# 3次元円柱領域の熱方程式の厳密解につ

4年16組74番 吉原 健治

2005年2月21日

# 3次元円柱領域の熱方程式の厳密解

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa}u_t(x,y,z,t) &= \Delta u(x,y,z,t) \quad ((x,y,z)\in\Omega, t\in(0, \\
u(x,y,z,t) &= 0 \quad ((x,y,z)\in\Gamma, t\in(0,\infty)) \\
u(x,y,z,0) &= f(x,y,z) \quad ((x,y,z)\in\overline{\Omega}, t=0) \\
\{\Omega &= \Big((x,y,z)\in R^3; x^2+y^2<1,\ 0<z<
\end{aligned}
$$

の厳密解をFourierの方法で求めていく。

$$u(x,y,z,t)=\zeta(x,y,z)\eta(t)$$

と置く(但し$\zeta\neq 0\ (in\ \Omega)$)。代入して計算すると、

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \frac{\Delta\zeta(x,y,z)}{\zeta(x,y,z)}$$

これは左辺は$x, y, z$によらず、右辺は$t$によらないので定数
計算すると、

$$^{\exists}\lambda \in C \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta'(t) = \lambda\kappa^2\eta(t) \\ \Delta\zeta(x,y,z) = \lambda\zeta(x,y,z \end{array} \right.$$

$\zeta$は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\zeta(x,y,z) = \lambda\zeta(x,y,z) \quad (in\ \Omega) \\ \zeta(x,y,z) = 0 \quad (on\ \Omega) \end{array} \right.$$

を満たす。ここで、

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right.$$

と置いて極座標変換すると、

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}=\lambda\zeta \qquad (0<r<1,\theta$$

ここで、

$$\zeta(r,\theta,z)=\nu(r,\theta)W(z)$$

と置く(但し、$\nu(r,\theta)\not\equiv 0$ かつ,$W(z)\not\equiv 0$)。これより、

$$\frac{\Delta\nu(r,\theta)}{\nu(r,\theta)}-\lambda=-\frac{W''(z)}{W(z)}$$

左辺は$z$によらず右辺は$r,\theta$によらないので、これは定数。
算すると、

$$\begin{cases}\Delta\nu(r,\theta)=(\lambda+\mu)\nu(r,\theta)\\ W''(z)=-\mu W(z)\end{cases}$$

まず、$W(z)$を求めると、

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{(l\pi)^2}{h^2} \quad (l = 1, 2, \cdots) \\ W(z) = C \sin \dfrac{l\pi}{h} z \quad (C\text{は任意定数}) \end{cases}$$

次に、$\Delta\nu(r,\theta) = (\lambda + \mu)\nu(r,\theta)$を考える。

$$\nu(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (R(r) \neq 0\ \text{かつ}\ \Theta(\theta) \neq$$

と置くと、

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r) + r^2(-\lambda - \mu)R(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta}{\Theta}$$

左辺は$\theta$によらず、右辺は$r$によらないので定数。それを$\alpha$と

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2R''(r) + rR'(r) + (r^2(-\lambda - \mu) - \alpha)R(r) \\ \Theta''(\theta) = -\alpha \end{array} \right.$$

更に、$\Theta(\theta)$を求めると、

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = n^2 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ \Theta(\theta) = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta & (C_1, C_2 \text{は任意} \end{array} \right.$$

次に、$R(r)$について考える。境界条件から、

$$R(1) = 0, \qquad R(0) < \infty$$

$\alpha = n^2$ より $R(r)$ は、

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + ((-\lambda - \mu)r^2 - n^2)R(r)$$

これはBesselの方程式である。Besselの方程式とは、

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (\alpha\ \text{:定数})$$

の形をした方程式のことであり、

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}, \quad Y_n(x) = \frac{J_n(x)\,\mathrm{co}}{}$$

を解に持ち、一般解は、

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (C_1, C_2 \text{は任意定}$$

となる。これより、$R(r)$ の一般解は、

$$R(r) = D_1 J_n(r\sqrt{-\lambda-\mu}) + D_2 Y_n(r\sqrt{-\lambda-\mu}) \quad (D_1,$$

境界条件より $R(r)$ は原点で有界だが、$Y_n$ は原点で有界では
ない。よって、

$$R(r) = D_1 J_n(r\sqrt{-\lambda-\mu})$$

また $R(1) = 0$ より、

$$D_1 J_n(\sqrt{-\lambda-\mu}) = 0$$

従って、$\sqrt{-\lambda-\mu}$ は $J_n$ の零点である。ここで、$J_n$ の正の零

$$\beta_{1,n} < \beta_{2,n} < \cdots < \beta_{m,n} < \cdots \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots ; m$$

とすると、

$$\sqrt{-\lambda-\mu} = \beta_{m,n}$$

これより、

$$R(r) = D_1 J_n(r\beta_{m,n})$$

以上より、

$$\nu(r,\theta) = J_n(r\beta_{m,n})(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta$$

次に、$\eta(t)$ を求めると、

$$\eta(t) = Ce^{-\kappa^2(\frac{(l\pi)^2}{h^2}+(\beta_{m,n})^2)t} \quad (C \text{ は任意定数}$$

以上で求めた$\nu, W, \eta$を合わせると、

$$u_{l,m,n} = e^{-\kappa^2(\frac{(l\pi)^2}{h^2}+(\beta_{m,n})^2)t} J_n(r\beta_{m,n})(A_{l,m,n}\cos n\theta + B_{l,}$$

よって$u$を、

$$u(r,\theta,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m,l=1}^{\infty} e^{-\kappa^2(\frac{(l\pi)^2}{h^2}+(\beta_{m,n})^2)t} J_n(r\beta_{m,n})(A_{l,m,n}\cos n$$

と置くと、$u$は初期条件・境界条件を満たす解であると期待
初期条件$u(r,\theta,z,0) = f(r,\theta,z)$より、

$$f(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m,l=1}^{\infty} J_n(r\beta_{m,n})(A_{l,m,n}\cos n\theta + B_{l,m,n}$$

ここで、直交性を利用して係数$A_{l,m,n}, B_{l,m,n}$を求める。Be
直交性は、

$$\int_0^l xJ_n(\frac{\mu_i}{l}x)J_n(\frac{\mu_j}{l}x)dx = \begin{cases} 0 & ( \\ \frac{l^2}{2}\left(J_{n+1}(\mu_i)\right)^2 & ( \end{cases}$$

(但し、$n > -1$で$\mu_i, \mu_j$は正の零点)

であるので、

$$A_{n,m} = \frac{4}{\pi h(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 rJ_n(r\beta_{m,n})f(r,\theta,z)\,\mathrm{c}$$

$$B_{n,m} = \frac{4}{\pi h(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 rJ_n(r\beta_{m,n})f(r,\theta,z)\,\mathrm{s}$$