夏休みすべきこと

桂田 祐史

2005 年 7 月 19 日

出来れば

夏休みの間に後期に何をやるか自力で決めて

下さい。目標・方針が決まってしまうと後は早く進むものです。「決める」だけと考えると軽く思えるかもしれませんが、決めるためには調査と言うか「試しに少し進んでみる」ことが必要で、それなりに手間がかかります。

とりあえず、これまでやってきたことは一つのヒントになります。
テキストの第 I 章は、「厳密さの程度が当時の水準」というわけで、証明どころか、定理をきちんと述べることすら出来ていない、いわば穴だらけの状態で、一方で、通常のカリキュラムでは習わない面白い題材がゴロゴロしているので、それをきちんと解読するところまで行けば、きっとまとまった卒業レポートが書けるでしょう。

一方、数学の本を読んでいるときにありがちな「もやがかかっているような理解が不十分な状況」の打破には実例の計算に親しむのが一つの有効な手段です。特に計算が面倒なところはコンピューターで計算してはいかが、と奨めている状況です。昔の人が人生をかけた大計算も、コンピューターの助けを借りればごく短時間で追体験できます (実際的には追体験するための唯一の方法かも知れません)。何事もやってみないと分からない場合が多く、計算を実行してくることで初めて気がつくことがきっと出て来ると思います。

以下、担当範囲を深めるにはどうすれば良いかヒントを述べる、という主旨で「〇〇担当の人へ」という見出しで書きました。
コンピューターによる実験に関しては、誰がどこに挑戦しても構わないと思います。

プログラミングに関して、こういう時代ですから、その気になればメールでも質問相談が可能です。むしろ数学の質問をするよりは (式をどうやって書くかという問題がなく) 能率良いかもしれません。「〇〇をするにはどうしたらよいか」気軽に聞いて下さい。

1　1.1 担当の人へ

3 次方程式を解くプログラム、あるいは 2 次方程式でも複素係数のものを解くプログラムをきちんと書くことは良い目標であると思います。
3 次方程式の問題は、数学者が複素数を受け入れるようになった大きなきっかけなので、突き詰めて考える価値のあるものだと信じます。教員になろうという人は、

数学者はどうして虚数なんてありもしない数を考えるのか？

という初心者の素朴な疑問に誠実に答え切ることができるかどうか、自問してみると良いと思います。これは結構深い問題です (物理屋さんだとそのために量子力学を持ち出したりする人もいます…それが絶対必要だとは僕は考えていませんが。ともあれ僕も完全に人を納得させる説明ができる自信はありません)。

1.1 の最後のあたりで、冪乗和 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ の公式が登場しますが、これも数学好きの人には結構人気のある題材で、歴史的にも和算家の関孝和とヤコブ・ベルヌーイの知られざる[1]競争の一コマとして面白いところです。

関連する話題である II.10 のオイラー・マクローリンの公式は、数学的にも深く、卒研レポートのテーマとしてふさわしいものだと思います。

2　1.2 担当の人へ

テキストの $\sqrt{2}$ の値の計算は、コンピューターを用いる数値実験の手頃な問題だと思います。

Euler による e の有名な表示

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

の厳密な証明も学ぶ価値があると思います。この公式は案外大学の学部段階の数学では使わないのですが、関数解析の分野で思いもかけなかった拡張があって、重要なものだと思います。

それから一般 2 項定理の正確な定式化と証明、応用をまとめることにしても良いレポートが書けそうです。

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \bigl(1+(-x^2)\bigr)^{-1/2}$$

の右辺を一般 2 項定理を用いて展開してから項別積分すると arcsin の級数展開が得られますが、これを用いて π を計算した古人も多く (和算家もいる)、彼らの結果のトレースも面白い話だと思います。

そうそう、ゼミ中に 60 進法の計算をしましたが、そのプログラミングや、10 進数と 60 進数の相互変換するプログラムを書くのも手頃な課題です。最近の中学高校の数学の教科書からは p 進法の話題が消えてしまいましたが、日頃使っている数の表現のしくみ (位取り記数法) を理解するという観点からも、意義あることだと思います。歴史をひもといてみると、位取り記数法の歴史は案外新しく、分かってみると簡単で当たり前に思えてしまうが、決して自明な発明ではなかったことが分かります。数学王ガウスは、アルキメデスという天才がどうして位取り記数法を発明できなかったのか (もしそうなっていたら、数学は飛躍的に進歩していただろうに) と不思議がっているくらい。

3　1.3 担当の人へ

ここはコンピューターでの数値実験が楽しいところだと思います。ブリッグスの方法による計算の追試、十進 BASIC にうってつけですね。

[1]お互いに相手のことは知らなかったという意味です。

さらにグレゴリー級数を用いた計算の追試も、プログラミングの良い挑戦課題でしょう。

余談

僕は高校生だったときに地学の先生に対数表を用いた計算を強制されたおかげで、

対数の発明により天文学者の寿命は倍になった

という有名な言葉が本当に良く分かった、という経験をしています。残念ながら計算尺は説明書片手に二三計算してみたことがあるだけで、それを利用して何かをしたことはありません。昔は対数表を覚えてしまった人がいたそうですが、そんなことをするのもなるほどと思わせるところがあります。

対数に関する余談で 1 時間くらいはしゃべれそうですが…

4　1.4 担当の人へ

ここは関連する話題が豊富でどこに手を付ければよいか、迷ってしまうところです。

まず正 n 角形が定規と (目盛なし) コンパスで作図できるための条件という、有名な話題があります[2]。これについて、このテキストには書いてありませんが、有名な話題なので例えば教員になるような人は結果だけでも知っておいてもらいたいですね。作図がらみなので、むしろ中学の教員になる人の方が必要度は高いかな。

テキスト p.65 のような収束の様子を示したグラフを描くことは、もし興味があればぜひやってみてください。

$\tan x$ の級数展開については、ベルヌーイ数がらみなので、どちらかというと 1.1 担当の人の守備範囲かという気もしますが、これを追求する目的でベルヌーイ数の勉強に突入するのも悪くないと思います。… sin, cos の級数展開はどの微積分の教科書にも必ず載っていますが、tan の級数展開を載せてある本は少ない、という事実に気づいていましたか？

サマルカンドのアル・カーシーによる $\sin 1^\circ$ の計算 (1429) の追試も楽しい挑戦課題だなと思います。p.66 下の結果あるいは p.67 の結果、再現できますか？

そして…とうとう π の計算の話。これについては、

「2003 年度の卒研のときのメモ」
`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/sotsugyou-report/node15.html`

「π ノート」
`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/pi.pdf`
特に 18 ページ

が参考になるでしょうか。もちろんコンピューターによる数値実験の良い題材です。

なお、π 関係の本、僕はたくさん持っています (以前学生が卒研のテーマにしたので集めた)。探していて見つからなかったら声をかけてください。

[2] またまた個人的な余談になりますが、中学生の頃持っていた百科事典に正 7 角形の作図法というのが載っていました。後になってずいぶんと悩んだ覚えがあります。どういうふうに悩んだか分かりますか？

5　1.5 担当の人へ

まず複素関数の作る写像を図示するというのは、やりでのあるテーマだと思います。実は十進 BASIC 関係の WWW ページにたくさん参考になることが書いてあります。興味があれば調べてみて、試しに簡単なものを描いてみると良いでしょう。…実は桂田の研究テーマの一つの密接な関係のある部分なのですが、これまで僕自身も僕の学生もこのあたりで実験をしていません。ここで頑張ってもらえると実は嬉しかったりします。

ゼミ中に解決できなかった、p.86 の下にある、マチンの公式と

$$\frac{1}{i} = \frac{i+1}{i-1} = \left(\frac{5i+1}{5i-1}\right)^4 \left(\frac{239i+1}{239i-1}\right)^{-1}$$

という分解が同値であるという記述の解読、ちと気になっています。

sin のオイラー積のきちんとした証明、誰か挑戦しないかな…

それからここは演習問題も内容豊富ですね。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

の和の公式、ミーハー好みですが、もし理解できたら素敵ですね。数学文化 Vol.1 (2003) という雑誌 (ムック？) に、オイラーの論文の邦訳があります。興味があれば言って下さい。オイラーの論文を読む機会なんて滅多にないですから面白いかも。

6　1.6 担当の人へ

有限回の四則では表せない量を捕まえるために、数学者は

連分数, 無限級数, 無限乗積

などの方法を編み出しました。現在のカリキュラムでは級数が幅を利かせていますが、起源が互除法にあると考えれば、歴史的には連分数が最も古く、円周率の無理数性の証明など数論的な性質への応用もあり、数学的にもとても面白いところだと思います。

アルキメデスは有名な π の評価で、$\sqrt{2}$ などを精密に評価する有理数を説明抜きに持ち出してきていますが、それは本質的には連分数展開というか互除法で得たものだろうとか、なかなかわくわくさせてくれます。

十進 BASIC を用いると、有理数計算が簡単にできるので、近似分数を求めるプログラムが楽に書けそうですね (これはとてもうらやましい…僕がこういうことをやってみたいと思っていたときは、気軽にチャレンジできませんでした)。

地図の図法で有名なランベルトが一級の数学者であって、π の無理数性の証明の本質的な部分を果した、ということは知識としては知っていても、実際に証明を読んだのは実は僕もこれが初めてでした。連分数の収束の証明まで込めて細部まできちんと理解すれば、得難い経験になると思います。