微分方程式である. 実際, v の初期値を v_0 とすれば, (2.7) の解は,

$$v = v_0 e^{-kt}$$

で与えられる. $k > 0$ であるから, これより, 速度 v の大きさは指数関数的に 0 に近づくことがわかる.

一方で, $v = \frac{dx}{dt}$ であるから, 座標 x の初期値を x_0 とすれば,

$$x = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = x_0 + \frac{v_0}{k} - \frac{v_0}{k} e^{-kt} \quad (2.8)$$

が得られる. これより, $t \rightarrow +\infty$ のとき, すなわち, 時間が限りなく経てば, 質点 P は座標 $x_0 + \frac{v_0}{k}$ の点に限りなく近づく. この点が P の終着点である (実際には, 無限の時間をかけても到達しないが). □

2.5 調和振動子

引き続き、 x 軸上を動く質量 m の質点 P を考える。そして、働く力は、 k は正数として、

$$f = -kx \quad (2.9)$$

で表されるとする。

$x > 0$ のとき、すなわち、 P が原点の右側にあれば、力 f は左向きに働き、 $x < 0$ で P が原点の左側にあれば力は右向きに働く (図 2.6)。確かに、(2.9) は原点に向かって押し戻す力であるから、原点の左右に振動する運動が起こることが期待される。(2.9) の f を、力学の法則 (2.5) に代入すると

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (2.10)$$

となる。ここで、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とおくと、(2.10) を、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (2.11)$$

と書き直すことができる。この方程式の解を、初期条件

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 \quad (2.12)$$

のもとに求めれば、時間の関数としての座標 x が定まるのである。

なお、(2.9) のような力が働く具体的な例としては、たとえば、本章のはじめに触れた、バネの動く端に質点を取りつけた問題、振れる幅が小さな振子の問題がある (図 2.7)。

さて、(2.11) の解を一般に考える前に

$$\varphi(t) = \sin \omega t, \quad \psi(t) = \cos \omega t$$

のどちらもが (2.11) の解になっていることは、代入によって確かめられる。

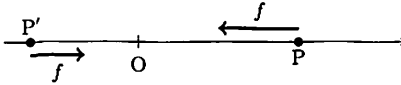


図 2.6 (2.9)で表される力 f の働く質点の運動

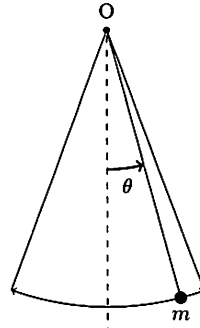


図 2.7 振り子

この2つの基本的な解を用いると微分方程式(2.11)の一般解は a, b を任意の定数として、

$$x = a\varphi(t) + b\psi(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

で与えられる。

このように基本的な解が2つ見つかり、一般の解がそれらの定数倍の和、すなわち線形結合で表されることは、一般の2階の線形同次微分方程式について成り立つ。このような基本的な役割を果たす2つの解を、その微分方程式の(1組の)基本解という。

さて、いまの問題に戻り、初期条件(2.12)に適合するように上の定数 a と b を定めると、結果は

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

となる。これは、(2.1)と同じ形をしており、質点 P は単振動をすることがわかる。その振幅は $\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$ であり、周期は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

である。

一般に、単振動する質点のことを調和振動子という。

最後に、質点 P が(2.10)に従って運動する間に、次の量 $J = J(t)$ がどのように変化するかを調べてみよう。

$$J = mv^2 + kx^2 = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + kx^2. \quad (2.13)$$

そのために J を時間 t で微分して、結果に (2.10) を代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= 2m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2kx \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= 2 \frac{dx}{dt} \cdot (-kx) + 2kx \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \end{aligned}$$

が全ての t で成立する。すなわち、 J は時間によらず一定である。

実は、物理的には、 $J(t)$ に $\frac{1}{2}$ を乗じたものが、力 (2.9) のもとで運動する質量 m の質点の全エネルギー

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.14)$$

である。さらに、(2.14) の右辺の $\frac{1}{2}mv^2$ が質点の運動エネルギーであり、 $\frac{1}{2}kx^2$ が位置エネルギーに相当している。

上で得られた、 $J(t) \equiv \text{一定}$ という結果は、いまの場合のエネルギー保存を示している。

2.6 2階線形微分方程式と特性根の方法

前節で扱った微分方程式をやや一般化した微分方程式

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (2.15)$$

について考える。 $x = x(t)$ が求めるべき関数、 a, b, c は実数の定数であり、 $a \neq 0$ を仮定する。

すなわち、微分方程式 (2.15) は定数係数の2階線形微分方程式である。この微分方程式の解(基本解)を、

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (2.16)$$

とおいて探すが、これから説明する特性根の方法である。定数 λ の値をうまく定めることが当面の課題である。

$x(t) = e^{\lambda t}$ を(2.15)に代入すると

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0 \quad (2.17)$$

となる。すなわち、 $x = e^{\lambda t}$ が(2.15)の解であるための条件は、 λ が2次方程式

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2.18)$$

の解であることである。

(2.18)を(2.15)の特性方程式といい、その解を特性根という。

簡単のために、ここでは特性方程式(2.18)が、相異なる解 λ_1, λ_2 をもつ場合について説明する(重解をもつ場合については2.A項を参照)。そうすると

$$e^{\lambda_1 t} \quad \text{と} \quad e^{\lambda_2 t}$$

が(2.15)の(1組の)基本解となり、任意の定数 c_1, c_2 を用いて、(2.15)の一般の解を

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

と表すことができるのである。

例2.4 微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 0 \quad (2.19)$$

の特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ であり、その解、すなわち、特性根は $\lambda = -2, 3$ である。したがって e^{-2t} と e^{3t} は(2.19)の基本解である。□

微分方程式(2.15)に戻ろう。問題とするのは特性根 λ_1, λ_2 が複素数になる場合である。このとき、解 $e^{\lambda_1 t}$ と $e^{\lambda_2 t}$ の肩に乗っている数は複素数である。したがって、複素数を変数とする指数関数の考察が必要となる。複素変数の指数関数の正統的な学習は関数論の課題であるが、ここでは実用上の納得を主旨として簡単に説明しておく。

そもそも、 z を複素数としたときの指数関数 e^z は、

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (2.20)$$

により定義される。これは、実数の指数関数 e^x のテイラー展開*1(マクローリン展開*2)において、 x を z に置き換えたものである。

(2.20)に従えば、 t を実数の変数、 λ を複素数の定数とすると、 $e^{\lambda t}$ の値は、

$$e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2}{2!} t^2 + \frac{\lambda^3}{3!} t^3 + \dots$$

で与えられる。

(2.20)により e^z を定義すると、この関数は指数関数としてもつべき性質をそなえていることが確かめられるのである。すなわち、

$$\begin{cases} e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \\ e^0 = 1, \\ e^{-z} = \frac{1}{e^z} \end{cases} \quad (2.21)$$

が成り立つ。 z, z_1, z_2 は任意の複素数である。

また、 e^z を z で微分するときも(2.20)の右辺について項別微分が許され

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \quad (2.22)$$

が成り立つことが証明される。また、

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \quad (2.23)$$

も導かれる。

複素変数の指数関数で、特に大切なのは、変数が純虚数 $z = i\theta$ の場合である。ここで、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位、 θ は実数である。実は、このとき、

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2.24)$$

*1 Brook Taylor 1685-1731.

*2 Colin Maclaurin 1698-1746.

が成り立つ。これは、オイラーの公式*3とよばれる。なお、この驚くべき公式の一つの証明をこの節の終わりに記しておく。

(2.24)の θ を、 $-\theta$ で置き換えると、

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (2.25)$$

が得られる。(2.24)と(2.25)を足し合わせて2で割る、差し引いて $2i$ で割ると、それぞれ

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (2.26)$$

となり、三角関数 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ が、純虚数の指数関数の組み合わせで表されることがわかる。

オイラーの公式を用いると、一般の複素数 $\alpha + i\beta$ (α, β は実数)が e の肩に乗ったときの値 $e^{\alpha + i\beta}$ を

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta) \quad (2.27)$$

とわかりやすい形に書き直すことができる。

さて、微分方程式(2.15)に戻り、その特性方程式(2.18)を考える。すなわち、(2.18)の解 λ_1, λ_2 が共役複素数

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad (\alpha, \beta \text{ は実数, } \beta \neq 0)$$

となる場合を考える。

このとき、

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

$$e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

が解として得られるが、これらに対して、足し合わせて2で割る、差し引いて $2i$ で割るという操作をすると、結果として実数値の関数

*3 Leonhard Euler 1707-1783.

$$e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{と} \quad e^{\alpha t} \sin \beta t \quad (2.28)$$

が得られる。この2つの関数も(2.15)の基本解である。

例2.5 微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 0 \quad (2.29)$$

の特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ であり、その解は $\lambda = -1 \pm i$ である。したがって、 $e^{-t} \sin t$ と $e^{-t} \cos t$ が(2.29)の基本解である。 \square

さて、後回しにしておいた、次の証明を述べる。

[オイラーの公式の証明] オイラーの公式(2.24)の証明を一つ紹介する。正統的な証明法は、関数論で学習するように、 $e^{i\theta}$, $\sin \theta$, $\cos \theta$ のテイラー展開を用いるのであるが、ここでは別の方法を用いる。(2.23)より、

$$\frac{d}{d\theta} e^{-i\theta} = -ie^{-i\theta} \quad (2.30)$$

となる。次に、補助関数

$$g(\theta) = e^{-i\theta} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

を導入する。(2.30)を用いて、 g を θ で微分すると

$$\frac{dg(\theta)}{d\theta} = -ie^{-i\theta} (\cos \theta + i \sin \theta) + e^{-i\theta} (-\sin \theta + i \cos \theta) = 0$$

が得られる。ゆえに、 $g(\theta)$ は θ によらない定数関数である。ところが、 $g(0) = e^{-i0} (\cos 0 + i \sin 0) = 1 \cdot (1 + 0) = 1$ なので、全ての θ に対して、 $g(\theta) = 1$ である。よって

$$e^{-i\theta} (\cos \theta + i \sin \theta) = 1$$

であるから、両辺に $e^{i\theta}$ を掛ければ、オイラーの公式(2.24)が導かれる。 \blacksquare

2.7 減衰振動

調和振動子に、さらに速度の大きさに比例する抵抗が働いているものとする。前出の例 2.3 を思い出し、そこでの記号を用いよう。

この場合、質点に働く外力 f は

$$f = -kx - \gamma v = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$$

である。ただし γ は正の定数である。したがって、ニュートンの力学の法則 (2.5) は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$$

となる。すなわち、移項すれば

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.31)$$

であり、この微分方程式に対し、特性根の方法を応用するわけである。

特性方程式は

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$$

である。式を見やすくするために、

$$\kappa = \frac{\gamma}{2m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とおくと、特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega^2 = 0$$

となり、特性根 λ_1, λ_2 は

$$\lambda_1 = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega^2} \quad (2.32)$$

で与えられる。

いま、抵抗が小さめである場合、すなわち

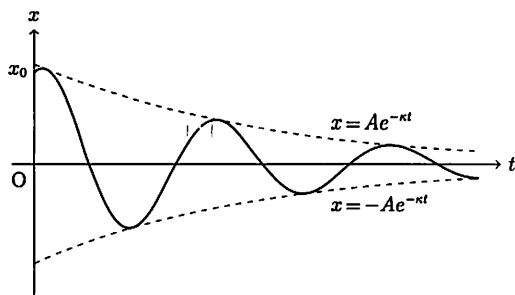


図 2.8 (2.33)のグラフ

$$\kappa^2 < \omega^2$$

である場合を考える。このとき、 λ_1 と λ_2 は複素数となり、互いに共役複素数である。実際、

$$\delta = \sqrt{\omega^2 - \kappa^2}$$

とおけば、

$$\lambda_1 = -\kappa + i\delta, \quad \lambda_2 = -\kappa - i\delta$$

と書ける。この特性根を用いて、(2.28)に従うと次の基本解が得られる。

$$e^{-\kappa t} \sin \delta t \quad \text{と} \quad e^{-\kappa t} \cos \delta t.$$

x , v のそれぞれの初期値を x_0 , v_0 とし、それに適合するように係数を選べば、質点の座標 x を表す式として

$$x(t) = e^{-\kappa t} \left(x_0 \cos \delta t + \frac{v_0 + \kappa x_0}{\delta} \sin \delta t \right) \quad (2.33)$$

が得られる。(2.33)の x のグラフを t を横軸にとって描くと、たとえば、図 2.8 のようになる。ただし、 $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \kappa x_0}{\delta} \right)^2}$ である。

このように、質点は振幅を減衰しながら原点の左右に振動する。すなわち、減衰振動をする。

一方で、 γ が大きくて、 $\gamma^2 - 4mk \geq 0$ となる場合にも、2.A 項で述べる定理 2.7 を用いて解を求めることができ、この場合は、質点が振動せずに減衰する(→問 2.6)。

問題

問 2.1 微分方程式 $x''+2x'+5x=0$ の初期条件 $x(0)=1$, $x'(0)=3$ を満たす解 $x=x(t)$ を表す式を求めよ.

問 2.2 x 軸上の動点 P の座標 $x=x(t)$ が微分方程式 $x''+3x=0$, および初期条件 $x(0)=2$, $x'(0)=k$ を満たしている. ただし, k は正数である. また, P の振動の振幅は 4 であるという. このとき, k の値を求めよ.

問 2.3 x 軸上を運動する動点 P の座標 $x=x(t)$ は微分方程式 $x''=-2x'$ と初期条件 $x(0)=0$, $x'(0)=6$ を満たすという. $t \rightarrow \infty$ のとき, 動点 P が限りなく近づいていく点 A の座標を求めよ.

問 2.4 x 軸上を運動する動点 P の座標 $x=x(t)$ は微分方程式 $x''+4x=0$, および初期条件 $x(0)=2\sqrt{3}$, $x'(0)=4$ を満たすという. $t \geq 0$ の範囲で動点 P が最初に原点を通過する時刻 T を求めよ.

問 2.5 次の微分方程式の初期値問題の解 $x=x(t)$ を求めよ.

- (1) $x''-2x=0$, $x(0)=2$, $x'(0)=0$.
- (2) $x''+2x=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$.
- (3) $x''+2x'+x=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
- (4) $3x''+2x'-x=0$, $x(0)=2$, $x'(0)=2$.

問 2.6 γ, m, k が $\gamma^2-4mk \geq 0$ を満たす正定数のとき, 微分方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.31)$$

の解を求めよ. また, 解 $x(t)$ が, $t \rightarrow \infty$ の際に, 振動せずに 0 に減衰することを確かめよ.

ノート

2.A 特性根の方法への補足

2.6 節では, 微分方程式

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (2.34)$$

について、特性方程式

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2.35)$$

が異なる解をもつ場合を考察した。

それでは、特性方程式(2.35)が、唯一の実数解(重解) λ_1 をもつ場合はどうすればよいであろうか? 実際、このときには、解が $e^{\lambda_1 t}$ しか得られていないので、もう一つの解を探さねばならない。いま、(定数) $\times e^{\lambda_1 t}$ の形の関数が、解であることはわかっている。そこで、定数の部分を機械的に関数に置き換えて、もう一つの解を、

$$u(t)e^{\lambda_1 t}$$

の形で探してみる。すなわち、関数 $u(t)$ を、 $u(t)e^{\lambda_1 t}$ が、(2.34)を満たすように求めるのである。このような解の求め方を、定数変化法とよぶ。実際、代入してみると、

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = \left[a \frac{d^2 u}{dt^2} + (2\lambda_1 a + b) \frac{du}{dt} + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)u \right] e^{\lambda_1 t}$$

となるが、 $a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = 0$ であり、さらに、解と係数の関係より $2\lambda_1 = -\frac{b}{a}$ なのだから、 $u(t)e^{\lambda_1 t}$ が解になるためには、 $\frac{d^2 u}{dt^2} = 0$ であればよい。このような関数の中で最も簡単なものとして、 $u(t) = t$ を選ぼう ($u(t) = 1$ を選ぶと $e^{\lambda_1 t}$ に戻ってしまう)。すなわち、もう一つの解として $te^{\lambda_1 t}$ が得られた。したがって、特性方程式(2.35)が、唯一の実数解(重解) λ_1 をもつ場合は、

$$e^{\lambda_1 t} \quad \text{と} \quad te^{\lambda_1 t}$$

が(1組の)基本解である。

例2.6 微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 9x = 0 \quad (2.36)$$

の特性方程式は $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ であり、特性根は $\lambda = -3$ (重解)である。し

たがって e^{-3t} と te^{-3t} が(2.36)の基本解となる。 □

ところで、(2.35)は実数係数の2次方程式であるから、解は、判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号により、次の3つの場合に分けられる。

- (a) $D > 0$ のとき、異なる2つの実数解 λ_1, λ_2 が存在する。
- (b) $D < 0$ のとき、複素数解 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ が存在する (α と β は実数で、 $\beta \neq 0$ である)。
- (c) $D = 0$ のとき、唯一の実数解(重解) λ_1 が存在する。

2.6節の考察も含めて、いままでの考察を定理の形でまとめておこう。

定理 2.7 定数係数の2階線形微分方程式(2.34)とその特性方程式(2.35)を考える。 $D = b^2 - 4ac$ とおく。

- (a) $D > 0$ のとき、(2.35)には異なる2つの実数解 λ_1, λ_2 が存在し、(2.34)の一般解は、

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

となる。

- (b) $D < 0$ のとき、(2.35)には複素数解 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ が存在し (α と β は実数で、 $\beta \neq 0$)、(2.34)の一般解は、

$$x(t) = e^{\alpha t} (c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t)$$

となる。

- (c) $D = 0$ のとき、(2.35)には唯一の実数解(重解) λ_1 が存在し、(2.34)の一般解は、

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$$

となる。

なお、上記の(a), (b), (c)において、 c_1 と c_2 は任意の定数を表す。

2. B 非同次の微分方程式

インダクタンス L のコイル, 抵抗値 R の抵抗, 容量 C のコンデンサを直列に接続した電気回路を考える. 回路に起電力 $E(t)$ を加えるとき, コンデンサに蓄積される電荷 $Q=Q(t)$ は, 微分方程式

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t) \quad (2.37)$$

に従う. なお, 回路を流れる電流 $I=I(t)$ と電荷の間には $I = \frac{dQ}{dt}$ の関係がある.

この例のように, 微分方程式(2.15)を,

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = f(t) \quad (2.38)$$

の形に一般化した微分方程式で記述できる物理現象も多い. ここで, a, b, c は定数, $f(t)$ は t の関数である. (2.38)の形の微分方程式を定数係数の2階線形非同次微分方程式という. これに対して, (2.15)は, 定数係数の2階線形同次微分方程式とよばれる.

非同次方程式(2.38)の一般解は,

$$x(t) = \tilde{x}(t) + c_1 \varphi(t) + c_2 \psi(t)$$

で与えられる. ただし, $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は同次方程式(2.15)の基本解, c_1 と c_2 は任意の定数であり, さらに, $\tilde{x}(t)$ は(2.38)の解である. $\tilde{x}(t)$ としては見つけやすいものを一つ適当に選ばばよい.

たとえば, 正数 ω に対して,

$$x'' + \omega^2 x = \sin t \quad (2.39)$$

という非同次方程式の一般解を求めてみよう. 対応する同次方程式の基本解は, $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ である. 一方で, A を定数として, $\tilde{x}(t) = A \sin t$ とおいてみて, (2.39)に代入すると, $-A \sin t + \omega^2 A \sin t = \sin t$. すなわち, $A(\omega^2 - 1) = 1$ を得る. したがって, $\omega \neq 1$ のとき, (2.39)の一般解は,

$$x(t) = \frac{1}{\omega^2 - 1} \sin t + c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$$

で与えられる.

3

競合の数理

第1章では1種類の生物の増殖の数理を学んだ。そこでの典型的な結果の一つは、マルサスの法則であった。この章では、たとえば、2種類の生物が互いに影響し合って増殖する場合、すなわち、競合が存在する場合の増殖を数理的に考察しよう。簡単な場合、そのモデルは2つの未知関数に対する連立微分方程式の初期値問題になる。ベクトルを用いての見方を含め、このようなモデルになじみ、また、簡単な場合についてその解を求める方法を理解しよう。

3.1 一方的な影響がある場合

いまある地域に2種類の生物がすんでいるものとする。それぞれの個体数を $x=x(t)$, $y=y(t)$ 。また、増殖係数を a, b で表す。もし、互いに影響を及ぼさないとすると、 x, y の変化は独立にマルサスの法則に従い、

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dy}{dt} = by \quad (3.1)$$

が成り立つ。考察を開始する最初の時刻 $t=0$ において、

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (3.2)$$

であったとする。ここで、 x_0 と y_0 は正の定数である。そうすると、その後の時刻における、 x, y は、

$$x(t) = x_0 e^{at}, \quad y(t) = y_0 e^{bt}$$

で与えられる。これは2種類の生物おのおのが、すなわち、第1種、第2種が影響を及ぼさないとした場合である。

しかし、実際の生物どうして考えると、その組み合わせによっては、相手の増加が自分たちの増殖に悪影響を及ぼすことがある。このような問題に対する簡単なモデルを調べてみよう。

まず、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - cy, \\ \frac{dy}{dt} = by \end{cases} \quad (3.3)$$

で表される関係を考察する。ここで、係数 c は正の定数とする。また、例外的な複雑さを避けるために、第1種、第2種のそれぞれの増殖係数 a, b は異なっていると仮定する。

(3.3)の第1式を見ると、右辺に $-cy$ が登場しているので、 y が増えると x の増加率は cy だけ減る向きに影響を受けることがわかる。第2式の $\frac{dy}{dt}$ は y のみで表され x と関係していないから、第2種の生物は、 x の増減の影響を受けないで増殖している。

さて、 x と y の初期条件を(3.2)とすると、まず、 y の初期値と(3.3)の第2式から y が定まる。すなわち、

$$y(t) = y_0 e^{bt}$$

である。この y を、(3.3)の第1式の右辺に代入すると、

$$\frac{dx}{dt} = ax - cy_0 e^{bt} \quad (3.4)$$

が得られる。右辺に t が現れているが、(3.4)は未知関数 x に関する単独の微分方程式である。これを初期条件 $x(0) = x_0$ のもとに解きたい。

このような方程式を解く定石は、やはり定数変化法とよばれる次の方法である。

その方法をやや一般的な形で説明するために、

$$\frac{dx}{dt} = ax + f(t) \quad (3.5)$$

という形の微分方程式を扱うことにする。 $f(t)$ は与えられた t の関数である。 $f=0$ のときに、(3.5)の解が、

$$x(t) = Ce^{at}$$

となることはわかっている。 C は任意の定数である。これをヒントにして、一般の場合に、(3.5)の解を

$$x(t) = C(t)e^{at} \quad (3.6)$$

とおいて探すのである。ただし、今度は、 C は定数でなく、 t の関数 $C=C(t)$ である。

実際、(3.6)を微分方程式(3.5)に代入すると、

$$C'(t)e^{at} + C(t)ae^{at} = aC(t)e^{at} + f(t)$$

なので、

$$C'(t) = e^{-at}f(t)$$

が得られる。これを積分して、

$$C(t) = C(0) + \int_0^t e^{-as}f(s) ds$$

が出る。

初期条件を考えると、 $x(0) = C(0)e^0 = C(0)$ だから、 $C(0) = x_0$ にとればよい。結果として未知関数 $C(t)$ が、

$$C(t) = x_0 + \int_0^t e^{-as}f(s) ds \quad (3.7)$$

と定まる。

(3.7)の両辺に e^{at} を掛けて、結局、方程式(3.5)の初期条件を満足する解 $x(t)$ が、

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s) ds \quad (3.8)$$

で与えられることになる。(3.8)をデュアメル^{*1}の公式とよぶことがある。

さて、方程式(3.4)の考察に戻る。上のやり方を、

$$f(t) = -cy_0e^{bt}$$

として適用すればよい。必要な積分計算を示すと、

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{a(t-s)}(-cy_0e^{bs}) ds &= -cy_0e^{at} \int_0^t e^{(b-a)s} ds \\ &= -\frac{cy_0}{b-a}(e^{bt} - e^{at}) \end{aligned}$$

となる。これを、(3.8)に用いれば、最終的に $x(t)$ を表す式は、

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0e^{at} - \frac{cy_0}{b-a}(e^{bt} - e^{at}) \\ &= \left(x_0 + \frac{cy_0}{b-a}\right)e^{at} - \frac{cy_0}{b-a}e^{bt} \end{aligned} \quad (3.9)$$

である。

さて、得られた式と現象をつき合わせて、意味を考えてみよう。

たとえば、第2種の増殖率 b が負で、 y が減っていく場合を考える。また、 y の初期値 y_0 は、正ではあるが十分小さいと仮定しよう。一方、 a は正であるとしておく。第2種の生物の個体数は $y(t) = y_0e^{bt}$ であるが、この場合、 b が負であるから、この $y(t)$ は指数関数的に0に近づく。したがって、十分に時間が経てば、(3.9)の式の最後の項が非常に小さくなるから、 $x(t)$ は、およそ、最初の項だけで表される。すなわち、 $t \rightarrow \infty$ では、 $x(t)$ は、ほとんど、

$$\left(x_0 + \frac{cy_0}{b-a}\right)e^{at} \quad (t \rightarrow \infty)$$

と同じ挙動を示す。 $x_0 + \frac{cy_0}{b-a} < x_0$ なので、これはちょうど、第2種の生物の存在が第1種の生物の増殖に悪影響を与える様子は、時間が十分に経った先では、第1種だけが生息しているが、その初期条件が少し小さくなった場

*1 Jean-Marie Constant Duhamel 1797-1872.

合と類似であることを意味している。

いろいろな a と b の組み合わせがあるが、今度はたとえば、 $b > 0$ で、 $b > a > 0$ の場合を考える。

そうすると、もともと第2種は独立に増殖していくのであるが、 b が正であるから、第2種の生物の個体数 y は、指数関数的に発散していく。それは e^{bt} の速さで大きくなるから、 e^{at} の速さで大きくなる量よりもずっと速く増大する。(3.9)の $x(t)$ を表す式では、最後の項である

$$-\frac{cy_0}{b-a}e^{bt}$$

が絶対値において一番速く大きくなる項である。この前の項は、いずれ後ろの項に追い抜かれてしまう。これを式でいえば、 $x(t)$ の値が0になる t の有限な値 T が存在するということになる。実際に、(3.9)の最後の辺を0とおいて、 $x(t)$ が0となる時間 T を求めると、

$$T = \frac{1}{b-a} \log \left(1 + \frac{(b-a)x_0}{cy_0} \right) \quad (3.10)$$

となる。

時刻 $t=T$ の後も、(3.9)で与えられる $x(t)$ は、もちろん微分方程式の解ではある。しかし、 $x(t)$ が第1種の生物の個体数を表しているという、いま考えているモデルに関しては、 $x(t)$ が負になってしまうことは、その時刻以後、モデルが適用できないことを意味している。

言い換えると、 b が a よりも大きい場合には、(3.10)で与えられた T が、第1種の生物が絶滅するまでの時間であり、第1種および第2種の生物たちの個体数の変化を記述するモデルとして、(3.3)の連立微分方程式が適用されるのは、時間 T までであるということになる。

3.2 互いに影響がある場合——特性根を用いる解析

第1種、第2種の生物のそれぞれの増殖が互いに影響し合う場合を解析しよう。このときは、 x, y の変化を表す微分方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - cy, \\ \frac{dy}{dt} = by - dx \end{cases} \quad (3.11)$$

のようになる。

今度は y も、相手の生物が増えると、増殖率に影響を受ける形になっている。以後は、できるだけ一般的に議論をするために、 a, b, c, d は任意の定数としよう。

上の連立微分方程式を x と y の初期条件のもとに解くことが、問題を数理的に解析することになる。ここでは、時間がずっと経過したとき、すなわち t が大きくなったときの両生物の増殖の様子、言い換えれば、解の漸近的な振る舞いを主として調べることにする。

さて、 x が求まれば、(3.11)の第1式から y は、

$$y(t) = \frac{1}{c} \left(ax - \frac{dx}{dt} \right) \quad (3.12)$$

と直ちに計算できるので、 x を求めることを考えればよい。そのために、(3.11)から y を消去して x のみの微分方程式を導く。まず、(3.11)の第1式を微分して、結果に第2式と(微分する前の)第1式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= a \frac{dx}{dt} - c \frac{dy}{dt} \\ &= a \frac{dx}{dt} - c(by - dx) \\ &= a \frac{dx}{dt} + b \left(\frac{dx}{dt} - ax \right) + cd x, \end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a+b) \frac{dx}{dt} + (ab - cd)x = 0 \quad (3.13)$$

を得る。

この微分方程式の解を、2.6節で説明した特性根の方法を用いて求めてみよう。まず、特性方程式は、

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - cd) = 0 \quad (3.14)$$

である。2.6節の考察により、この特性方程式の解 λ_1, λ_2 に応じて、(3.13)の一般解の形が決まる。

まず、 λ_1, λ_2 が異なる実数のとき、(3.13)の解は、

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

となる。 c_1 と c_2 は、初期条件(3.2)を満たすように決める定数である。この式をもとに、 $t \rightarrow \infty$ の際の解の漸近的な振る舞いを調べよう。 λ_1 と λ_2 の符号がともに負ならば、 c_1 と c_2 が何であっても(初期値が何であっても)、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $x(t) \rightarrow 0$ となる。このとき、 $\frac{dx}{dt}(t) \rightarrow 0$ でもあるので、(3.12)により、 y も $y(t) \rightarrow 0$ となる。

λ_1, λ_2 が共役複素数 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (α, β は実数) のとき、(3.13)の解は、

$$x(t) = e^{\alpha t} (c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t)$$

となる。この場合は、 $\alpha < 0$ のとき、すなわち、特性根の実部が負であれば、初期値が何であっても、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $x(t) \rightarrow 0$ かつ $y(t) \rightarrow 0$ となる。

$\lambda_1 = \lambda_2$ の場合は、 $\lambda_1 < 0$ であるならば、初期値が何であっても、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $x(t) \rightarrow 0$ かつ $y(t) \rightarrow 0$ となることが示せる(→ 2. A 項の定理 2.7)。

以上のことを、定理の形でまとめておこう。

定理 3.1 連立微分方程式の初期値問題(3.11)、(3.2)の解 $x(t)$ と $y(t)$ が、初期値が何であっても、 $t \rightarrow \infty$ のときに、ともに 0 に収束する条件は、特性方程式(3.14)の解の実部が負になることである(もちろん、特性根が実数の場合は、それ自体が負であればよい)。

3.3 互いに影響がある場合——行列を用いる解析

(3.11)の形の連立微分方程式を解析する際には、これから説明するように、

ベクトルおよび行列の記法を用いるのが便利である。また、ベクトルと行列を用いた表記に基づく解析は、未知関数が、さらに3つ4つと増えた際に直接の応用が可能である。

2つの未知関数 x, y を並べて成分とした未知ベクトル関数 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ を、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

により導入する。一方で、(3.11)の右辺の係数を並べた行列

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ -d & b \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

を定める。そうすると、

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = A\mathbf{u}(t) \quad (3.16)$$

によって、連立微分方程式(3.11)が表される。初期条件もベクトルの形で、

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

のように書ける。

(3.16)の形の微分方程式を扱う際には、行列 A の固有値 λ と固有ベクトル ϕ が重要である。これらは、

$$A\phi = \lambda\phi, \quad \phi \neq \mathbf{0}$$

によって定められる。ここでは、 $\mathbf{0}$ は成分が全て0のベクトル、すなわち、零ベクトルを表す。線形代数学で学んだように、 A の固有値は、 A の固有方程式

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & c \\ d & \lambda - b \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - cd = 0 \quad (3.18)$$

の解である。なお、この方程式は先ほど出てきた(3.13)の特性方程式(3.14)

にほかならない。すなわち、先ほどと同様に、次の3つの場合が考えられる。

- (a) 異なる2つの実数解 λ_1, λ_2 が存在する。
- (b) 複素数解 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ が存在する (α と $\beta \neq 0$ は実数)。
- (c) 実数の重解 λ_1 が存在する。

ここでは、(a)と(b)の場合のみ詳しく見ていこう。すなわち、 A に異なる2つの固有値 λ_1, λ_2 が存在する場合を扱う。 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルを ϕ_1, ϕ_2 とする。すなわち、

$$A\phi_1 = \lambda_1\phi_1, \quad A\phi_2 = \lambda_2\phi_2 \quad (3.19)$$

である。

いま、初期条件 u_0 が、 ϕ_1 と ϕ_2 を用いて、

$$u_0 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \quad (3.20)$$

と表されるように、定数 c_1, c_2 を定める。

そうすると、次の定理で述べるように、初期値問題(3.16), (3.17)を満たす解が簡単につくられる。

定理 3.2 行列 A が異なる2つの固有値 λ_1, λ_2 をもつとき、初期値問題(3.16), (3.17)の解は、

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \phi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \phi_2 \quad (3.21)$$

で与えられる。ただし、定数 c_1, c_2 は(3.20)を満たすものである。

[証明] この定理の証明は、検算することによってなされる。いま、 $t=0$ とおくと、(3.21)の右辺は(3.20)と一致するから、初期条件が成り立つことがわかる(むしろ、そのように c_1, c_2 を選んだのである)。

微分方程式を満たすかどうかは、計算を実行して確かめてみればよい。まず、

$$\frac{du}{dt} = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \phi_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \phi_2$$

である。さらに、(3.19)を用いれば、

$$A\mathbf{u} = c_1 e^{\lambda_1 t} A\phi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} A\phi_2 = c_1 e^{\lambda_1 t} \lambda_1 \phi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \lambda_2 \phi_2$$

も得られる。これらの右辺が一致するので、(3.16)の成立が確かめられ、定理の証明が完了した。 ■

さて、定理 3.2 によると、 λ_1 と λ_2 がともに実数であり、その符号がともに負であれば、初期値が何であっても、

$$\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (3.22)$$

が成り立つ。次に、 λ_1 と λ_2 が複素数のとき、すなわち、 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (α と $\beta \neq 0$ は実数) の形のときを考える。このとき、オイラーの公式により、

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

なので、 $\alpha < 0$ 、すなわち、 λ_1 の実部が負ならば、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $c_1 e^{\lambda_1 t} \phi_1 \rightarrow \mathbf{0}$ となる。つまり、 λ_1 と λ_2 の実部が負ならば、(3.22)が成り立つのである。

行列 A の固有値がただ一つだけの場合にも、同様のことが確かめられる(→ 3.A 項)。まとめると、定理 3.1 と同等な次の定理が得られるのである。

定理 3.3 微分方程式の初期値問題(3.16)、(3.17)の解 $\mathbf{u}(t)$ が、初期値 \mathbf{u}_0 が何であっても、 $t \rightarrow \infty$ のときに、 $\mathbf{0}$ に収束する条件は、行列 A の全ての固有値の実部が負になることである。

全ての固有値といっても、 2×2 行列であるから、固有値は 2 つしかないが、定理の主張それ自体はもっと未知数が多い場合にも適用できるので上のような表現をとった。

固有値の符号が異なっているときには、時間無限大でどのようになるか。(3.21)に戻って考えてみると、たとえば、 λ_1 の実数部分が正で、 λ_2 の実数部分が負であったら、時間が経つに従って、(3.21)の右辺の第 2 項は $\mathbf{0}$ に近づき、第 1 項が主要部分になる。時間が経つに従って、第 1 項が大勢を定めるわけである。

3.4 軍拡競争のモデル

少し話題を変えて、2つの国の間の軍備拡張の競争のモデルに話を移そう。

2つの国 X, Y があり、それぞれに相手を意識して軍備をするという状況を思い浮かべる。そうして、それぞれの国の軍備のレベルを x, y で表すことにする。

軍備のレベルといっても、どのように量的に表現されるかという問題は難しい。ここでは、たとえば軍備につき込まれた費用で表すといった方法で数量化されているものとする。

ここでの解析は、非常に簡単なモデルを考えているので、現実の2つの国の軍拡競争がこれで表されるわけではない。それでも、数理的に軍備の競争をとらえるには、どのようなモデル・考え方が可能かという端緒を示すには役立つだろう。

以下では、 x と y を時間 t の関数と考える。

さて、 $\frac{dx}{dt} > 0$ である場合には、X 国の軍備のレベルが時間とともに増強されている。それに対して、 $\frac{dx}{dt} < 0$ であれば、X 国は軍備を縮小中ということになる。

そして、いま、 x, y の変化が微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ky - ax + g, \\ \frac{dy}{dt} = lx - by + h \end{cases} \quad (3.23)$$

で表されているとする。ここに登場した k, l, a, b, g, h はいずれも正の定数であるとしておく。

軍備拡張の競争モデルを与える上の連立微分方程式をリチャードソンのモデル*2という。ただし、ここで取り上げたのは、彼自身、および他の人達によって提案されたモデルのうち一番簡単なものである。

まず、(3.23)における k と l に着目する。 k が正なので、 y が増えると $\frac{dx}{dt}$

*2 Lewis Fry Richardson 1881-1953.

が増える効果をもつ。\$l\$については、\$x, y\$の立場が入れ替わる。すなわち、\$k, l\$を含む項は、相手国の軍備のレベルに応じて、自分の国の軍備のレベルを上昇させる傾向に対応している。

一方、(3.23)の第1式における\$-ax\$の項を見てみよう。これは、\$x\$を大きくすると、そのこと自体が\$\frac{dx}{dt}\$を抑える効果をもつことを意味している。つまり、軍備を拡張することは、社会・国力の負担になり疲弊を伴うので、いずれ、軍備拡張の速度を鈍化させることを表している。

同じ式の\$g\$は相手国および自分の国のその時点での状況とは関係なしに定率で軍備のレベルを上昇させる部分を表している。

(3.23)の第2式の各項についても、\$\frac{dy}{dt}\$、すなわち\$Y\$国の軍拡速度を定める要因についても同様の考察が可能である。

さて、この連立方程式をベクトルの形に書くと、

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{f} \quad (3.24)$$

になる。ただし、

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a & k \\ l & -b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

とおいている。

まず、\$\mathbf{f} = \mathbf{0}\$の場合を考える。そうすると、方程式が、

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = A\mathbf{u}(t) \quad (3.25)$$

と簡単な形になり、先ほどの解析が適用できる。それにより、固有値の実部が負となり解が\$t \rightarrow \infty\$で\$\mathbf{0}\$になるための条件を求めてみよう。

上の\$A\$の固有値を定める固有方程式は、

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + a & -k \\ -l & \lambda + b \end{vmatrix} = \lambda^2 + (a+b)\lambda + ab - kl = 0 \quad (3.26)$$

となる。

この方程式の解の実部の符号を調べる。実数解の場合を考えると、\$\lambda\$の係数

$a+b$ が正であるから、あとは定数項 $ab-kl$ が正になっていると、解と係数の関係により、2つの実数解は負になるはずである。複素数解になるとしても、 $a+b$ が正であるから、実部は必ず負になる。

実数解の場合、2つの解が負となるための条件、

$$ab - kl > 0$$

を検討してみよう。これで見ると、積 ab が積 kl よりも大きければ、固有値 λ_1, λ_2 が負になって、解 $\mathbf{u}(t)$ は時間の経過とともに $\mathbf{0}$ に減衰していく。すなわち、軍備のレベルが $\mathbf{0}$ に近づくことがわかる。

つまり、このモデルでは、 $ab-kl$ が正であるならば、すなわち、相手の軍備に対する恐怖から軍備を増強する係数の積 kl に比較して、疲弊により軍備拡張を抑制する係数の積 ab が大きいと、両国の軍備は結局は縮小していくことになる。

最後に、定数の部分 \mathbf{f} が $\mathbf{0}$ とは限らない場合を簡単に見ておく。ただし、 A の固有値の実数部分はともに負であるものとする。

まず、 $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ の場合の定常解を問題にしよう。それは、(3.24)で、 $\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \mathbf{0}$ とおいた方程式の解である。特にこの解を \mathbf{v}_0 と書くことにする。すなわち、定常解 \mathbf{v}_0 は、

$$A\mathbf{v}_0 + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{3.27}$$

を満たす。

これから示したいことは、 A の固有値の実部が負の場合には、両国の軍備のレベルを表している関数 $\mathbf{u}(t)$ が時間 t を無限大にしたとき、この定常解に近づいていくという事実である。

そのために、

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_0 \tag{3.28}$$

とおく。そして、(3.24)と(3.27)を用いて、 $\mathbf{w}(t)$ の満たす方程式を調べると

$$\begin{aligned}
 \frac{dw(t)}{dt} - Aw(t) &= \frac{du(t)}{dt} - \frac{dv_0}{dt} - Au(t) + Av_0 \\
 &= \left(\frac{du(t)}{dt} - Au(t) \right) + Av_0 \\
 &= \mathbf{f} + Av_0 = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$\frac{dw(t)}{dt} = Aw(t) \quad (3.29)$$

が成り立つことがわかる。

未知関数が $w(t)$ で書かれているが、微分方程式としては(3.29)と(3.25)は同じである。したがって、いまの仮定のもとでは、どんな初期値に対しても $t \rightarrow \infty$ につれて、 $w(t)$ は $\mathbf{0}$ に近づく。 $w(t)$ が $\mathbf{0}$ に近づくことは、 $u(t)$ が v_0 に近づくことを意味している。すなわち、非定常の解 $u(t)$ が定常解 v_0 に近づくことが示されたのである。

問 題

問 3.1 xy 平面の動点 $P(x, y)$ の座標 x, y が微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と初期条件 $x(0)=2, y(0)=1$ を満たしている。このとき、原点から P までの距離の平方 $r^2 = x^2 + y^2$ を t の関数として表せ。

問 3.2 xy 平面の動点 $P(x, y)$ の座標 x, y が微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

に従って変化している。 P の初期位置がどこにあっても、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 P が原点に限りなく近づいていくような定数 k の範囲を求めよ。

問 3.3 xy 平面の動点 $P(x, y)$ の座標 x, y が時間 t を変数とする微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - y$$

に従って変化している。 $t=0$ から動き始める P の初期位置は点 $A(1, 1)$ である。いま、P が動き始めてから、はじめて y 軸を横切る位置を点 $B(0, b)$ とするとき、 b の値を求めよ (ヒント: x, y を t で表すためには、未知関数を $X=x, Y=y-x$ により、 x, y から X, Y に変換するとよい)。

問 3.4 次の微分方程式の解 $x=x(t)$ を求めよ。

(1) $x' = -ax + \cos bt, \quad x(0) = 0$ (a, b は正定数)。

(2) $x' = -x + t \sin t, \quad x(0) = 1$ 。

問 3.5 次の微分方程式の解 $x(t), y(t)$ を求めよ。

(1)
$$\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = -2y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

(2)
$$\begin{cases} x' = -4x + 2y, \\ y' = -8x + 6y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$$

ノート

3. A 行列の指数関数

スカラー値の微分方程式 $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$ を解く際に、指数関数 e^{at} が重要であったのと同様に、(3.15) で定義される行列 A に対して、微分方程式

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = A\mathbf{u}(t) \quad (3.16)$$

を解く際には、行列の指数関数 e^{tA} が有用である。これは、

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots \quad (3.30)$$

で定義される行列である。ただし、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は単位行列を表している。 A をあたかも定数のように考え、(3.30)の両辺を t で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!} A^3 + \dots \\ &= A \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots \right) = Ae^{tA} \end{aligned} \quad (3.31)$$

が成り立つ。さらに、零行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して、

$$e^O = e^{tO} = I$$

なので、

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{u}_0 \quad (3.32)$$

とおくと、これは、微分方程式(3.16)と初期条件(3.17)を満たす。すなわち、(3.32)が求めたい初期値問題の解である。

これで、目的の問題は解けたことになるが、しかし、ここから直接に解の挙動の具体的な情報を得るのはむずかしい。そこで、この表示をもとに、もう少し詳しい解析に踏み込んでいこう。そのために、 A の固有値と固有ベクトルを利用する。

まず、 A が相異なる固有値 λ_1 と λ_2 をもつ場合を考える。このとき、任意の非負の整数 k に対して、

$$A^k \phi_1 = A^{k-1} (A\phi_1) = \lambda_1 A^{k-1} \phi_1 = \dots = \lambda_1^k \phi_1$$

が成り立つ。したがって、

$$e^{tA} \phi_1 = \left[1 + \lambda_1 t + \frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \dots \right] \phi_1 = e^{\lambda_1 t} \phi_1 \quad (3.33)$$

が得られる。ここで、通常の数関数のテイラー展開

$$e^{\lambda_1 t} = 1 + \lambda_1 t + \frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \dots$$

を用いている。同様に、

$$e^{tA} \phi_2 = e^{\lambda_2 t} \phi_2 \quad (3.34)$$

が得られる。定数 c_1 と c_2 を (3.20) を満たすように選んでおき、いま導いたばかりの (3.32), (3.33), (3.34) を合わせると、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= e^{tA} \mathbf{u}_0 \\ &= e^{tA} (c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2) \\ &= c_1 e^{tA} \phi_1 + c_2 e^{tA} \phi_2 \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \phi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \phi_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

となり、定理 3.2 の表現公式 (3.21) が出るのである。

最後に、行列 A の固有値がただ一つの場合、すなわち、行列 A の固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ が重解 λ_1 をもつ場合を考える (λ_1 は必然的に実数である)。そのために、一般に、

$$A^2 - (a+b)A + (ab - cd)I = O \quad (3.36)$$

が成り立つことに注意しよう。これはケーリー-ハミルトンの定理*3とよばれる重要な定理であり、直接の代入により、簡単にその成立が確かめられる。いま、解と係数の関係から、 $a+b=2\lambda_1$, $ab-cd=\lambda_1^2$ なので、(3.36) より

$$(A - \lambda_1 I)^2 = O \quad (3.37)$$

が得られる。これより、

$$(A - \lambda_1 I)^k = O \quad (k = 2, 3, \dots)$$

*3 Arthur Cayley 1821-1895, William Rowan Hamilton 1805-1865.

であるから,

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= e^{\lambda_1 t I} e^{t(A - \lambda_1 t I)} \\
 &= e^{\lambda_1 t I} \left[I + t(A - \lambda_1 I) + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda_1 I)^2 + \frac{t^3}{3!} (A - \lambda_1 I)^3 + \dots \right] \\
 &= (e^{\lambda_1 t I}) [I + t(A - \lambda_1 I)] \\
 &= (1 - \lambda_1 t) e^{\lambda_1 t I} + t e^{\lambda_1 t I} A
 \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、このとき、初期値問題(3.16), (3.17)の解は,

$$\mathbf{u}(t) = (1 - \lambda_1 t) e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_0 + t e^{\lambda_1 t} A \mathbf{u}_0$$

で与えられるのである。なおこの表現には、 $A = \lambda_1 I$ 、すなわち、 $A - \lambda_1 I = O$ という自明な場合も含まれている。これより、 λ_1 の符号が負であれば、初期値が何であっても、

$$\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad (t \rightarrow \infty)$$

となることがわかり、定理3.3で述べたことが全て確かめられたことになる。

4

惑星運動の数理

これまでの章で、増殖、振動、競争といった、自然界や社会のいろいろな現象を数理的に理解するのに、微分方程式が役立つことを知った。しかし、微分方程式によって自然現象を解明する仕事のなかで、歴史的に最も古く、最も大きな成功の一つは、ニュートンによってなされたものであり、それは、地球、水星、金星といった惑星が太陽の周りを回る運動を明らかにしたものであった(図 4.1)。この章では、この惑星の運動の数理について学ぶ。

4.1 惑星の運動とニュートン

ニュートンが惑星の運動を数学的に解くことに成功したのには3つの根拠がある。

一つは、ニュートン自身が発見した微分積分法、すなわち解析学である。二番目は、すでに第2章で説明した、ニュートンの力学の法則である。最後の

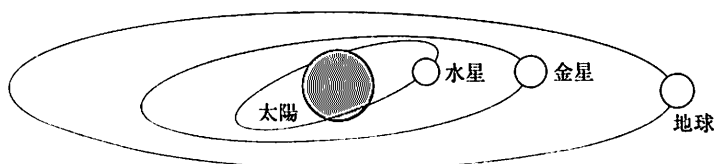


図 4.1 惑星の運動

ものが、これもニュートン自身が発見した万有引力の法則である。

万有引力の法則とは、質量をもっている物体の間には引力が働くこと、および、その大きさはどのようなものであるかを明らかにした法則である。

天才ニュートンによる微積分学、力学の法則、万有引力の三大発見が一体として役立ち、惑星の運動の解明という見事な成果をもたらした。

ニュートンが惑星の運動を数学的に解く以前には、天文学者ブラーエ*1が望遠鏡によって観測した膨大なデータを残していた。ブラーエの助手であった天文学者ケプラー*2は、それをまとめ、地球、金星、水星などの太陽の周りを回る惑星の運動に関する3つの法則を提出した。ケプラーの法則とよばれるその法則を、今日的に表現すると次のようになる。

第一法則 惑星の軌道は太陽を焦点の一つとする楕円を描く。

第二法則 太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間あたりに掃過する面積は場所に依存しない。

第三法則 惑星の公転周期の2乗は惑星の軌道の長軸の長さの3乗に比例する。

ニュートンは、上に述べた3つの数学的および物理的な根拠の上に立って、惑星の運動を数理的に解き、ケプラーの法則を全て証明したのであった。

こうしてニュートンは、実験、観測によって得られた経験的法則に対して、現象を支配する基本的な方程式を立て、それを数学的に解析することにより法則を理論的に証明するという、科学的解明の典型を示したのである。

4.2 惑星の運動方程式

力学の法則を思い出しておこう。質点、すなわち、質量をもっている小さな物の運動を定める法則は、2.3節で説明したように、ニュートンの力学の法則

$$m\alpha = f \quad (4.1)$$

*1 Tycho Brahe 1546-1601.

*2 Johannes Kepler 1571-1630.

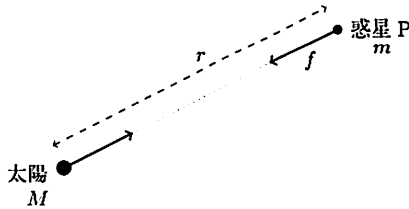


図 4.2 万有引力の法則

で記述される。ここに、 m は考えている質点 P の質量で、 α は質点 P の加速度(ベクトル)である。右辺の f は、質点 P に働いている外力である。なお、質点の位置ベクトルを r で表したときには、加速度 α は $\frac{d^2 r}{dt^2}$ にほかならないことも、2.3 節で述べた。

さて、質点 P が考える惑星である場合には、(4.1)の右辺に現れている力 f は万有引力の法則によるものである。万有引力の法則を具体的に述べよう。

その前に、太陽も惑星も大きな天体であるが、惑星が太陽の周りを回る運動といった、大きなスケールの運動を考えるとときには両者のそれぞれを質点とみなすことが許される。

万有引力の法則 2つの質点の間には、互いに引き合う引力が働き、その大きさは両者の質量の積に比例し、かつ、2質点間の距離の2乗に反比例する。

これを具体的に式で書こう。太陽の質量を M 、考えている惑星 P の質量を m とする。太陽と惑星の間の距離を r で表す(図 4.2)。

そうすると、万有引力として惑星 P に働く外力は、太陽に向かう向きをもち、その大きさは、

$$GmM \frac{1}{r^2}$$

である。

ここで、 G は万有引力の定数とよばれる物理的な定数である。長さの単位をメートル(m)、質量の単位をキログラム(kg)、時間の単位を秒(s)ととったときには、万有引力の定数 G は

$$G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

となることが知られている。しかし、この章の解析を理解するためには、 G は正の定数であると承知しておくだけで十分である。

惑星が運動する間に働く万有引力の大きさは、 G , m , M が定数であるから、 $\frac{1}{r^2}$ に比例して変化する。この事実を“逆2乗の法則”といい表すことがある。

さて、2つの天体、すなわち太陽と惑星に着目しているが、太陽の質量が惑星の質量よりもずっと大きいので、惑星に比較して太陽は動きにくい。これからの扱いでは太陽は動かない、すなわち静止しているとみなすことにする。実際、太陽の質量は $M \approx 1.987 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、地球の質量は $m \approx 5.975 \times 10^{24} \text{ kg}$ であり、その比 $\frac{m}{M}$ はおおよそ 3.01×10^{-6} となる。

そのうえで、太陽の位置に位置ベクトルの基準の点をとる。したがって惑星の位置ベクトル \mathbf{r} の大きさ $|\mathbf{r}|$ が、2つの天体間の距離 r に一致する。次に、惑星 P から太陽に向かう方向を表す単位ベクトルを式で書いてみよう。まず $-\mathbf{r}$ は惑星から太陽へ向かうベクトルである。これを自分自身の長さ r で割ると、単位ベクトル(長さ1のベクトル)になり、その向きは太陽に向かっている。この単位ベクトルを式で書けば

$$-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\frac{\mathbf{r}}{r}$$

である。

以上により、惑星に働く力 \mathbf{f} の大きさと向きが得られたので、 \mathbf{f} をベクトル形で与える式が

$$\mathbf{f} = -GmM \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -GmM \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

となることがわかる。

この \mathbf{f} を用いて惑星 P についてのニュートンの力学の法則(惑星 P の運動方程式)をベクトル形で書けば、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -GmM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.2)$$

である。

なお、これから式を簡潔に書くために、また、別の変数による微分と区別するために、関数を表す文字の上に ' を付けて t による時間微分を表すことにする。たとえば、ベクトル \mathbf{r} を時間で微分したものを $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ を $\dot{\mathbf{r}}$ で表す。また、 \mathbf{r} の第 1 成分を x とすると、それを時間で微分した $\frac{dx}{dt}$ は \dot{x} と書かれる。さらに $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ を $\ddot{\mathbf{r}}$ と書くといった調子である。

(4.2) にこの書き方を採用し、両辺に共通な m で割り算すれば

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.3)$$

が得られる。なお、惑星の位置ベクトル \mathbf{r} の成分を

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

とすると、その大きさ $r = |\mathbf{r}|$ は、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と書かれる。

成分ごとの惑星の運動方程式を (4.3) から導いてみると、

$$\ddot{x} = -GM \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -GM \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -GM \frac{z}{r^3} \quad (4.4)$$

になる。

これは時間を独立変数とする 3 つの未知関数、 x, y, z に対する連立の微分方程式である。それぞれの右辺の分母の r にも x, y, z が含まれているので、(4.4) は相当に複雑な非線形方程式である。

惑星の運動を数理的に明らかにするためには、(4.4) という連立微分方程式を初期条件のもとに解くことが課題になる。すなわち、(4.4) の初期値問題が惑星の運動の数学的定式化である。

初期時刻を $t=0$ とし、初期時刻における惑星の位置ベクトルを $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ とする。さらに、 $t=0$ のときにどのような速度をもっていたかも考慮しなければならない。そこで、初期速度を \mathbf{v}_0 とおく。

結局、惑星の運動を解くための課題は、ベクトル形の (4.3)、あるいは成分表示の (4.4) で与える運動方程式を、初期条件

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (4.5)$$

のもとに解くことである。

4.3 保存量

上のように定式化された初期値問題の解を直接求めることは、なかなか困難である。準備として、解のもつべき性質を調べておくことが望ましい。特に、惑星が運動している間に変わらない量、すなわち時間に関して不変な量について調べることが大切である。この節では、このような保存量を考察する。

これからの計算では、万有引力の定数と太陽の質量の積を

$$\alpha = GM \quad (4.6)$$

とおく。

さて、直観的には次のことが納得できるであろう。惑星に働く力は、つねに、位置ベクトルの基準点 O (太陽の位置) に向かっている。初期時刻において、惑星は初期位置 \mathbf{r}_0 から初期速度 \mathbf{v}_0 で動き出すが、その後も太陽の方向に引っ張られるだけであるから、太陽の位置 O , \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 を含む平面から惑星はずれることはない(図 4.3)。

これは、数学としては証明を必要とする主張である。その証明は本章の 4. B 項に記されているが、とりあえず、ここでは上のような直観的な説明を受け入れることにしよう。

こうして、考えている惑星の運動は空間内のある平面 H 内で起こる。平面 H は、太陽の位置、惑星の初期の位置、初期の速度を含むものである。

そこで、座標軸を便利なようにとり直す。 O を原点とし平面 H の中に x 軸、 y 軸をとる。 z 軸は平面 H に直交する向きになる(図 4.4)。

こうすると、惑星の運動は xy 平面内で起こっているのだから、惑星の座標の z 成分はつねに 0 である。すなわち、この座標系で惑星の位置ベクトル \mathbf{r} を成分表示すれば、

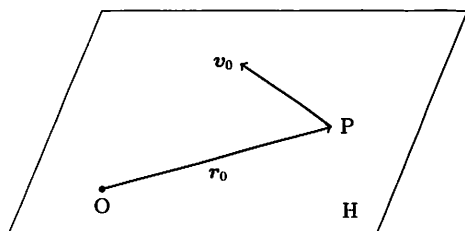
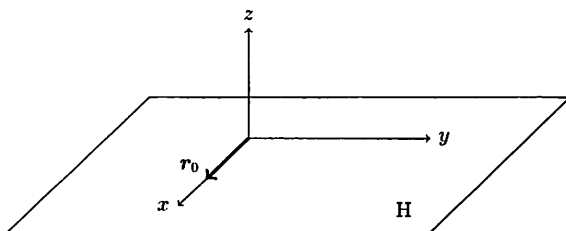
図 4.3 惑星の初期位置 r_0 と初期速度 v_0 

図 4.4 惑星運動を考える座標軸

$$\mathbf{r} = (x, y, 0)$$

になる。特に、太陽と惑星との距離は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ で表される。

さらに、成分ごとに書いた運動方程式に関しては、 x, y についてのもの

$$\ddot{x} = -\alpha \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\alpha \frac{y}{r^3} \quad (4.7)$$

だけに着目すればよい。同様に、速度ベクトル $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ についても、最初の2成分

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$$

だけに着目すればいい。

さて、本節の関心の対象である不変量として、(4.8)で与えられる E を、ついで(4.9)で与えられる L を吟味しよう。数学的な考察の対象として突然出てくるこれらの量は、力学を学んだ読者にとっては自然なものと思いたるはずである。

$$E = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\alpha}{r}. \quad (4.8)$$

力学的には、 E に惑星の質量 m を掛けた mE は、太陽による万有引力の影響のもとで運動する惑星がもつ全エネルギーを意味する。

数学的に E の性質を調べるために、これを時間で微分してみる。その際には、 E の中に含まれる惑星の座標 x, y が、連立微分方程式(4.7)を満足することをを用いて計算する。準備のために、まず、 $\frac{1}{r}$ を t で微分したものを用意しておく。すなわち、

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{r} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r^3}$$

となる。これらを用いて、 E を t で微分し、さらに(4.7)を考慮すれば

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \alpha \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r^3} \\ &= \dot{x} \left(-\alpha \frac{x}{r^3} \right) + \dot{y} \left(-\alpha \frac{y}{r^3} \right) + \alpha \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r^3} = 0 \end{aligned}$$

が得られる。すなわち、 $E = E(t)$ は時間によらない定数であり、運動している間の時間の経過に対して保存される保存量であることがわかる。よって

$$E_0 = E(0) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_0|^2 - \frac{\alpha}{r_0}$$

とおけば、この初期値 E_0 に対して

$$E(t) = E_0 \quad (t \geq 0)$$

が成り立つ。

さらに考える不変量は、次の L である。

$$L = x\dot{y} - \dot{x}y. \quad (4.9)$$

ベクトル積および力学を学んでいる読者のために、次の説明を記しておこう。この惑星の位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ と速度 $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ のベクトル積をつくると

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = (0, 0, L)$$

が得られる。運動が xy 平面内で起こるので、 $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ は z 軸の方向の成分だけが 0 と異なる。その z 成分が L である。力学の言葉を用いれば、 $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ に質量

m を掛けたもの。すなわち、 mL が惑星の角運動量の大きさであるから、これから示す L の不変性は角運動量の保存に対応している。

次に、 L の性質を計算に頼って解析しよう。 L の時間による微分を運動方程式(4.7)も利用しながら計算すると、

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \ddot{x}y - \dot{x}\dot{y} \\ &= x\left(-\frac{\alpha y}{r^3}\right) - \left(-\frac{\alpha x}{r^3}\right)y = 0\end{aligned}$$

が得られる。これで $L=L(t)$ は時間に関して不変な定数であることがわかる。

$t=0$ における L の値を L_0 とおくと、

$$L(t) = L_0 \quad (t \geq 0) \quad (4.10)$$

が成り立つ。

さて、 E および L が不変であることを用いて、簡単に解析できる特別な場合、すなわち、円軌道の場合を先に調べることにしよう。

4.4 円軌道の場合

現実の惑星には軌道が完全な円になっているものはないが、微分方程式の解としては、そのようなものも可能である。

いま、惑星の軌道が太陽を中心とし、半径が R の円であると仮定する。そのような解を求めるのである。

平面 H の中に極座標 (r, θ) を導入する。ただし、極座標の極を太陽の位置、すなわち xy 座標の原点 O にとり、角変数の原線を x 軸の正方向にとる。そうすると、この平面内の一般の点の座標 (x, y) は

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

と、極座標の変数 (r, θ) で表される。

x, y が惑星の座標であるとする、その円軌道の半径が R であるから、

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta$$

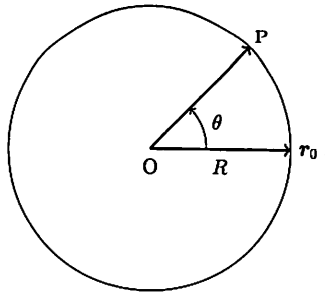


図 4.5 極座標と円運動

である(図 4.5). この x, y を不変量 $L(t)$ の定義式(4.9)に代入するのであるが, その前に x, y を時間で微分した \dot{x}, \dot{y} を極座標で書けば,

$$\dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = R\dot{\theta} \cos \theta$$

となる.

これらを(4.9)に代入して計算した結果は

$$L(t) = x\dot{y} - \dot{x}y = R^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)\dot{\theta} = R^2\dot{\theta}$$

となる. したがって, (4.10)により,

$$\dot{\theta}(t) = \frac{L}{R^2} = \frac{L_0}{R^2} \quad (t \geq 0)$$

となり, θ の時間変化が一定であることがわかる.

この一定値を $\omega = \frac{L_0}{R^2}$ と書くことにすると,

$$\theta(t) = \omega t \quad (t \geq 0)$$

が得られる. この ω を角速度とよぶ. ただし, $t=0$ のときに, θ が 0 になるように, 極座標における原線を $t=0$ のときの惑星の位置ベクトルの方向にとっておくものとする(必要ならば, とり直せばよい). さらに, $\omega > 0$ であること, すなわち考える平面内で惑星が太陽の周りを正の向きに回っていることも仮定しておく(そうでないときは z 軸の向きを変えればよい).

さて, $\theta(t) = \omega t$ という関係がわかったが, 運動方程式が成り立つためには R と ω との関係はどうなっているべきかを調べよう.

この場合、位置ベクトルが、

$$\mathbf{r} = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0)$$

であることから、

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = R\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0)$$

である。

これから、特に $|\mathbf{v}| = R\omega$ となり一定である。すなわち、この惑星は等速円運動をしている。

さらに $\ddot{\mathbf{r}}$ を計算すると、

$$\ddot{\mathbf{r}} = -R\omega^2(\cos \omega t, \sin \omega t, 0) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

が得られる。これを運動方程式(4.3)に代入すると、

$$-\omega^2 \mathbf{r} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

となる。ここで、 \mathbf{r} の係数を比較することにより、また、軌道上では $r = R$ であることから、運動方程式が成立するための条件は

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{R^3} \quad (4.11)$$

であることがわかる。すなわち、一定な角速度 ω と円軌道の半径 R はこの等式で結ばれている。逆に(4.11)の関係があれば、確かに半径 R の円を軌道とする運動方程式の解があることも示された。

一方、いまは速度の大きさも一定値 $R\omega$ であった。特に $|\mathbf{v}_0| = R\omega$ と(4.11)から ω を消去すると、

$$|\mathbf{v}_0|^2 R = \alpha \quad (4.12)$$

といった関係が導かれる。

半径 R を定めたときに、(4.12)に合致する $|\mathbf{v}_0|$ の大きさで、半径に直角な方向へ惑星が動き出せば、その惑星の運動の軌道は円軌道になる。また、この場合、 L とならぶ保存量 E は、 $E = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{R}$ という一定値をとる。

最後に円軌道の場合の周期を計算してみよう。周期 T は、 2π を ω で割ったものであるから、 ω と R との関係が(4.11)で与えられていることを用いて計算すると、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{R^3}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} R^{\frac{3}{2}}$$

となり、周期の2乗は R の3乗に比例する。これはケプラーの第三法則の特別な場合(円軌道の場合)である。

4.5 一般の場合の解析

この節の目標は、微分方程式(4.7)に支配される惑星の運動の軌道が、楕円、双曲線といった2次曲線になることを一般的に導くことである。

これまでの考察の結果であり、かつ、これからの解析のよりどころである $E(t)$, $L(t)$ の保存則を改めて書いておこう。

$$E(t) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 - \frac{\alpha}{r} = E_0, \quad (4.13)$$

$$L(t) = x\dot{y} - \dot{x}y = L_0. \quad (4.14)$$

ここでも前節で用いた極座標 r, θ を使う。すなわち、もとの直交座標 x, y と極座標 r, θ の間には、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (4.15)$$

の関係がある。

r, θ を惑星の位置を表す点の極座標とすると、今度は、 θ だけでなく r も時間 t の関数である。また、前の通りに時間 t による微分 $\frac{d}{dt}$ を、変数に \cdot を付けて表す。このとき、(4.15)の x, y が惑星の座標であるとして、両辺を t で微分すると、

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \quad (4.16)$$

が得られる。

この x, y を用いて、速度ベクトル \boldsymbol{v} の大きさの 2 乗を計算してみると、

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \quad (4.17)$$

となる。この(4.17)を $E(t)$ の保存則である(4.13)に代入すると、

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} = E_0 \quad (t \geq 0) \quad (4.18)$$

が得られる。

一方、(4.14)の $L(t)$ の保存則も極座標で表すと簡単な形になる。実際、(4.14)の \dot{x}, \dot{y} に、(4.16)を代入して計算すると、

$$\begin{aligned} L(t) &= x\dot{y} - \dot{x}y = r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) - (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) r \sin \theta \\ &= r^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

であるから、 $L(t)$ の保存則(4.14)は

$$r^2\dot{\theta} = L_0 \quad (t \geq 0) \quad (4.19)$$

と表される。

上の保存則を用いて極座標での解析を進めるのであるが、ちょっと寄り道をして、(4.19)から導かれる惑星の運動の特徴として、面積速度に関するケプラーの第二法則を検証しておこう。

太陽を始点とする惑星の位置ベクトル \boldsymbol{r} は、惑星の運動に伴って運動平面内に図形を描く。その図形の面積、すなわち、専門語でいうと、位置ベクトル \boldsymbol{r} の掃過する面積(図 4.6 の影付き部分の面積)を $S = S(t)$ とおく。

S の時間に対する変化率が、惑星の運動の面積速度である。

面積速度 \dot{S} を計算しよう。いま、時刻 t から $t + \Delta t$ の間に、極座標の変数 r, θ がそれぞれ $\Delta r, \Delta \theta$ だけ変化したとする。

さて、 Δt と同様に微小な $\Delta r, \Delta \theta$ に関する 2 次以上の項を省略して考えると、面積の増分 ΔS は、図 4.7 を見るとわかるように、角度の開きが $\Delta \theta$ で、それを挟む 2 辺の長さが r と $r + \Delta r$ である三角形の面積で近似される。したがって、

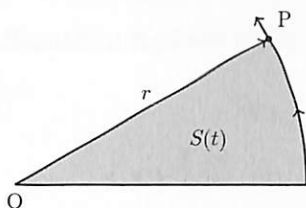


図 4.6 位置ベクトル r の掃過する面積

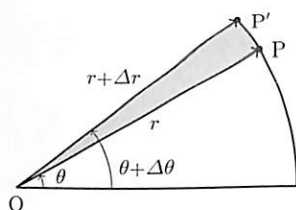


図 4.7 面積速度の近似

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r(r + \Delta r) \sin \Delta \theta$$

となる。さらに、 $\sin \Delta \theta$ は $\Delta \theta$ で近似してよいから、

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta$$

が得られる。

上の式の両辺を Δt で割り算し、 Δt を 0 に近づけた極限においては、

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

という等式が得られる。

ここまでは、一般の運動に関する面積速度と極座標との関係である。いま考察している惑星の運動については、(4.19)の保存則が成り立っているから、

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{2} L_0 = \text{一定} \quad (t \geq 0)$$

が導かれる。すなわち、惑星の運動については、面積速度は一定であるという、ケプラーの第二法則が証明された。

さて、惑星の運動の軌道の解析に戻ろう。すなわち、極座標における惑星の軌道の方程式を求めることをめざす。

いままでの考察は、時間 t が独立変数で、

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t) \quad (4.20)$$

として扱ってきた。しかし、惑星の軌道を求める立場で見ると、 t は軌道を表す媒介変数であり、(4.20)は軌道の媒介変数表示である。

軌道の方程式を求めるとなると、 r, θ の間の関係式を直接調べなくてはならない。それには、 r を θ の関数として扱うことになる。この場合は、 θ が独立変数で、 r が従属変数である。当然、独立変数 θ で微分する操作が必要になってくるが、 θ による微分を時間 t による微分と区別する意味で、従属変数に ' を付けて表す。

たとえば、 θ の関数 u を考えると、これは間接的には t の関数でもあるが、 u を t で微分したものは、 $\frac{du}{d\theta}$ と $\frac{d\theta}{dt}$ の積になるので

$$\dot{u} = u' \cdot \dot{\theta} \quad (4.21)$$

と書かれる。たとえば、惑星の極座標の r 成分を考えると、

$$\dot{r} = r' \dot{\theta}$$

である。

惑星運動における $E = E(t)$ の保存則(4.18)をいまの立場で書き直してみよう。すなわち、 $\dot{r} = r' \dot{\theta}$ を(4.18)に代入すれば、

$$\frac{1}{2} \left[(r')^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right] - \frac{\alpha}{r} = E_0$$

となるが、さらに、 L の保存則(4.19)も考慮して書き換えると、

$$\frac{1}{2} [(r')^2 + r^2] \frac{L_0^2}{r^4} - \frac{\alpha}{r} = E_0$$

となる。これから L_0 の代わりに k と書くことにしよう。すなわち、 $k = L_0$ である。そうすると、上に得られた等式は、

$$\frac{1}{2} \left[(r')^2 \cdot \frac{k^2}{r^4} + \frac{k^2}{r^2} \right] - \frac{\alpha}{r} = E_0 \quad (4.22)$$

となる。

(4.22)は、 θ を独立変数とする、未知関数 $r = r(\theta)$ についての1階の微分方程式である。この微分方程式は、 r' 自身が2乗で入っているし、また、それ以外の r の入り方も簡単ではないが、ともかく問題を1階の微分方程式に帰着させることができた。

ここから先の扱いはいささか技巧的である。最初に、

$$u = \frac{1}{r}$$

を新たな未知関数とする。すると、

$$u' = -\frac{1}{r^2} r', \quad r' = -r^2 u'$$

と計算できる。

これを(4.22)へ代入すると、 u に関する微分方程式として、

$$\frac{1}{2}[k^2(u')^2 + k^2 u^2] - \alpha u = E_0$$

が得られる。さらに簡単な変形をすると、

$$(u')^2 + u^2 - \frac{2\alpha}{k^2} u = \frac{2E_0}{k^2} \quad (4.23)$$

となる。

これでかなり見やすくなったが、まだ、 u' の2乗、 u の2乗という項を含んでいて、いわば2次の非線形性をもった微分方程式である。

さらに変形を続けよう。そのために

$$w = u - \frac{\alpha}{k^2}$$

とおいて、 w を新しい未知関数とする。そして、 $w' = u'$ や $u = w + \frac{\alpha}{k^2}$ を(4.23)に代入すると、未知関数の1次の項が消えて、

$$(w')^2 + w^2 = \beta_0^2 \quad (4.24)$$

が得られる。ただし、

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{k^2} + \frac{\alpha^2}{k^4}}$$

とおいている。

(4.24)を解くために、両辺を θ で微分する。そうすると、 $2w'w'' + 2ww' = 0$ 、すなわち、

$$w'(w'' + w) = 0$$

が出る。

得られた方程式の左辺の因数が2つあるが、そのうちの一つの w' が、ある範囲で恒等的に0になる場合をまず調べる。そのとき w は定数であり、 θ によらない。これは、 r が θ によらない定数であることを意味する。すなわち、軌道は極を中心とする円であり、この場合はすでに前節で解析を終えている。

円軌道以外のものが得られる新たな場合としては、

$$w'' + w = 0$$

について調べればよい。2.6節の考察を応用すると、この微分方程式の一般解は、

$$w(\theta) = c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta$$

となる。 c_1 と c_2 は任意の定数である。これを、 $\mathbf{a} = (c_2, c_1)$ 、 $\mathbf{b} = (\cos \theta, \sin \theta)$ として、ベクトルの内積の公式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \delta$ (δ は \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角である)を用いて、

$$w = \underbrace{\sqrt{c_2^2 + c_1^2}}_{=A} \cdot 1 \cdot \cos(\theta - \delta_0) = A \cos(\theta - \delta_0) \quad (4.25)$$

と合成する。 $\delta_0 (= \theta - \delta)$ は、ベクトル \mathbf{a} と x 軸のなす角である。 c_1 と c_2 を任意に与える代わりに、 A と δ_0 を任意に与えてもよい。

あとは、具体的に A と δ_0 の値を決定する。(4.25)の w を(4.24)に代入することによって、

$$A = \beta_0$$

と A が定まる。一方で、定数 δ_0 の値は、極座標の原線をどのように選ぶかによって調整することができる。 $\delta_0 = 0$ にするためには、 $\theta = 0$ で w が最大になるようにすればよい。 w が最大になる点は (u が最大になる点であり、結局)、 r が最小になる点である。惑星が太陽に最も近づいている点を近日点というが、その位置を通るように極座標の原線をとることになる。これにより、 $\delta_0 = 0$ と仮定することができる(図4.8)。

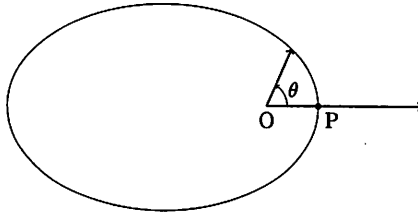


図 4.8 極座標の原点

結局, (4.25)の w は

$$w = \beta_0 \cos \theta$$

となる. この w から u を表し, さらに, u を r で表すと, 惑星の極座標 r と θ の間の関係

$$\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{k^2} = \beta_0 \cos \theta \quad (4.26)$$

が導かれる. ここで, β_0, α, k は全て正の定数である.

(4.26)は, r と θ との関係を示している. すなわち, これが惑星の軌道の方程式である.

最後に, この方程式から, 軌道が楕円あるいは双曲線といった2次曲線であることがわかることを説明する. そのために, 極座標における2次曲線の標準的な方程式が

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (4.27)$$

であることに注意する. ここで, p と e は正の定数であるが, (4.27)の表す2次曲線は, e を離心率とし, 極座標の原点 O を焦点としている. 定数 p の意味については, (4.27)で $\cos \theta = 0$ としたときの r の値であるから, その2次曲線上において, 焦点の真上の点までの焦点からの距離が p である(図 4.9). なお, これを2次曲線の通径とよぶことがある(→ 4. A 項).

ともかく, r, θ の関係が(4.27)の形になれば2次曲線である. そうして, 離心率 e が1より大きければ双曲線, e が0と1との間ならば楕円である. 特別に $e=1$ ならば放物線である. いずれの場合も, 極座標の原点が焦点である

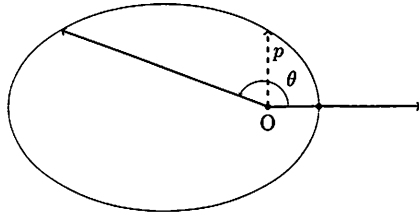


図 4.9 2次曲線の通径

(→ 4. A 項).

以上の一般論を受け入れて, (4.26)を考察してみよう.

(4.26)を(4.27)とのつき合わせがしやすいように変形すると

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{k^2} + \beta_0 \cos \theta = \frac{\alpha}{k^2} \left(1 + \frac{k^2}{\alpha} \beta_0 \cos \theta\right)$$

となる. さらに逆数をとってから見比べると,

$$p = \frac{k^2}{\alpha},$$

$$e = \frac{k^2}{\alpha} \beta_0 = \frac{k^2}{\alpha} \sqrt{\frac{2E_0}{k^2} + \frac{\alpha^2}{k^4}} = \sqrt{\frac{2E_0 k^2}{\alpha^2} + 1} \quad (4.28)$$

とおけば, (4.26)を(4.27)の形に変形できることがわかる.

なお, 離心率 e を表す(4.28)の2行目の末尾の項は, エネルギー保存に対応する保存量 E_0 , および角運動量保存に対応する保存量 $k = L_0$ を用いて示したものである.

これで惑星の軌道が2次曲線になること, また, 太陽がその焦点であることがわかった. 軌道が楕円であるか, 双曲線であるかは, e が1より小さいか大きいかによって分かれる.

(4.28)の最後の辺を見ると, E_0 が正であるか, 負であるかによって, e が1より大きくなったり, 小さくなったりすることがわかる. ただし, E_0 が正で $e > 1$ となって軌道が双曲線を描く場合でも, 軌道としては双曲線の二つの枝のうちの一つだけが実現する.

E_0 を初期速度 v_0 , 初期の位置ベクトル r_0 を用いてもう一度書くと

$$E_0 = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_0|^2 - \frac{\alpha}{|\mathbf{r}_0|}$$

である。

よって、 E_0 が正であるのは、 \mathbf{r}_0 を固定して考えると、初速度 \mathbf{v}_0 が大きめのときである。空間の点を固定して考えたときに、その点から大きな速度で飛び出していく惑星は、双曲線軌道を描き時間が限りなく経つと、宇宙の無限のかなたに消えていくというわけである。もっとも、こういう運動をする天体は惑星というよりも彗星として実現する。

一方、 E_0 が負であるのは、 \mathbf{r}_0 を固定して考えると比較的初速度が小さいときである。そのようなとき、軌道は太陽を焦点とする楕円となる。実際の水星、金星、地球、…、天王星、海王星という惑星は太陽の周りを回り、決して無限のかなたに飛び去らない。これらの軌道は、全て楕円軌道になっているからである。

問 題

問 4.1 ある惑星が太陽の周りを半径 R の円軌道を描いて運動している。その周期は 351 日である。もし、この惑星の円軌道の半径が $\frac{R}{9}$ になったとすれば、周期は何日になるか。

問 4.2 ある惑星 P が太陽 S を焦点とする楕円軌道を描いている。 P が太陽に最も近くなる点を K 、最も遠くなる点を E とするとき、 SE の距離は SK の距離の 6 倍であるという。 P が K を通過するときの速度は P が E を通過するときの速度の何倍であるか。

問 4.3 太陽の周りを運動する。ある惑星の初期の位置 $\mathbf{r}(0)$ および初期速度 $\mathbf{v}(0)$ が、単位を然るべくとると、それぞれ $\mathbf{r}(0) = (2, 0, 0)$ 、 $\mathbf{v}(0) = (0, 3, 0)$ で表されるという。この惑星の面積速度を求めよ。

ノート

4. A 2次曲線の極座標での方程式

直交座標における標準形の復習から始める。楕円の場合について説明するが、双曲線の場合も同様である。

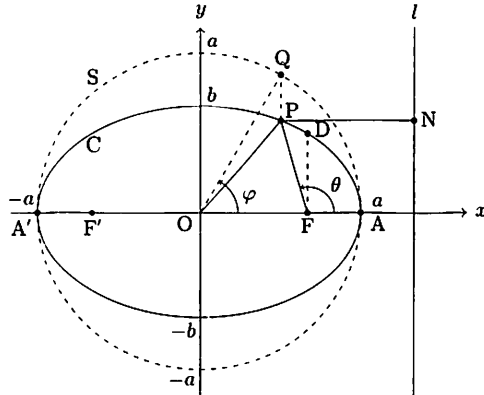


図 4.10 楕円

図 4.10 の実線 C で表された楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \quad (4.29)$$

を考える。この楕円に対して、

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

で定義される数 e を離心率という。このとき、

$$F = (ae, 0), \quad F' = (-ae, 0)$$

の 2 点が楕円の焦点となる。すなわち、楕円上の任意の点 P について、

$$|PF| + |PF'| = 2a \quad (4.30)$$

が成り立つ(もともと、与えられた 2 点 F, F' に対して、(4.30) を満たすような点の集合 P を楕円というのであった)。また、

$$l: x = \frac{a}{e}, \quad \text{および}, \quad l': x = -\frac{a}{e}$$

を楕円の準線という。

いま、楕円(4.29)上の任意の点 $P=(x, y)$ をとり、図 4.10 のように角 φ , θ を定める。ただし、 Q は O を中心とした半径が a である円周 S 上の点であり、かつ、 PQ は y 軸に平行である。そうすると、

$$P = (a \cos \varphi, b \sin \varphi) \quad (4.31)$$

となることは周知である。 P から準線 l に下した垂線の足を N とする。

(4.31)を用いて簡単な計算を実直に行えば

$$\begin{aligned} |PF|^2 &= (a \cos \varphi - ae)^2 + (b \sin \varphi)^2 = a^2(1 - e \cos \varphi)^2, \\ e^2|PN|^2 &= e^2 \left(\frac{a}{e} - a \cos \varphi \right)^2 = a^2(1 - e \cos \varphi)^2 \end{aligned}$$

を導くことは容易である。これより、準線と離心率を用いた 2 次曲線の特長付けである

$$|PF| : |PN| = e : 1 \quad (4.32)$$

が得られる。

F を極とする極座標に移ろう。そのために、

$$r = |PF|$$

とおく。 r と θ との関係を求めるのが目的である。 l と F の距離を d とすると、 $d = \frac{a}{e} - ae$ が成り立つが、これを用いると

$$|PN| = \frac{a}{e} - ae - r \cos \theta = d - r \cos \theta$$

が得られる。

こうして(4.32)から

$$\frac{r}{d - r \cos \theta} = \frac{e}{1},$$

すなわち、

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

が得られる。

$\theta = \frac{\pi}{2}$ の点、すなわち、F の真上の点を D とおけば、 ed は D の F からの距離である。したがって

$$p = |FD|$$

とおけば、極座標における方程式

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (4.27)$$

が得られる。

4. B 惑星の運動が平面運動であることの証明

惑星の位置ベクトルを $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とする。いま、 $\mathbf{r}(0)$ および $\mathbf{v}(0) = \dot{\mathbf{r}}(0)$ を含むように xy 平面をとる。このとき、

$$z(0) = \dot{z}(0) = 0 \quad (4.33)$$

である。

惑星の運動が xy 平面内で起こることを示すためには、

$$z(t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (4.34)$$

を示せば十分である。

以下に(4.34)の証明を2つ記す。一つ目は、本書のここまでの水準を超えた重苦しさがあるが、“不等式を用いる証明法”(プロの技!)の例として十分に余力がある読者には教訓的である。二つ目は、ベクトル積に通じている読者向けの“軽やか”な証明である。

[(4.34)の証明, その1] 惑星の運動方程式を

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) = K(t)\mathbf{z}(t) \quad (4.35)$$

と書いておく。ただし、

$$K(t) = -\frac{\alpha}{r^3}$$

とおいた。

いま、正数 T を任意に固定し、時間の区間 $[0, T]$ において、惑星は太陽に衝突することなく運動していると仮定しよう(当然の仮定である!)。したがって、 $[0, T]$ においては、 $r=r(t)>0$ である。そうすると、 $K(t)$ は t の関数として $[0, T]$ において連続であるから、正数

$$N = \max_{0 \leq t \leq T} |K(t)| \quad (4.36)$$

が存在する。

ここで、補助関数

$$J(t) = z(t)^2 + \dot{z}(t)^2$$

を導入する。(4.33)によれば

$$J(0) = 0 \quad (4.37)$$

は明らかである。

$J(t)$ を t で微分して、結果に(4.35)を代入すると、

$$\dot{J}(t) = 2z(t)\dot{z}(t) + 2\dot{z}(t)\ddot{z}(t) = 2\dot{z}(t)[z(t) + K(t)z(t)]$$

が得られる。初等的な不等式 $2ab \leq a^2 + b^2$ ($a, b \geq 0$) と、(4.36)を使うと、

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= 2\dot{z}(t)z(t)[1 + K(t)] \\ &\leq (\dot{z}(t)^2 + z(t)^2)[1 + K(t)] \leq J(t)(1 + N) \end{aligned} \quad (4.38)$$

となる。

ここで、新たな補助関数

$$H(t) = J(t)e^{-(N+1)t}$$

を導入し、その導関数を計算すると、(4.38)より

$$\begin{aligned}\dot{H}(t) &= \dot{J}(t)e^{-(N+1)t} - (N+1)J(t)e^{-(N+1)t} \\ &= [\dot{J}(t) - (N+1)J(t)]e^{-(N+1)t} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

が得られる。すなわち、 $H(t)$ は t の非増加関数であるから、(4.37)にも注意して、

$$H(t) \leq H(0) = J(0) \cdot 1 = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

となる。ところがもともと定義により、 $J(t) \geq 0$ であるから、 $H(t) \geq 0$ は明らかである。よって、これらを合わせれば、

$$H(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

が出る。これが

$$J(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

を意味すること、したがって、さらに

$$z(t) = \dot{z}(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

を意味することは明らかである。最後に T の任意性より (4.34) が得られる。 ■

[(4.34)の証明, その2] ベクトル積を用いた(4.34)の別証明を与える。

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) \quad (t \geq 0)$$

とおく。 $\mathbf{a}(0) = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$ が $\mathbf{0}$ でないとする。当然 $\mathbf{a}(0)$ は \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 を含む平面と直交しているので、 $\mathbf{a}(0)$ は、 xy 平面に直交する単位ベクトル $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ と平行である。すなわち、 $\mathbf{0}$ でない定数 k を用いて $\mathbf{a}(0) = k\mathbf{e}$ と書けるはずである。このとき、

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} - \frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

と計算できる。すなわち、 $\mathbf{a}(t)$ は t には依存しないので、 $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = k\mathbf{e}$ と書ける。したがって、

$$z(t) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{k} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0$$

が得られる。なお、上記の計算で、ベクトル積に関する基本的な事実

$$\mathbf{p} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = 0$$

を応用した (\mathbf{p} と \mathbf{q} は任意のベクトルである)。

5

弦のつり合いの数理

本章では、外力のもとでつり合っている弦の形状を数理的に解析する。その数理モデルとして登場するのが、微分方程式の境界値問題である。すなわち、考える区間の両端で境界条件とよばれる付加条件が課されているような微分方程式の問題を考える。1次元の簡単な境界値問題を通じて、グリーン関数や解の安定性などの重要な概念に触れよう。

5.1 弦のつり合い

バイオリンなどの弦楽器の弦のように弾性を持ち、両端が固定された弦を考える。簡単のために、弦は x 軸の点 $x=0$ と点 $x=l$ との間に張られているとする。 x 軸に垂直に u 軸をとっておこう。外力は x 軸に垂直に働くものとする。そのとき、弦の変形が微小であると仮定すると、座標が x である弦上の点は x 軸に垂直に $u(x)$ だけ変位する(図 5.1)。

外力以外に弦の各点には弦に沿う張力が働く。すなわち、弦の各点は弦の接

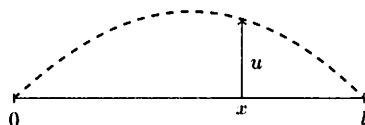


図 5.1 弦のつり合い