2005年度　卒業研究論文

連 分 数

明治大学　理工学部数学科
桂田　祐史研究室

伊東　さや香　　　　川上　勉

2006年2月28日

目次

第Ⅰ部　連分数とは　(担当　伊東 さや香)

付録

第Ⅱ部　連分数展開のプログラム　(担当　川上 勉)

付録

第Ｉ部　　連分数とは

0.　　イントロ

私はハイラー･ワナー著作の「解析教程」を読み，「連分数」という初めて目にする内容に興味を持ました．そして今回，卒業研究のテーマとして取り上げ，その性質や特徴を実数や二次無理数といった様々な方面から調べてきました．第Ｉ部では，連分数についての様々な定理とその証明，特徴･性質を以下の内容にまとめました．

1.　　ユークリッドの互除法

【定理 1.1】(除法の定理)
$a, b \in Z, \quad b > 0$ とする．このとき，

$$a = qb + r, \quad 0 \le r < b$$

が成り立つ整数 q と r がただ一組だけ存在する．このとき，q を a を b で割った商，r を a を b で割った余りという．

証明

b を

$$qb \le a < b(q+1)$$

となるようにとる．$r = a - bq$ とおくと，

$$0 \le r < b(q+1) - qb < b$$

という関係が得られる．一方，$q', r' \in Z$ として，

$$a = qb + r = q'b + r', \quad (0 \le r < b, \quad 0 \le r' < b)$$

とおく．この式より，$b(q - q') = r - r'$ が得られる．また条件より $-b < r - r' < b$ であるので，

$$-b < b(q - q') < b$$

となる．したがって，$-1 < q - q' < 1$. 以上より，$q = q', \quad r = r'$ であることから一意性が示された．□

$a, b \in Z$ に対して $a = qb$ のとき，a を b の倍数，または b を a の約数といい，$b \mid a$ と記す．

次に整数 a, b に対して a, b が同時に 0 にならないとき，その双方の公約数の中で最大なものが a, b の最大公約数といい，(a, b) または $\gcd(a, b)$ と記す．

【命題】
$a, b, q, r \in Z, \quad b \ne 0$ に対して，$a = qb + r$ とする．このとき，

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$$

が成り立つ．

証明

$$\gcd(a,b)=d,\quad \gcd(b,r)=d'$$

とおく．仮定より $a=qb+r$ であるから，$r=a-bq.$ したがって，$d\mid r$ かつ $d\mid b$ より，

$$d\le d'.$$

また，$a=qb+r$ であるから，$d'\mid a$ かつ $d'\mid b$ より，

$$d'\le d.$$

以上より，$d=d'.$ 故に，$\gcd(a,b)=\gcd(b,r).$ □

この最大公約数を求める方法にユークリッドの互除法がある．その方法は次のようである．

自然数 a,b に対して，$a>b$ とする．この a,b について，次のような計算を繰り返す．

$$\begin{aligned}
a &= q_0 b + r_0, \quad (0\le r_0 < b)\\
b &= q_1 r_0 + r_1, \quad (0\le r_1 < r_0)\\
r_0 &= q_2 r_1 + r_2, \quad (0\le r_2 < r_1)\\
&\cdots\\
r_{i-2} &= q_i r_{i-1} + r_i, \quad (0\le r_i < r_{i-1}).
\end{aligned}$$

この計算で，q_i, r_i はそれぞれのプロセスにおける商，余りとなる．余り r_i が 0 になるまで続ける．すなわち，

$$r_0 > r_1 > r_2 > \cdots \ge 0$$

であるから，$r_{k+1}=0$ となる k が存在する．よって，

$$\begin{aligned}
r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, \quad (0< r_k < r_{k-1})\\
r_{k-1} &= q_{k+1} r_k
\end{aligned}$$

となる．このとき，r_k が自然数 a,b の最大公約数であることは，【命題】より明らかである．

このユークリッドの互除法を用いて連分数を考える．

【定理 1.2】

ユークリッドの互除法において，$\theta_0 = r_0/b,\quad \theta_i = r_i/r_{i-1}\ (i\ge 1)$ とおくとき，

$$\frac{a}{b}=q_0+\theta_0,\quad \theta_0^{-1}=q_1+\theta_1,\cdots,\theta_{k-1}^{-1}=q_k+\theta_k,\quad \theta_k^{-1}=q_{k+1}$$

が成り立つ．

証明

以上までと【定理 1.2】で与えられている条件を用いて，

$$\theta_i^{-1}=\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)^{-1}=\frac{r_{i-1}}{r_i}=\frac{q_{i+1}r_i+r_{i+1}}{r_i}=q_{i+1}+\frac{r_{i+1}}{r_i}=q_{i+1}+\theta_{i+1}.\ \square$$

この【定理 1.2】を使うことで連分数の形を求めることができる.

$\dfrac{a}{b}=q_0+\theta_0$ に, $\theta_0=\dfrac{1}{q_1+\theta_1}$ を代入すると,

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{1}{q_1+\theta_1}.$$

この式に, $\theta_1=\dfrac{1}{q_2+\theta_2}$ を代入すると,

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\theta_2}}.$$

以下, $\theta_2,\theta_3,\cdots\theta_{k+1}$ と同様のプロセスを行っていくことによって, 次のような連分数展開

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots+\cfrac{1}{q_k+\cfrac{1}{q_{k+1}}}}}$$

が得られる.

2.　実数の連分数

連分数とは，$a_i, b_i \in Z$ として

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

のような形の式である．また，この連分数を k 番目で打ち切ったとすると，次のようになる．

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_k}{a_k}}}}$$

この式を元の連分数の k 次の近似分数という．近似分数の作る列が $\alpha \in R$ に収束するとき，元の連分数の値は，α であるという．

【定理 2.1】
$a_i, b_i \in Z$，　$b_i \neq 0$ として，有限連分数の値は，有理数である．

証明　明らか．□

【定理 2.2】
$a_i, b_i \in Z$ として，ある数 j_0 が存在して，

$$2|p_j| < q_j - 1 \quad ({}^{\forall} j \geq j) \text{ または，} 0 < p_j < q_j \quad ({}^{\forall} j \geq j_0)$$

であるとき，連分数はある無理数 α に収束する．

この【定理 2.2】に関しては，§4で詳しく扱うことにする．§2では，分子 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ が 1，すなわち

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

のような形をしていて $a_j > 0\ (j \geq 1)$ となる場合を扱う．この形の連分数のことを単純連分数という．

【定理 2.3】
無限単純連分数は収束して，無理数となる．

証明　【定理 2.2】より明らか. □

$\alpha \in R$ として α を連分数で表すことを考える. α が整数でないときは α よりも小さい整数のうち最大のものを k_0 とする. すなわち,

$$k_0 < \alpha < k_0 + 1.$$

このとき α_1 を $\alpha - k_0$ の逆数とすると,

(2.1)
$$\alpha = k_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

となり, $\alpha_1 > 1$. また, α_1 が整数でないならば, k_1 を α_1 より小さい最大の整数として, 式(2.1)と同様に

(2.2)
$$\alpha_1 = k_1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

で α_2 で定めれば, $\alpha_2 > 1$. 式(2.2)を式(2.1)に代入すると,

$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$$

が得られる. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots, \alpha_n$ と継続して行えば(ただし, $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は整数でないとする),

(2.3)
$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}, \quad (k_n \geq 1, \quad n \geq 1).$$

ここで $k_m \ (1 \leq m \leq n)$ は,

$$k_m < \alpha_m < k_m + 1$$

で定められる自然数である. 式(2.3)の右辺 $k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ を部分商, α_n を全商といい, ここでは特に α_n を終項という.

次に, 与えられた実数に対して, その実数に収束するのような連分数を求める. このことを連分数展開といい, 互除法のアルゴリズムを用いて単純連分数への展開を求めることができる.

【定理 2.4】
$x \in R$ に対して, x が有理数であるならば, 有限単純連分数である.

証明

$\alpha \in R$ に対しての連分数展開を次のようにとる.

(2.4)
$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \cdots}}}.$$

α が有理数であるとき，$\alpha = \dfrac{a}{b}\,(a,b \in Z)$ とおくと，α の連分数展開(2.4)の $k_0, k_1, k_2, \cdots$ は a,b に対してユークリッドの互除法を用いたときに得られる整商と一致する．したがって，終項が整数になり展開が終わる．□

この【定理 2.4】から，その対偶は等しいため，次の定理が成り立つ．

【定理 2.5】
$x \in R$ に対して，x が無理数であるならば，無限単純連分数である．

次に，$\omega, \omega' \in R$ として，それぞれの連分数展開を

$$\omega = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{k_n + \cdots}}}}, \quad \omega' = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{k'_n + \cdots}}}}$$

とおく．つまり，ω, ω' の連分数展開について，第 n 項までが一致しているとする．このとき第 $n+1$ 項の対して，$k_n > k'_n$ とすると，ω, ω' について，n が偶数ならば $\omega > \omega'$. n が奇数ならば $\omega < \omega'$ となる．
ω, ω' において k_n, k'_n 以下の部分を終項 ω_n, ω'_n で置き換えると，
=

$$\omega = \frac{p_n \omega_n + p_{n-1}}{q_n \omega_n + q_{n-1}}, \quad \omega' = \frac{p_n \omega'_n + p_{n-1}}{q_n \omega'_n + q_{n-1}}$$

ただし，

$$p_j = \lfloor k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{j-1} \rfloor, \quad q_j = \lfloor k_1, k_2, \cdots k_{j-1} \rfloor$$

として得ることができる．このことは付録を参照．
ここで，$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$ を計算すると

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (p_{n-1} k_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(q_{n-1} k_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} \\ &= -(p_{n-2} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\ &= (-1)^2 (p_{n-2} q_{n-3} - p_{n-3} q_{n-2}) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{n-1} (p_1 q_0 - p_0 q_1) \\ &= (-1)^{n-1} (k_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

このことを用いて，ω と ω' の差を考えると

(2.5)
$$\omega-\omega'=\frac{(-1)^n(\omega_n-\omega_n')}{(q_n\omega_n+q_{n-1})(q_n\omega_n'+q_{n-1})}.$$
ここで，大小関係を

(2.6)
$$\omega_n \ge k_n \ge k_n'+1 \ge \omega_n' \ge k_n'$$
と考えることができるが，仮定より $k_n > k_n'$ であるから，関係式(2.6)において ω_n と k_n' の間のどこかにおいて符号≥が符号＞でなければばならない．したがって ω_n と ω_n' の大小関係は，$\omega_n < \omega_n'$ となる．

故に，式(2.5)より $(-1)^n=\pm1$ であるから ω と ω' の大小関係は，$\omega<\omega'$ または $\omega>\omega'$ であり，お互いが一致することはない．一方，関係式(2.6)を
$$\omega_n = k_n = k_n'+1 = \omega_n' = k_n'$$
と考える．このとき ω,ω' の連分数展開は，

$$\omega=k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cdots+\cfrac{1}{k_{n-1}+\cfrac{1}{k_n}}}},\quad \omega'=k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cdots+\cfrac{1}{k_{n-1}+\cfrac{1}{(k_n-1)+\cfrac{1}{1}}}}}$$

となり，これらは有限連分数となる．

このことから，有限連分数は最終項に1をとることを許せば二通りの表し方ができる．□

以上より，次の定理が成り立つ．

【定理 2.6】

有理数は二通りの有限単純連分数に展開することができる．また，無理数はただ一通りの無限単純連分数に展開される．

ここで単純連分数に対して a_i がすべて正であるという条件を同時に満たす．もし正でないとすると，連分数の一意性が成り立たない場合が存在する．次に例としてあげるのは，tan の連分数である．一つは一般に成り立つ連分数表示であり，もう一つはユークリッドの互除法を用いて作ったプログラムによって計算された tan1の連分数表示である．理論上成り立つ式に対して，$x=1$ の代入した連分数とプログラムで計算させた tan1の表示に相異点があることが見て取れる．

例: tan の連分数表示

$$\tan x = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}} = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{-3+\cfrac{x^2}{-5+\cfrac{x^2}{-7+\cdots}}}}, \quad \tan 1 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cdots}}}}}}}$$

左の連分数表示は, 第 I 部の付録で詳しく取り上げている一般に成り立つ tan の連分数であり, 右の連分数表示は, 第 II 部で扱っているプログラムより得られる連分数である.

3.　級数から得られる連分数

§3では，p_j，　$q_j \in C$ として，連分数

(3.1)
$$q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cdots}}}$$

の形のものを扱っていく．

連分数(3.1)を k 番目で打ち切ったとすると，

(3.2)
$$q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cdots + \cfrac{p_k}{q_k}}}}.$$

この連分数(3.2)を，連分数(3.1)の k 次の近似分数という．近似分数(3.2)は有理数であり分子，分母は再帰的に

(3.3)
$$A_k = q_k A_{k-1} + p_k A_{k-2}$$
$$B_k = q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2} \quad (k \geq 1)$$

と定めるとき，近似分数(3.2)は A_k / B_k に等しい．ただし，初期値は

(3.4)
$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = q_0,$$
$$B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1.$$

特に，$p_j, q_j \in Z \ (j \in N \cup \{0\})$ であるとき，$\{A_k\}, \{B_k\}$ は整数列である．

連分数(3.1)の近似分数(3.2)は，有理数であるので2つの整数の商として表すことを考える．
$k = 1$ のとき，近似分数は

(3.5)
$$q_0 + \frac{p_1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + p_1}{q_1}.$$

また，$k = 2$ のとき

(3.6)
$$q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2}} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 p_2 + p_1 q_2}{q_1 q_2 + p_2}$$

となる．ここで，　式(3.5)，式(3.6)における右辺に対して分子を A_k，分母を B_k であるから，

(3.7)
$$A_1 = q_0 q_1 + p_1, \qquad B_1 = q_1$$
$$A_2 = q_0 q_1 q_2 + q_0 p_2 + p_1 q_2, \quad B_2 = q_1 q_2 + p_2$$

とかくことができる．ただし，初期値は(3.4)を用いる．ここで A_2 の右辺について，

$$q_0 q_1 q_2 + q_0 p_2 + p_1 q_2 = (q_0 q_1 + p_1) q_2 + q_0 p_2$$

と書き換えることができ，この式に対して $A_1 = q_0 q_1 + p_1$，　$B_1 = q_1$ を代入すると，

$$A_2 = q_2 A_1 + p_2 A_0$$

と変形できる．B_2 の右辺についても

$$B_2 = q_2 B_1 + p_2 B_0$$

と変形できる．$k=3$ のときについては，A_2, B_2 に対して $q_2 \to q_2 + \dfrac{p_3}{q_3}$ として置き換えたものを A_3, B_3 とすると，

(3.8) $$A_3 = q_3 A_2 + p_3 A_2, \quad B_3 = q_3 B_2 + p_3 B_1$$

が得られる．したがって，関係式(3.7)と関係式(2.8)から一般に，k 次の近似分数の分子，分母は

(3.9) $$A_k = q_k A_{k-1} + p_k A_{k-2}, \quad B_k = q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2}$$

と推測できる．このことを数学的帰納法を用いて証明する．

証明

$2 \le k \le n$, A_n, B_n のとき成り立つと仮定する．すなわち，

(3.10) $$A_n = q_n A_{n-1} + p_n A_{n-2}, \quad B_n = q_n B_{n-1} + p_n B_{n-2}.$$

このとき $k = n+1$ について考える．関係式(3.10)について，$q_n \to q_n + \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ に置き換えた式をそれぞれ A_{n+1}, B_{n+1} とする．つまり，

$$A_{n+1} = \left(q_n + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) A_{n-1} + p_n A_{n-2}, \quad B_{n+1} = \left(q_n + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) B_{n-1} + p_n B_{n-2}.$$

ここで A_{n+1}, B_{n+1} の右辺に q_{n+1} をかけて式を整理すると，

(3.11) $$A_{n+1} = (q_n A_{n-1} + p_n A_{n-2}) q_{n+1} + p_{n+1} A_{n-1}, \quad B_{n+1} = (q_n B_{n-1} + p_n B_{n-2}) q_{n+1} + p_{n+1} B_{n-1}.$$

関係式(3.10)をそれぞれ関係式(3.11)代入すると，

$$A_{n+1} = q_{n+1} A_n + p_{n+1} A_{n-1}, \quad B_{n+1} = q_{n+1} B_n + p_{n+1} B_{n-1}$$

が得られる．よって，$k = n+1$ のときも成り立つ．□

【定理 3.1】

連分数(3.1)の近似分数は，級数

(3.12) $$q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{B_3 B_4} + \cdots$$

の部分和である．ただし，$\{B_k\}$ は関係式(3.3), (3.4)で与えられる数列である．

証明

連分数(3.1)の k 次の近似分数と $k+1$ 次の近似分数の差は，

(3.13) $$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{A_{k+1} B_k - A_k B_{k+1}}{B_k B_{k+1}}.$$

式(3.13)の分子の A_{k+1}, B_{k+1} についてそれぞれ関係式(3.3)を使って書き換えると,

(3.14)
$$\begin{aligned} A_{k+1}B_k - A_k B_{k+1} &= (q_{k+1}A_k + p_{k+1}A_{k-1})B_k - A_k(q_{k+1}B_k + p_{k+1}B_{k-1}) \\ &= -p_{k+1}(A_k B_{k-1} - A_{k-1}B_k) = \cdots \\ &= p_2 \cdots p_{k+1}(-1)^k (A_1 B_0 - A_0 B_1) \end{aligned}$$

となる.初期値(3.4)より, $A_1 B_0 - A_0 B_1 = p_1$ となるので, $A_{k+1}B_k - A_k B_{k+1} = (-1)^k p_1 p_2 \cdots p_k$. ここで近似分数 $\dfrac{A_k}{B_k}$ を

$$\frac{A_k}{B_k} = \left(\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}\right) + \left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}}\right) + \cdots + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0}\right) + \frac{A_0}{B_0}$$

と書き換えて式(3.13)を使うと,

$$\frac{A_{k+1}B_k - A_k B_{k+1}}{B_k B_{k-1}} = \frac{(-1)^k p_1 p_2 \cdots p_k}{B_k B_{k-1}}$$

であるから,

$$\frac{A_k}{B_k} = q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} + \cdots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{p_1 p_2 \cdots p_k}{B_{k-1}B_k}$$

が得られる.□

$c_k \in Z$, $k \geq 1$ として, 級数

(3.15)
$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_4} + \cdots$$

が与えられているとする. この級数(3.15)が級数(3.12)と一致するような $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ を求める.

解法

連分数(3.1)について, $p_k, q_k \in Z$ とする. $q_0 = 0$, $p_1 = 1$, $q_1 = B_1 = c_1$ とする.

級数(3.12)の連続した項の商をとる.

(3.16)
$$\frac{p_1 \cdots p_{k-1}}{B_{k-2}B_{k-1}} \cdot \frac{B_{k-1}B_k}{p_1 \cdots p_k} = \frac{B_k}{B_{k-2}p_k}.$$

同様に, 級数(3.15)の連続した項の商をとる.

(3.17)
$$\frac{1}{c_{k-1}} \cdot \frac{c_k}{1} = \frac{c_k}{c_{k-1}}.$$

式(3.16)と式(3.17)とが等しいとすると,

$$\frac{B_k}{B_{k-2}p_k} = \frac{c_k}{c_{k-1}}.$$

すなわち,

(3.18)
$$c_{k-1}B_k = c_k p_k B_{k-2}$$

を得る．次に式(3.18)から，式(3.13)の B_k の関係式の両辺に c_{k-1} をかけたものを引くと，

(3.19a) $$c_{k-1}q_k B_{k-1} = (c_k - c_{k-1})\, p_k B_{k-2}$$

が得られ，同様に式(3.3)の B_k の関係式の両辺に c_k をかけたものを引くと，

(3.20) $$(c_{k-1} - c_k) = -c_k q_k B_k$$

が得られる．さらに式(3.19a)について，k を $k+1$ に置き換えると，

(3.19b) $$c_k q_{k+1} B_k = (c_{k+1} - c_k)\, p_{k+1} B_{k-1}.$$

式(3.20)と式(3.19b)について，辺々を割れば B_k が削除されて，

$$\frac{c_k q_{k+1}}{(c_{k-1} - c_k)} = \frac{(c_{k+1} - c_k)\, p_{k+1}}{-c_k q_k}$$

となる．したがって，

$$c_k^2 q_{k+1} q_k = (c_{k+1} - c_k)(c_k - c_{k-1})\, p_{k+1}.$$

p_k， q_k は整数より，$k \geq 1$ に対して，

(3.21) $$p_{k+1} = c_k^2, \quad q_{k+1} = c_{k+1} - c_k.$$

以上より，与えられた級数(3.15)は，条件式(3.21)を用いることによって級数(3.12)と一致する．□

【定理 3.2】

$p_k, q_k, c_k \in Z\ (k \geq 1)$ として，

$$p_{k+1} = c_k^2, \quad q_{k+1} = c_{k+1} - c_k$$

が成り立つとき，級数(3.15)は級数(3.12)と一致する．

4.　連分数の無理数性

交互に変わる符号をもつ無限級数

(4.1)
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots = \sum_{i \ge 0} (-1)^i a_i, \quad a_i \ge 0 \ (i \ge 0)$$

を交代級数という．次の定理はよく知られている(例えば，参考文献〔2〕，P. 30)．

> 【定理 4.1】
> 無限級数(4.1)のすべての項a_iが，$a_i > 0$であり
> $$a_{i+1} < a_i, \quad \lim_{i \to \infty} a_i = 0$$
> を満たすとき，級数(4.1)はある数sに収束する．

連分数(3.1)を無限級数に変換すると，

(4.2)
$$q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{B_3 B_4} + \cdots$$

が得られる(§3より)．$p_k, q_k > 0$とすれば，級数(4.2)は交代級数である．さらに，§3より，

$$B_k = q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2} > p_k B_{k-2}$$

である．したがって，

$$\frac{1}{B_{k-2} B_{k-1}} > \frac{p_k}{B_{k-1} B_k}.$$

よって、級数(4.2)の各項の絶対値は単調減少する．ここで，すべての$k \ge 1$に対して，$0 < p_k \le q_k$が成り立つとすると，

(4.3)
$$B_k B_{k-1} = q_k B_{k-1}^2 + p_k B_{k-1} B_{k-2}.$$

ここで，p_k, q_kがすべて正ならばB_kもすべて正であり，さらにq_kが整数であるから，

$$B_k > q_k B_{k-1} > B_{k-1}.$$

したがって，式(4.3)は，

$$B_k B_{k-1} = q_k B_{k-1}^2 + p_k B_{k-1} B_{k-2} > 2 p_k B_{k-1} B_{k-2} > 2^{k-1} p_k p_{k-1} \cdots p_1$$

となる．つまり，

$$B_k B_{k-1} > 2^{k-1} p_k p_{k-1} \cdots p_1.$$

このことから級数(4.2)の一般項は0に収束するため，【定理 4.1】を用いることができ，級数(4.2)はある実数に収束する．すなわち，連分数はある実数に収束する．□

> 【定理 4.2】
> すべてのkに対してp_k, q_kが整数かつ，$0 < p_k \le q_k$をみたすとき，連分数
>
> (4.4)
> $$q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cdots}}}$$
>
> は，ある実数に収束する．

さらに，次の定理が成り立つ．

【定理 4.3】

$p_j, q_j \in Z$ であり，かつある数 j_0 が存在して，任意の $j \geq j_0$ に対して

(4.5) $$0 < p_j \leq q_j$$

が成り立つとき，連分数(4.4)はある無理数 α に収束する．

証明

収束については，【定理 4.2】より明らか．以下，極限 α が無理数であることを示す． $j_0 = 0, \quad q_0 = 0$ の場合に示せば十分である．極限 α について

(4.6) $$\alpha = \frac{p_1}{q_1 + \beta}$$

が成り立つ．ただし，β は，次の連分数で定まる実数である．

$$\beta = \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cdots}}.$$

$p_1 \leq q_1, \quad \beta > 0$ であることから $\alpha < 1$ である．ここで α を有理数 $\alpha = \frac{B}{A}$ $({}^{\exists}A, B \in Z, \quad 0 < B < A)$ と仮定し，式(4.6)を変形して $\alpha = \frac{B}{A}$ を代入すると，

$$\beta = \frac{p_1 - q_1\alpha}{\alpha} = \frac{Ap_1 - Bq_1}{B}$$

を得る．このとき，β は α の分母より小さい分母を持つ有理数となる．

さらに，$\beta = \frac{p_2}{q_2 + \gamma}$ とおいて同様のプロセスを行うと，β の分母より小さい分母を持つ γ を得ることができる．このプロセスを続けて行うことで，得られる有理数の分母はより小さい自然数となる．しかしこのようなことは無限には起こらない．したがって，与えられた連分数(4.4)は無限に続くものであるため，矛盾が生じる．よって，α は無理数である．□

$p_j < 0$ のとき，条件式(4.5)を次のように置き換える．

(4.7) $$2|p_j| < q_j - 1.$$

また，等式

$$q_{j-1} + \frac{p_j}{q_j + \beta} = (q_{j-1} - 1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{|p_j|}{q_j - |p_j| + \beta}}$$

を用いて，【定理 4.3】と同様に与えられた連分数(4.4)に対して式変形を行う.

(4.8)
$$q_0+\cfrac{p_1}{q_1+\beta}=(q_0-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{|p_1|}{q_1-|p_1|+\cfrac{p_2}{q_2+\cfrac{p_3}{q_3+\cdots}}}}.$$

この式(4.8)の右辺を $q_0'+\cfrac{p_1'}{q_1'+\cfrac{p_2'}{q_2'+\cfrac{p_3'}{q_3'+\cdots}}}$ と比較すると,

$$\begin{cases} p_1'=1, \quad q_1'=1 \\ p_2'=|p_1|, \quad q_2'=q_1-|p_1|. \end{cases}$$

よって,

$$p_2'>0, \quad q_2'\geq p_2'.$$

以上より，$0<p_2'\leq q_2'$ となり，条件式(4.5)が成り立つ. □

上記をまとめると，次のようになる.

【定理 4.4】

$p_j, q_j \in Z$ として，ある数 j_0 から先の任意の j に対して,

$$2|p_j|<q_j-1$$

であるとき，連分数(4.4)はある無理数 α に近づく.

この【定理 4.4】を利用して，次の定理を示す.

【定理 4.5】

x が 0 でない有理数のとき，$\tan x$ は無理数である.

一般に $\tan x$ の連分数展開は,

$$\tan x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}}$$

とされている.

関数$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$について，関数$\sin x$，$\cos x$の級数展開は，

(4.9)
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots.$$

(4.10)
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots.$$

級数(4.9)と級数(4.10)を$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$に代入すると，

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/6 + x^5/120 - \cdots}{1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots} = \cfrac{x}{\cfrac{1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots}{1 - x^2/6 + x^4/120 - \cdots}}$$

となる．ここで，$x \to 0$とすると分母は1に近づくことに注意して，分母から1の引いて逆数をとると，

(4.11)
$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^3/3 - x^4/30 + \cdots}{1 - x^2/6 + x^4/120 + \cdots}} = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{\cfrac{1 - x^2/6 + \cdots}{1/3 - x^2/30 + \cdots}}}.$$

式(4.11)の右辺について，$x \to 0$とすると最後の分母$\dfrac{1}{3} - \dfrac{x^2}{30} + \cdots$は3に近づく．そこで分母から3を引いて逆数をとると，

(4.12)
$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{\cdots}}}$$

を得る．式(4.12)の右辺の最後の分母について以下同様のプロセスを続けていくことで，関数$\tan x$の連分数展開を得ることができる．

(4.13)
$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}}$$

である.この連分数展開の完全な証明は付録で与える．

定理 4.5 の証明

関数$\tan x$は奇関数であるから，xが正の場合のみを考えれば十分である．

xが有理数であるから$x = \dfrac{m}{n}$ $(n, m \in N)$とかけ，式(4.13)に代入する．

(4.14)
$$\tan x = \cfrac{m/n}{1 - \cfrac{m^2/n^2}{3 - \cfrac{m^2/n^2}{5 - \cfrac{m^2/n^2}{7 - \cdots}}}} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \cdots}}}}.$$

式(4.14)の右辺を一般の連分数の形(3.1)における $q_0 = 0$ の場合と比較すると,

$$p_j = \begin{cases} m & (j=1) \\ -m^2 & (j \geq 2) \end{cases}, \quad q_j = (2j-1)n \quad (j \geq 1).$$

この p_j, q_j を【定理 4.4】の条件式 $2|p_j| \leq q_j - 1$ にあてはめると, 左辺は $2|-m^2| = 2m^2$ であり, 右辺は $(2j-1)n - 1$ となる. 右辺における因数 $(2j-1)$ は $1,3,5,7,\cdots$ と無限に大きくなるのに対して, 左辺は一定の値をとる. したがって, ある数 j_0 から先の $j \geq j_0$ に対して条件式 $2|p_j| \leq q_j - 1$ が成り立つ.【定理 4.4】より $\tan x$ は無理数である. □

この結果を用いて, 次の定理を証明する.

【定理 4.6】
π は無理数である.

証明

まず「y が 0 でない有理数のとき, $\arctan y$ は無理数である」ことを背理法で示す.
$x = \arctan y$ が有理数であると仮定する. $y \neq 0$ より $x \neq 0$ で【定理 4.5】より, $y = \tan x$ は無理数である. これは, y が有理数という仮定と矛盾する. したがって $x = \arctan y$ は無理数である.

次に $x = \dfrac{\pi}{4}$ として, 関数 $y = \tan x$ に代入すると, $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$ となることから,

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

このとき 1 は 0 でない有理数であるから $\arctan 1$ は無理数であり, $\dfrac{\pi}{4}$ は無理数である. したがって π は無理数である. □

5.　二次無理数の連分数

ここでは，実数の二次無理数を考察する．

【定理 5.1】 実数の二次無理数の単純連分数展開は，循環連分数である．

無限単純連分数

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}, \quad (b_i \ge 1, \quad i \ge 1)$$

において，$b_{m+k+v} = b_{m+v}(m, k, v \in Z, \quad v \ge 0)$ が成り立つとき，この連分数を循環連分数という．

$a, b, c \in Z, \quad (a, b, c) = 1$を係数に持つ二次方程式

(5.4)
$$ax^2 + bx + c = 0$$

について，判別式

$$D = b^2 - 4ac$$

が平方数でないときに，方程式(4.10)が持つ二つの根を二次無理数という．方程式(4.10)の二つの根を $\theta, \quad \theta'$ とし，

$$\theta = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad \theta' = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

とおく．このとき，θ と θ' を互いに共役な二次無理数という．また，θ を二次無理数とすれば，上記の定義より θ は整係数の二次方程式を満たす．その方程式の係数の公約数を取り去ったものを式(5.4)とすれば，そのとき判別式 D を θ の判別式といい，θ を判別式 D に属する二次無理数という．

n 次の方程式 $f(x) = 0$ が実数根をもつとして，その一つを α とし，α は無理数であるとする．この実根 α の単純連分数展開が，

(5.1)
$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}$$

と得られたとする．このとき，

$$x = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}} = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}}$$

とする(付録参照). このことによって，n 次の方程式 $f(x)=0$ が,

(5.2) $$f_n(x_n)=0$$

と変換されたとする. α 以外の n 次の方程式 $f(x)=0$ の根 $\beta,\gamma,\cdots$ に対応して

$$\beta=\frac{p_n\beta_n+p_{n-1}}{q_n\beta_n+q_{n-1}},\quad \gamma=\frac{p_n\gamma_n+p_{n-1}}{q_n\gamma_n+q_{n-1}}$$

となる $\beta_n,\gamma_n,\cdots$ が方程式(5.2)の根である. この式を変形すると,

(5.3) $$\beta_n=\frac{q_{n-1}\beta-p_{n-1}}{-q_n\beta+q_{n-1}}=-\frac{q_{n-1}}{q_n}\cdot\frac{\beta-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\beta-\dfrac{p_n}{q_n}}$$

が得られる. 式(5.3)の右辺について，$n\to\infty$ とすると,

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\to\alpha,\quad \frac{p_n}{q_n}\to\alpha$$

となるので,

$$\frac{\beta-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\beta-\dfrac{p_n}{q_n}}\to\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

ただし，$\beta\neq\alpha$ とする.

また，q_{n-1}，q_n は正の整数であるから，β が実数ならば β_n は負数となる. β_n が負数であれば,

$$\beta_n=k_n+\frac{1}{\beta_{n+1}}$$

すなわち,

$$\beta_{n+1}=\frac{1}{\beta_n-k_n}$$

となり，$k_n\geq 1$ であるから β_{n+1} は負数であり，かつ絶対値が1より小さい値となる. γ_n 以降に関して同様にして，負数でありかつ絶対値が1より小さい値となることがいえる.

故に，ある値以上の n に対して α_n が方程式 $f_n=0$ のただ一つの正数の根であり，1より大きく，その他の実根 $\beta_n,\gamma_n,\cdots$ はすべて区間 $(-1,0)$ に入る.

ここまでをふまえて，次のように規定する.

二次無理数 θ とその共役数 θ' に関して，不等式

$$\theta>1,\quad 0>\theta'>-1$$

が成り立つとき，θ を簡約された二次無理数という.

次に実数変数 x,y について，$a,b,c,d\in Z$ として,

$$x=\frac{ay+b}{cy+d},\quad \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=\pm1$$

の一次変形で結び付けられるとき，x,y は対等であるという.

【定理 5.2】
二次無理数と対等な数は同一の判別式に属する二次無理数である.

このことをより詳しくいうと, 次のようになる.
判別式 D に属する二次無理数を ω とおく. すなわち,
(5.5)
$$a\omega^2+b\omega+c=0,\quad \omega=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},$$
$$(a,b,c,)=1,\quad D=b^2-4ac$$
とする. また, ω_1 を ω と対等な数とし, 次のようにおく.
(5.6)
$$\omega=\frac{p\omega_1+q}{r\omega_1+s},\quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}=e=\pm 1.$$
この ω_1 も判別式 D に属する二次無理数であって,
(5.7)
$$\begin{cases} k=ap^2+bpr+cr^2 \\ l=2apq+b(ps+qr)+2crs \\ m=aq^2+bqs+cs^2 \end{cases}$$
とおけば, ω_1 は次を満たす.
(5.8)
$$k\omega_1^2+l\omega_1+m=0,\quad \omega_1=\frac{-l+e\sqrt{D}}{2k}.$$
$$(k,l,m)=1,\quad D=l^2-4km.$$
ここで, 対等とは, 条件式(5.6)を満たす ω と ω_1 ような値の関係のことをいう.

証明

関係式(5.5)と関係式(5.6)によって, ω_1 は二次方程式
$$a(px'+q)^2+b(px'+q)(rx'+s)+c(rx'+s)^2=0$$
の根である. すなわち, 関係式(5.7)を用いて書き換えると,
(5.9)
$$kx'^2+lx'+m=0.$$
この方程式(5.9)の判別式 l^2-4mk を関係式(5.7)を使って計算すれば, $D=b^2-4ac$ が得られる.
上記の変形式(5.6)は斉次の形をしていれば, 二次の方程式 $ax^2+bxy+cy^2$ が $x=px'+qy',\quad y=rx'+sy'$ なる一次変形によって $kx'^2+lx'y'+my'^2$ になる. 故に,
$$\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}^2\begin{vmatrix} k & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & m \end{vmatrix},$$
すなわち, $l^2-4km=b^2-4ac$ が得られる.
このように ω_1 は判別式 D なる二次方程式(5.9)の根であるが, ω_1 が判別式 D に属する二次の無理数であるためには, $(k,l,m)=1$ であることが必要. 仮に, $(k,l,m)=t>1$ として, 二次方程式(5.9)の左辺を t

で割ればω_1は判別式$\dfrac{D}{t^2}$となる整係数の二次方程式の根になる．ここで，ωとω_1とは互いに対等な数であるから，上記の計算においてωとω_1とを交換してみることができωが判別式$\dfrac{D}{t^2}$をもつ二次方程式の根になる．このことは，ωが判別式Dに属するということに矛盾．故に，

$$(k,l,m)=1.$$

次に，ω_1が二次方程式(3.15)の二つの根のうちのどちらであるかを確かめる．関係式(5.6)より，

$$\omega_1=\frac{s\omega-q}{-r\omega+p}.$$

これより，ω'，　ω_1'をω，　ω_1の共役な数とすると，

$$\omega_1-\omega_1'=\frac{s\omega-q}{p-r\omega}-\frac{s\omega'-q}{p-r\omega'}=\frac{(ps-qr)(\omega-\omega')}{(p-r\omega)(p-r\omega')}=\frac{ea(\omega-\omega')}{k}.$$

したがって，

$$k(\omega_1-\omega_1')=e\sqrt{D}.$$

故に，

$$\omega_1=\frac{-l+\sqrt{D}}{2k},\quad \omega_1'=\frac{-l-\sqrt{D}}{2k}.$$

□

ここまでのことから，次の定理が得られる．

【定理 5.3】
判別式Dに属する二次無理数を連分数に展開すれば，ある番号以上の終項はすべて同じ判別式Dに属する簡約された二次無理数である．

【定理 5.4】
与えられた判別式Dに属する簡約された二次無理数の個数は有限である．

証明

ωを判別式Dに属する簡約された二次無理数とし，ωに関して，

$$a,b,c\in Z,\quad a\omega^2+b\omega+c=0$$
$$(a,b,c)-1$$
$$D=b^2-4ac$$
$$\omega=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad \omega'=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

とする．このとき，

(5.10)
$$\omega>1,\quad 0>\omega'>-1$$

が成り立つので，

$$\omega>\omega'.$$

すなわち,

(5.11)
$$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} > \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

が成り立つ．式(5.11)より $a>0$ であることがわかる．また，条件式(5.10)より，

$$\omega+\omega' > 0, \quad \omega\cdot\omega' < 0.$$

すなわち,

(5.12)
$$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} > 0, \quad \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} < 0.$$

関係式(5.12)より，$-\dfrac{b}{a} > 0, \quad \dfrac{c}{a} < 0$ が得られ，$a>0$ であることから，

$$b<0, \quad c<0$$

であることがわかる．したがって，

$$D = b^2-4ac = |b|^2+4a\cdot|c| > |b|^2.$$

故に,

(5.13)
$$|b| < D$$

である．これより $\omega, \quad \omega'$ は次のように書き換えられる．

$$\omega = \frac{\sqrt{D}+|b|}{2a}, \quad \omega' = -\frac{\sqrt{D}-|b|}{2a}.$$

したがって，条件式(5.10)にあてはめると，

(5.14)
$$\frac{\sqrt{D}+|b|}{2a} > 1, \quad 0 > -\frac{\sqrt{D}-|b|}{2a} > -1.$$

この関係式(5.14)より，

(5.15a)
$$\frac{\sqrt{D}+|b|}{2} > a > \frac{\sqrt{D}-|b|}{2}$$

が得られる．また，

$$|ac| = \frac{D-b^2}{4} = \frac{\sqrt{D}-b}{2}\cdot\frac{\sqrt{D}+b}{2}$$

であるから，

(5.15b)
$$\frac{\sqrt{D}+|b|}{2} > |c| > \frac{\sqrt{D}-|b|}{2}$$

が得られる．以上より，$b>0$ かつ条件式(5.13)より $|b|$ は $\sqrt{D}$ より小さい値をとるから，b が取り得る値は有限個になる．また，$a\cdot|c| = \dfrac{D-b^2}{4}$ より，　$a, \quad |c|$ は $\dfrac{D-b^2}{4}$ の正の約数かつ，条件式(5.15a)と条件式(5.15b)によって範囲が制限される．したがって $a, \quad c$ の取り得る値も有限個になる．よって，判別式 D に

属する二次無理数の個数は有限個である. □

【定理 5.3】,【定理 5.4】を用いて, 判別式 D に属する二次無理数 ω の正則連分数展開を考えたとき, 終項は判別式 D に属する簡約された無理数のみになり, かつそれらは有限個に限って存在する. したがって, 同一の簡約された無理数が終項として再び出てこなくてはいけない. このことから, ω の正則連分数展開における部分商は一定の周期をもって循環することになる. つまり,【定理 5.1】が証明されたことになる.

6.　まとめ (感想)

ここまで長い期間をかけて連分数について, 様々なことを調べてきたが, 本当に奥の深い内容だという事を実感している. 式の形としては珍しく面白いと思うが, なかなか手ごわいものだった. この卒業研究で取り組んだ範囲は, まだまだ序章にすぎないと思い, 追求していくべきことは沢山あると思う. 最後にまとめとして大きく次をあげる.

- 与えられた実数に対して, その実数が有理数であるならば連分数は有限単純連分数に展開され, 無理数であるならば単純無限連分数に展開される.
- 連分数が与えられた場合, 有限連分数ならばその値は有理数であり, 無限連分数ならばある条件の元で無理数に収束する.
- 二次無理数を連分数展開すると, q_j が循環する循環連分数展開が得られる.

今回, 私はこの連分数について学んでいく中で, 連分数だけでなく多くの数学の知識を学び直すことができた. まだまだ未熟な部分もありますが, 精一杯取り組み充実した時間を過ごすことができた.

付録

ｉ. 連分数の式変形

連分数展開

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_n}}}$$

が与えられたとき，この展開に対して一つの分数式として表す計算方法を考える．

(1a)
$$\begin{aligned} x_0 &= k_0 x_1 + x_2 \\ x_1 &= k_1 x_2 + x_3 \\ &\cdots \\ x_{n-1} &= k_{n-1} x_n + x_{n+1} \\ &\cdots \end{aligned}$$

という関係式を考える．ここで，$k_o, k_1, \cdots$ は任意の定数，$x_0, x_1, x_2, \cdots$ はこれらの方程式の変数とする．

【定理】

上記の条件式が与えられたとき，

(2a) $$x_0 = p_n x_n + p_{n-1} x_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．ただし，p_n は $k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}$ のみに関係する係数で，

(3a) $$p_0 = 1, \quad p_1 = k_0.$$

(4a) $$p_n = p_{n-1} k_{n-1} + p_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

証明

数学的帰納法を用いる．(4a)は $n = 1$ のとき明らかに成り立つ．(4a)が $n - 1$ のとき成り立つと仮定する．

すなわち，

$$x_0 = p_{n-1} x_{n-1} + p_{n-2} x_n.$$

この式に対して関係式(1a)を代入すると，

$$x_0 = p_{n-1}(k_{n-1} x_n + x_{n+1}) + p_{n-2} x_n = (p_{n-1} k_{n-1} + p_{n-2}) x_n + p_{n-1} x_{n+1}.$$

よって，式(2a)より，$x_0 = p_n x_n + p_{n-1} x_{n+1}$ が得られ，n のときも成り立つ．□

この p_n は $k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}$ の多項式である．この多項式を次のように記すことにする．

$$p_n = [k_0, k_1, k_2, \cdots k_{n-1}] \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

すなわち，

$$
\begin{aligned}
[k_0] &= k_0, \\
[k_0, k_1] &= k_0 k_1 + 1, \\
[k_0, k_1, k_2] &= k_0 k_1 k_2 + k_0 + k_2, \\
&\cdots \\
[k_0, k_1, \cdots, k_n] &= [k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}] k_n + [k_0, k_1, \cdots, k_{n-2}].
\end{aligned}
$$

関係式(1a)に関して，第一式を除いて変数 $x_1, x_2, \cdots$ のみに注目すると，

$$x_1 = q_n x_n + q_{n-1} x_{n+1}$$

という関係式が得られる．ここで，

$$q_n = [k_1, k_2, \cdots k_{n-1}] \quad (n = 2,3,\cdots).$$

$x_1 = q_n x_n + q_{n-1} x_{n+1}$ を $n = 1$ の場合にも成り立たせるために

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1$$

とおく．そうすることによって，式(4a)と同様に

$$q_n = q_{n-1} k_{n-1} + q_{n-2} \quad (n = 2,3,\cdots)$$

が成り立つ．

しかし，次のような公式を使うと，p_n, q_n を計算するのに便利である．

【公式】

$$[k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}] = k_0 [k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}] + [k_2, \cdots, k_{n-1}].$$

証明

今までのことから，

(5a) $$x_0 = [k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}] x_n + [k_0, k_1, \cdots, k_{n-2}] x_{n+1},$$

(6a) $$x_1 = [k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}] x_n + [k_1, k_2, \cdots, k_{n-2}] x_{n+1},$$

(7a) $$x_2 = [k_2, \cdots, k_{n-1}] x_n + [k_2, \cdots, k_{n-2}] x_{n+1}.$$

関係式(1a)より，$x_0 = p_0 x_1 + x_2$ であるから，式(6a)に k_0 をかけて式(7a)を加えたものと，式(5a)を比較すると公式が得られる．□

以上より，次の定理が成り立つ．

【定理】

与えられた連分数は，一つの分数式として表すことができる．すなわち，

(8a) $$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_n}}} = \frac{[k_0, k_1, k_2, \cdots, k_n]}{[k_1, k_2, \cdots, k_n]}.$$

証明

式(8a)の右辺について公式を用いることで，連分数展開を得ることができる(省略)．□

以上ここまでのすべてをふまえて，本文内では、次のような式変形を引用している.

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}} = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}}.$$

ただし,

$$p_j = [k_0, k_1, k_2, \cdots k_{j-1}], \quad q_j = [k_1, k_2, \cdots, k_{j-1}]$$

実際に，先ほどの定理より,

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}} = \frac{[k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, x_n]}{[k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, x_n]}$$

となり，この式の右辺について【公式】を用いると,

$$\frac{[k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, x_n]}{[k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, x_n]} = \frac{[k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}]x_n + [k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n-2}]}{[k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}]x_n + [k_1, k_2, \cdots, k_{n-2}]} = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}}$$

となる.

ⅱ．tanの連分数展開

【定理】

一般に関数 $\tan x$ の連分数展開は

$$\tan x = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\cdots}}}}}$$

が成り立つ．

証明

関数 $\varphi(z)$ を次のように定義する．

(1b)
$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{1\cdot z} + \frac{a^2}{1\cdot 2\cdot z(z+1)} + \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot z(z+1)(z+2)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!\cdot z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$

この関数(1b)に対して，$\varphi(z)-\varphi(z+1)$ を考える．

ここで，式(1b)の右辺の Σ 記号の中身について，第 n 項と第 $n+1$ 項の比をとる．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!\cdot z(z+1)\cdots(z+n)} \times \frac{n!\cdot z(z+1)\cdots(z+n-1)}{a^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a}{(n+1)(z+n)}\right| = 0 < 1$$

であるから，Σ 記号の中身は収束する(例えば，参考文献〔2〕，P. 28～).

つまり，

$$\begin{aligned}
\varphi(z)-\varphi(z+1) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1\cdot 2\cdots n\cdot z(z+1)\cdots(z+n-1)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1\cdot 2\cdots n\cdot (z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1\cdot 2\cdots n(z+1)\cdots(z+n-1)}\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1\cdot 2\cdots z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} \\
&= \frac{a}{z(z+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)}
\end{aligned}$$

となり，

(2b)
$$\varphi(z)-\varphi(z+1) = \frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2)$$

が得られる．次に関数 $\psi(z)$ を次のように定義する．

(3b)
$$\psi(z) = \frac{a\cdot\varphi(z+1)}{z\cdot\varphi(z)}.$$

この関数(3b)は,

(4b)
$$\psi(z)=\frac{a}{z+\psi(z+1)}$$

を満たす.

$$\psi(z)\cdot\{z+\psi(z+1)\}=\frac{a\cdot\varphi(z+1)}{z\cdot\varphi(z)}\cdot\left\{z+\frac{a\cdot\varphi(z+2)}{(z+1)\varphi(z+1)}\right\}$$
$$=\frac{a\cdot\varphi(z+1)}{\varphi(z)}+\frac{a\cdot\varphi(z+2)}{z(z+1)}\cdot\frac{a}{\varphi(z)}.$$

ここで,右辺の第二項に対して式(2b)を用いると,

$$\text{右辺}=\frac{a\cdot\varphi(z+1)}{\varphi(z)}+\{\varphi(z)-\varphi(z+1)\}\cdot\frac{a}{\varphi(z)}$$
$$=\frac{a\cdot\varphi(z+1)}{\varphi(z)}+a-\frac{a\cdot\varphi(z+1)}{\varphi(z)}.$$

したがって,式(4b)が成り立つ.式(4b)より連分数の形を得ることができる.すなわち,

(5b)
$$\psi(z)=\frac{a}{z+\psi(z+1)}=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\psi(z+2)}}=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\psi(z+3)}}}$$
$$\vdots$$

となる.以上のことを用いて,tan の連分数展開を考える.

関数(1b)に対して,$a=\frac{x^2}{4}$, $z=\frac{1}{2}$とする.

(6b)
$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cosh x.$$

また,関数(1b)に対して,$a=\frac{x^2}{4}$, $z=\frac{3}{2}$とする.

(7b)
$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}+n-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sinh x.$$

次に関数(3b)に対して,$a=\frac{x^2}{4}$, $z=\frac{1}{2}$を代入すると,

(8b)
$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{x^2}{4}\cdot\varphi\left(\frac{3}{2}\right)}{z\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{x}{2}\cdot\frac{x\cdot\varphi\left(\frac{3}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}$$

が得られる．式(8b)の右辺の分母，分子に対して，式(6b)と式(7b)を代入すると，

(9b)
$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{2}\cdot\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

となる．式(9b)の右辺について，$x\to ix$ の置き換えると，

$$\frac{ix}{2}\cdot\frac{e^{ix}-e^{ix}}{e^{ix}+e^{ix}}=-\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{ix}-e^{ix}}{2i}\cdot\frac{2}{e^{ix}+e^{ix}}=-\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

が得られるので，よって，

(10b)
$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{x}{2}\tan x.$$

一方，関数(3b)は式(4b)を満たすので，式(4b)に対しても $a=\frac{x^2}{4}$，　$z=\frac{1}{2}$ を代入すると，

(11b)
$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\cfrac{-\cfrac{x^2}{4}}{\cfrac{1}{2}+\psi\left(\cfrac{3}{2}\right)}=\cfrac{-\cfrac{x^2}{4}}{\cfrac{1}{2}+\cfrac{-\cfrac{x^2}{4}}{\cfrac{3}{2}+\psi\left(\cfrac{5}{2}\right)}}=\cfrac{-x^2/4}{\cfrac{1}{2}+\cfrac{-x^2/4}{\cfrac{3}{2}+\cfrac{-x^2/4}{\cfrac{5}{2}+\cfrac{-x^2/4}{\cfrac{7}{2}+\cdots}}}}$$

が得られる．式(11b)について $-\frac{x}{2}$ を前に出して整理をすると，

(12b)
$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{x}{2}\cdot\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}}$$

となる．したがって，式(10b)と式(12b)より，

$$-\frac{x}{2}\cdot\tan x=-\frac{x}{2}\cdot\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}}$$

つまり，

$$\tan x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}}$$

が得られる．□

iii. 参考文献

〔1〕E.ハイラー(E.Hairer)/G.ワナー(G.Wanner)著（蟹江　幸博　訳）, 解析教程(上),
シュプリンガー・フェアラーク東京(1997).
〔2〕E.ハイラー(E.Hairer)/G.ワナー(G.Wanner)著（蟹江　幸博　訳）, 解析教程(下),
シュプリンガー・フェアラーク東京(1997).
〔3〕高木　貞治, 初等整数論講義　第2版, 共立出版(1971).
〔4〕砂田　利一, 幾何入門, 日本放送出版協会(2004).
〔5〕日本数学会編, 岩波　数学辞典　第3版, 岩波書店(1985).
〔6〕中村　幸男, 代数概論, 講義ノート・演習プリント(2003).
〔7〕砂田　利一, 幾何学Ⅰ/幾何学演習Ⅰ, 講義ノート・演習プリント(2004).

第Ⅱ部　　連分数展開のプログラム

1. イントロ

私は今回, 第Ⅰ部で証明されたことを用いて, 次の3つのことを目標にした.

<目標1>
有理数･無理数などをユークリッドの互除法を用いて連分数に展開するプログラムを作ること.

<目標2>
二次方程式の実数根を連分数に展開した際, その単純連分数の部分商 q_i が循環することをプログラムによって確認すること.

<目標3>
様々な実数とその近似分数の誤差をプログラムで求め, 誤差の対数グラフを書き, 収束の速さを比較する.

2. 連分数展開

ⅰ:連分数について

一般的な連分数は

$$q_0+\cfrac{p_1}{q_1+\cfrac{p_2}{q_2+\cfrac{p_3}{q_3+\cdots}}}$$

の形である．この連分数を第Ⅱ部では

$$q_0+\frac{p_1}{q_1}\,{}_{+}\,\frac{p_2}{q_2}\,{}_{+}\,\frac{p_3}{q_3}\,{}_{+}\,\frac{p_4}{q_4}\,{}_{+}\,\cdots$$

の形で表すことにする．

注:多くの本で，与えられた実数はユークリッドの互除法で，連分数に展開されていることを示し，そのようにして得られる連分数を正則連分数と呼んでいる．
また，本によっては，

$$p_i=1 \quad (i\geq 1)$$

である連分数を正則連分数と呼んでいる．
しかし，「正則連分数への展開は一意的」という定理を述べるには問題がある．単に

$$p_i=1 \quad (i\geq 1)$$

とするだけでは一意性の反例がある．
岩波数学辞典第3版では，「有限または無限連分数で，特に p_i $(i=1,2,3,\cdots)$ がすべて 1 に等しく，かつ，q_0 が有理整数，q_i $(i=1,2,3,\cdots)$ がすべて正の有理整数であるものを単純連分数」と呼んでいる．

連分数を第 k 番目で打ち切った

$$q_0+\frac{p_1}{q_1}\,{}_{+}\,\frac{p_2}{q_2}\,{}_{+}\,\frac{p_3}{q_3}\,{}_{+}\,\frac{p_4}{q_4}\,{}_{+}\cdots{}_{+}\,\frac{p_k}{q_k}$$

をその連分数の k 次の近似分数という．
また，

$$p_i=1 \quad (i\geq 1), \quad q_i>0$$

の条件を満たす連分数を単純連分数という．連分数の式の形は，

$$q_0+\frac{1}{q_1}\,{}_{+}\,\frac{1}{q_2}\,{}_{+}\,\frac{1}{q_3}\,{}_{+}\,\frac{1}{q_4}\,{}_{+}\,\frac{1}{q_5}\,{}_{+}\cdots$$

である．
与えられた有理数はユークリッドの互除法と同様の方法で単純連分数に展開できる．

ⅱ．ユークリッドの互除法

ユークリッドの互除法とは，割り算を繰り返すことにより最大公約数をもとめる方法である．

その方法は，$a > b$ とし，次のように割り算を繰り返す．$(q_i, r_i \in Z)$

$$
\begin{aligned}
a &= q_0 * b + r_0 \quad (0 < r_0 < b) \\
b &= q_1 * r_0 + r_1 \quad (0 < r_1 < r_0) \\
r_0 &= q_2 * r_1 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1) \\
&\ \vdots \\
r_{i-2} &= q_i * r_{i-1} + r_i \quad (r_i < r_{i-1})
\end{aligned}
$$

そして，このプロセスを余り $r_i = 0$ まで続ける．

$$b > r_0 > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots \geq 0$$

であるから，$r_{k+1} = 0$ となる k が存在する．

すなわち，

$$
\begin{aligned}
r_{k-2} &= q_k * r_{k-1} + r_k \quad (0 < r_{k-1} < r_k) \\
r_{k-1} &= q_{k+1} * r_k
\end{aligned}
$$

となる．この時，r_k が $\gcd(a,b)$ である．

このユークリッドの互除法を用いて 2 つの整数の最大公約数を計算するプログラムを次のように作った．

＜プログラム①＞：ユークリッドの互除法

```
1 PRINT "＜2つの正の整数の最大公約数をユークリッドの互除法で求める＞"
 2 INPUT PROMPT "正の整数を2つ入力してください":a,b
 3 PRINT "a=";a,"b=";b
 4 PRINT "(";a;",";b;")の最大公約数を求める"
 5 DO
 6      LET r=MOD(a,b)
 7      IF r=0 THEN EXIT DO
 8      LET a=b
 9      LET b=r
10 LOOP
11 PRINT "最大公約数は";b;"である"
12 END
```

～プログラムの説明～

a, b を2つの正整数とする．

r_{i-1} を r_i で割った商を q_{i+1}，余りを r_{i+1} とする．$(q_j, r_j \in Z)$

$$
\begin{aligned}
&r_{-1} = a, \quad r_0 = b \\
&r_{i-1} = r_i * q_{i+1} + r_{i+1} \quad (0 \leq r_i < r_{i+1},\ i = 1,2,\cdots).
\end{aligned}
$$

この漸化式を用いて

$$r_{i+1} = 0$$

となるまで計算する.

$r_{i+1} = 0$ となった時の r_i が a と b の最大公約数である.

もし，$r_0 = 0$ ならば，最大公約数は b である.

例：2 つの正の整数を 24 と 105 した時の実行結果は次である.

```
＜2つの正の整数の最大公約数をユークリッドの互除法で求める＞
正の整数を2つ入力してください24,105
a= 24                              b= 105
( 24 , 105 )の最大公約数を求める
最大公約数は  3  である
```

～実行結果について～

$a = 24, b = 105$．漸化式より，

$(n = 0)$,　$105 = 24*4 + 9$

$(n = 1)$,　$24 = 9*2 + 6$

$(n = 2)$,　$9 = 6*1 + 3$

$(n = 3)$,　$6 = 3*2 + 0$　.

$r_3 = 0$ であり，この時の $r_2 = 3$ が 24 と 105 の最大公約数である.

iii. 有理数の連分数展開

有理数 $\frac{a}{b}(a, b \in Z)$ を単純連分数に展開するには次のように計算できる.

$r_{-1} = a, r_0 = b$ と置き，$i = 1,2\cdots$ の順に r_{i-1} を r_i で割った q_{i+1}，余りを r_{i+1} と置く.

$$r_{i-1} = r_i * q_{i+1} + r_{i+1} \quad (i = 1,2\cdots)$$

この漸化式で余り $r_{i+1} = 0$ になるまで，計算を繰り返す.

この漸化式を用いて有理数を単純連分数に展開する部分商を求めるプログラムを以下のように作る.

＜プログラム②＞：有理数の連分数展開

```
1 PRINT "＜与えられた有理数a/b(a,bは整数)を単純連分数展開する部分商qを求める＞"
2 PRINT "(有理数a/bを入力する場合は「a,b」と入力してください)"
3 INPUT PROMPT "  整数を2つ入力してください":a,b
4 PRINT "a=";a, "b=";b
5 PRINT "有理数";a;"/";b;"を単純連分数に展開するqは"
6 DO
```

```
7       PRINT "q=";INT(a/b)
8       LET r=MOD(a,b)
9       IF r=0 THEN EXIT DO
10        LET a=b
11        LET b=r
12 LOOP
13 END
```

～プログラムの説明～

$$a, b \in Z\ ,\ \ c = \frac{a}{b}$$

とする.

$$q_1 = \lfloor c \rfloor$$

と置く.（ただし, $\lfloor c \rfloor$ は c を超えない最大の整数とする）.

この時, r_{i+1} を次の漸化式で定める $(q_j, r_j \in Z)$.

$$r_{-1} = a,\ r_0 = b \text{と置く.}$$
$$r_{i-1} = r_i * q_{i+1} + r_{i+1} \quad (i = 1,2,\cdots)$$

この漸化式を用いて

$$r_{k+1} = 0 \quad (1 \le k \le i)$$

となるまで計算する.

よって,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 +}\frac{1}{q_2 +}\frac{1}{q_3 +}\cdots\frac{1}{+ q_k}$$

の単純連分数に展開できる.

例：有理数 $\dfrac{2133}{1213}$ での実行結果は以下である.

```
＜与えられた有理数a/b(a,bは整数)を単純連分数展開する部分商qを求める＞
(有理数a/bを入力する場合は「a,b」と入力してください)
 整数を2つ入力してください2133,1213
a= 2133                    b= 1213
有理数 2133 / 1213 を単純連分数に展開するqは
q= 1
q= 1
q= 3
```

```
q= 7
q= 6
q= 1
q= 5
```

～実行結果について～

$a = 2133, b = 1213$ より,

$(i = 0), \quad 2133 = 1213 * 1 + 920.$

$(i = 1), \quad 1213 = 920 * 1 + 293.$

$(i = 2), \quad 920 = 293 * 3 + 41$

$(i = 3), \quad 293 = 41 * 7 + 6$

$(i = 4), \quad 41 = 6 * 6 + 5$

$(i = 5), \quad 6 = 5 * 1 + 1$

$(i = 6), \quad 5 = 1 * 5 + 0$

よって $\dfrac{2133}{1213}$ を単純連分数に展開すると,

$$\frac{2133}{1213} = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5}$$

である.

iv. 無理数の連分数展開

①:平方根の連分数展開

平方根 $\sqrt{x}(x \in N)$ を単純連分数に展開するには「整数部分を引き, 逆数をとる」手順を繰りかえす.

無理数もユークリッドの互除法で無限単純連分数に展開できる. ②で二次無理数について扱うが, 平方根 $\sqrt{x}$ (x は平方数でない) も二次無理数に属する.

＜プログラム③＞:平方根の連分数展開

```
1 !実行の際, qiは止まらずに走り続ける.
2 PRINT "＜平方根√xを単純連分数展開する部分商qを求める＞"
3 INPUT PROMPT "正の整数を入力してください":x
4 PRINT "平方根√";x;"を単純連分数展開する部分商"
5 LET q=INT(SQR(x))
6 PRINT "q=";q
7 LET p=SQR(x)-q
8 DO
```

```
9       LET a=1/p
10       LET q=INT(a)
11       PRINT "q=";q
12       LET p=a-q
13 LOOP
14 END
```

～プログラムの説明～（便宜上a, p, qに番号をつける）

$$x \in N\ ,\ \ q_0 = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

とする．（ただし，$\lfloor \sqrt{x} \rfloor$は$\sqrt{x}$を超えない最大の整数とする）．

$$p_0 = \sqrt{x} - q_0$$

とおく．以下の漸化式によって，a, p, qを定める．

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{1}{p_{i-1}} \\ q_i = \lfloor a_i \rfloor \qquad , \quad (i = 1,2,3,\cdots) \\ p_i = a_i - q_i \end{cases}$$

よって，$\sqrt{x}$を単純連分数の式で表すと，

$$q_0 + \frac{1}{q_1 +}\frac{1}{q_2 +}\frac{1}{q_3 +}\cdots$$

である．しかし，このプログラム③は実行者が中断するまで，走り続ける．

例：$x = 3$での実行結果は以下である．

```
＜平方根√xを単純連分数展開する部分商qを求める＞
正の整数を入力してください3
平方根√ 3 を単純連分数展開する部分商
q= 1
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
```

```
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
```

～実行結果の説明～（*便宜上 a, p, q に番号をつける）

$$x = 3$$

$$q_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$$

$$p_0 = \sqrt{3} - 1$$

漸化式より，

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad 1.36602540378444$$

$$q_1 = \lfloor a_1 \rfloor = 1$$

$$p_1 = a_1 - q_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad 0.36602540378444 \neq 0$$

12 行目に戻る．

$$a_2 = \frac{1}{p_1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \quad 2.73205080756887$$

$$q_2 = \lfloor a_2 \rfloor = 2$$

$$p_2 = a_2 - q_2 = (\sqrt{3}+1) - 2 = \sqrt{3} - 1 \quad 0.73205080756887 .$$

12 行目に戻る．以下，

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & (i\text{は奇数}) \\ \sqrt{3}+1 & (i\text{は偶数}) \end{cases}, \quad q_i = \begin{cases} 1 & (i\text{は奇数}) \\ 2 & (i\text{は偶数}) \end{cases}, \quad p_i = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} & (i\text{は奇数}) \\ \sqrt{3}-1 & (i\text{は偶数}) \end{cases}$$

で求められる．よって q は

$$1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,\cdots$$

と 1 と 2 が規則的に並ぶことになる．

以上より，$\sqrt{3}$ を無限単純連分数に展開すると，

$$1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots$$

である.

先にも述べたが，平方根$\sqrt{x}$をユークリッドの互除法で展開すると，実行者が中断するまで走り続ける．なぜならば，ユークリッドの互除法は$r_j=0$を満たすjまで計算するものであるが，無理数では$r_j=0$を満たすjは存在しないためプログラムが止まることが無い．そこで DO～LOOP を FOR～NEXT に替え，部分商 q を 20 個求めるまで計算し，プログラムを終了するように変更する．平方根$\sqrt{x}$の 20 次の近似分数を求めるプログラムに書き換える．

＜プログラム④＞：平方根の連分数展開．部分商を 20 個求める．

```
1 PRINT "＜平方根√xを単純連分数展開する部分商qを20個求める＞"
2 INPUT PROMPT "正の整数を入力してください":x
3 PRINT "平方根√";x;"を単純連分数展開する部分商"
4 LET q=INT(SQR(x))
5 PRINT "q=";q
6 LET p=SQR(x)-q
7 FOR i=1 TO 20
8      LET a=1/p
9      LET q=INT(a)
10      PRINT "q=";q
11      LET p=a-q
12 NEXT i
13 END
```

～プログラムの説明～

プログラムとしての計算方法はプログラム③とまったく同じであり，FOR～NEXT にしたことで 7 行目から 12 行目を20 回繰り返し計算するように書き換えたものである．

よって，$x=3$での実行結果は以下のように q を 30 個求め表示したものである．

```
＜平方根√xを単純連分数展開する部分商qを20個求める＞
正の整数を入力してください3
平方根√  3 を単純連分数展開する部分商
q= 1
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
q= 1
q= 2
```

次に，プログラム④では常に 20 次の近似分数を求めることになるため，何次までの近似分数を求めるかを実行者が指定できるように配列を用いたプログラムを以下のように作る．

＜プログラム⑤＞：平方根の連分数展開．配列を用いる．

```
1 PRINT "＜平方根√xを単純連分数展開する部分商qを求める＞"
2 INPUT PROMPT "  √xの正整数xを入力してください  ":x
3 PRINT "平方根√";x;"を単純連分数に展開する"
4 INPUT PROMPT " n次までの近似分数の部分商を求める  ":n
5 OPTION BASE 0
6 DIM q(n),p(n),a(n)
7 LET a(0)=0
8 LET q(0)=INT(SQR(x))
```

```
9 PRINT "q( 0 )=";q(0)
10 LET p(0)=SQR(x)-q(0)
11 IF p(0)=0 THEN STOP
12 FOR i=1 TO n
13      LET a(i)=1/p(i-1)
14      LET q(i)=INT(a(i))
15      PRINT "q(";i;")=";q(i)
16      LET p(i)=a(i)-q(i)
17      IF p(i)=0 THEN EXIT FOR
18 NEXT i
19 END
```

～プログラムの説明～

$$x \in N\ .\ \ q(n), p(n), a(n)$$

を以下の漸化式によって求める.（$\lfloor \sqrt{x} \rfloor$は$\sqrt{x}$を超えない最大の整数とする）.

$$\begin{cases} a(n) = \dfrac{1}{p(n-1)}, \\ q(n) = \lfloor a(n) \rfloor, \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \\ p(n) = a(n) - q(n), \end{cases}$$

（ただし，$a(0) = 0,\quad q(0) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor,\quad p(0) = \sqrt{x} - q(0),$とする）．

よって，$\lfloor \sqrt{x} \rfloor$のn次の近似分数は,

$$q_0 + \frac{1}{q_1 +} \frac{1}{q_2 +} \frac{1}{q_3 +} \frac{1}{q_4 +} \frac{1}{q_5 +} \cdots \frac{1}{+ q_n}$$

である.

例：$x = 3, n = 10$の実行結果.

```
＜平方根√xを単純連分数展開する部分商qを求める＞
 √xの正整数xを入力してください 3
平方根√ 3 を単純連分数に展開する
 n次までの近似分数の部分商を求める 10
q( 0 )= 1
q( 1 )= 1
q( 2 )= 2
```

```
q( 3 )= 1
q( 4 )= 2
q( 5 )= 1
q( 6 )= 2
q( 7 )= 1
q( 8 )= 2
q( 9 )= 1
q( 10 )= 2
```

～実行結果の説明～

$$x = 3,\ \ n = 10$$

$$q_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$$

$$p(0) = \sqrt{3} - 1 \neq 0$$

$i = 1$の時,

$$a(1) = \frac{1}{p(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$q(1) = \lfloor a(1) \rfloor = 1$$

$$p(1) = a(1) - q(1) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \neq 0$$

$i = 2$の時,

$$a(2) = \frac{1}{p(1)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$

$$q(2) = \lfloor a(2) \rfloor = 2$$

$$p(2) = a(2) - q(2) = (\sqrt{3}+1) - 2 = \sqrt{3} - 1 \neq 0$$

つまり, $1 \leq i \leq 10$では

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & (i\text{は奇数}) \\ \sqrt{3}+1 & (i\text{は偶数}) \end{cases},\ \ q_i = \begin{cases} 1 & (i\text{は奇数}) \\ 2 & (i\text{は偶数}) \end{cases},\ \ p_i = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} & (i\text{は奇数}) \\ \sqrt{3}-1 & (i\text{は偶数}) \end{cases}$$

である. よって, $1 \leq i \leq 10$の時,

$$q(1) = 1, q(2) = 2, q(3) = 1, q(4) = 2, q(5) = 1,$$
$$q(6) = 2, q(7) = 1, q(8) = 2, q(9) = 1, q(10) = 2$$

である.

故に$\sqrt{3}$の１０次の近似分数は,

$$1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$$

である.

②:二次無理数の連分数展開

二次方程式 $ax^2+bx+c=0, \quad (a,b,c\in Z)$ …① の根である実数の二次無理数を連分数に展開する. 展開した連分数が循環連分数になることを, プログラムで確認する.

ただし, a,b,c の値によっては, $\sqrt{D}=a\sqrt{D'} \quad (D=a^2D')$ となり, 分母と分子での約分等も考えられる.

しかし, 以下のプログラムは, ①の実数根 x1,x2 の二次無理数を単純連分数に展開したときに部分商が循環するかどうかを確認するのが目的であるため, ①の方程式を二次方程式の解の公式 $\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ を用いて解き, 約分等をしないままで単純連分数に展開する.

＜プログラム⑥＞:二次無理数の連分数展開.

```
1 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
2 PRINT "二次無理数の連分数展開"
3 PRINT "a*x^2+b*x+c=0の解を求めるプログラム"
4 PRINT "この時の(b^2-4ac)の値を判別式Dとする"
5 INPUT PROMPT "係数を入力してください":a,b,c
6 PRINT "";a;"x^2+(";b;")x+(";c;")=0の解x1,x2を求める"
7 PRINT "この二次方程式の判別式Dの値は"
8 LET D=b^2-4*a*c
9 PRINT "D=";D
10 IF D<=0 THEN
11      PRINT "この方程式は実数を解にもたない"
12      STOP
13 ELSE
14      LET x1=(-1*b+SQR(D))/(2*a)
15      LET x2=(-1*b-SQR(D))/(2*a)
16      LET a1=2*a
17      PRINT "よってこの二次方程式の解x1,x2は"
18      PRINT "x1=";"(";-b;"+√";D;")/";a1;""
19      PRINT "x2=";"(";-b;"-√";D;")/";a1;""
20 END IF
21 PRINT ""
```

```
22 PRINT "二次無理数x1を連分数に展開する"
23 PRINT " n次の近似分数に展開する部分商qを求める. "
24 INPUT PROMPT "nを入力してください  ":n
25
26 OPTION BASE 0
27 DIM p(n),q(n),r(n)
28 LET r(0)=x1
29 LET q(0)=INT(r(0))
30 PRINT "q( 0 )=";q(0)
31 LET p(0)=x1-q(0)
32 IF p(0)=0 THEN STOP
33 FOR i=1 TO n
34      LET r(i)=1/p(i-1)
35      LET q(i)=INT(r(i))
36      PRINT "q(";i;")=";q(i)
37      LET p(i)=r(i)-q(i)
38      IF p(i)=0 THEN EXIT FOR
39      FOR h=0 TO i-1
40          IF ABS(r(h)-r(i))<1/10^(700) THEN
41              PRINT "二次無理数x1の連分数は循環する. "
42              PRINT "この時";h;"次から";i-1;"次の部分商が循環する"
43              STOP
44          END IF
45      NEXT h
46 NEXT i
47 END
```

～プログラムの説明～

$$a,b,c \in Z\ ,\ \ ax^2+bx+c=0 \cdots ①$$
$$D=b^2-4ac$$

と置く.

Ⅰ：$D \leq 0$ の時.

方程式①は実数の二次無理数を解にもたない.

Ⅱ：$D>0$ の時.

①の解 $x1,\ x2$ は,

$$x1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

上記で求めた $x1$ を連分数に展開する.

$q(n), p(n), r(n)$ を以下の漸化式によって定める.（$\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ は $\sqrt{x}$ を超えない最大の整数とする）.

$$\begin{cases} r(i) = \dfrac{1}{p(i-1)}, \\ q(i) = \lfloor r(i) \rfloor, & (i = 1,2,3,\cdots) \\ p(i) = r(i) - q(i), \end{cases}$$

（ただし，$r(0) = x1, \quad q(0) = \lfloor r(0) \rfloor, \quad p(0) = x1 - q(0),$ とする）.

$r(i)(0 \le h \le i \le n)$ が，$r(h)(0 \le h \le i-1)$ のうちのどれかと，

$$|r(h) - r(i)| < \frac{1}{10^{700}} \cdots ②$$

を満たすところまで計算を繰り返す.

この時の h 次から $i-1$ 次の部分商が循環することになる.

ここで，②の式は，$r(i)(0 \le h \le i \le n)$ が，$r(h)(0 \le h \le i-1)$ のうちのどれかと，

$$|r(h) - r(i)| = 0$$

を満たすところまで計算するとしたいが，$\sqrt{x}$ を少数で1000 桁モードで計算しても，1000 桁の末桁で誤差が生じ，

$$|r(h) - r(i)| = 0$$

とはならない．そのため 0 に近い値，

$$|r(h) - r(i)| < \frac{1}{10^{700}}$$

の不等式で判断している.

例：$a = 1, b = -7, c = -6, n = 20$ での実行結果.

```
二次無理数の連分数展開
a*x^2+b*x+c=0の解を求めるプログラム
この時の(b^2-4ac)の値を判別式Dとする
係数を入力してください1,-7,-6
 1 x^2+(-7 )x+(-6 )=0の解x1,x2を求める
この二次方程式の判別式Dの値は
D= 73
よってこの二次方程式の解x1,x2は
x1=( 7 +√  73 )/ 2
```

```
x2=( 7 -√ 73 )/ 2

二次無理数x1を連分数に展開する
 n次の近似分数に展開する部分商qを求める.
nを入力してください 20
q( 0 )= 7
q( 1 )= 1
q( 2 )= 3
q( 3 )= 2
q( 4 )= 1
q( 5 )= 1
q( 6 )= 2
q( 7 )= 3
q( 8 )= 1
q( 9 )= 7
二次無理数x1の連分数は循環する.
この時 0 次から 8 次の部分商が循環する
```

～実行結果の説明～

$$a = 1, b = -7, c = -6.$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 73$$

よって解 $x1, x2$ は,

$$x1 = \frac{7+\sqrt{73}}{2},$$

$$x2 = \frac{7-\sqrt{73}}{2},$$

である.

$x1$ を連分数に展開する. $n = 20$ とする.

$$\sqrt{73} \quad 8.54400374531753$$

以下の漸化式によって $q(n)$ を求める.

$$\begin{cases} r(i) = \dfrac{1}{p(i-1)}, \\ q(i) = \lfloor r(i) \rfloor, \qquad (i = 1,2,3,\cdots) \\ p(i) = r(i) - q(i), \end{cases}$$

（ただし, $r(0) = x1,\ q(0) = \lfloor r(0) \rfloor,\ p(0) = x1 - q(0)$,とする）.

この時,

$$\left|r(9)-r(0)\right| < \frac{1}{10^{700}}$$

であり,

この二次の無理数 $x1$ を連分数に展開した時, 部分商は 7,1,3,2,1,1,2,3,1 が循環する.

つまり, 連分数の形で表すと,

$$7+\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1}\quad+\quad\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1}\quad+\quad\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1}\quad+\cdots$$

である.

3. 近似分数と誤差のグラフ

無理数の近似分数は有理数であり，再帰的に

$$\begin{aligned} a(i) &= q(i)*a(i-1)+p(i)*a(i-2) \\ b(i) &= q(i)*b(i-1)+p(i)*b(i-2) \end{aligned} \quad (i=1,2,3,\cdots)$$

と定める時，近似分数 $c(i)$ は

$$c(i)=\frac{a(i)}{b(i)}$$

とかける．ただし，初期値は

$$\begin{aligned} &a(-1)=1, \quad a(0)=q(0), \\ &b(-1)=0, \quad b(0)=1, \end{aligned}$$

とする．特に，$p_i, q_i \in Z, (j \in N \cup \{0\})$ である時，$\{a(k)\},\{b(k)\}$ は整数列である．

グラフを書くにあたり，まず，上記の漸化式で求めた近似分数と元の実数との誤差の絶対値を求める．
近似分数の作る数列は元の実数に収束するため，誤差の絶対値は0に近づく．そのため，解り易いグラフを書くために，常用対数をとる．
また，iii･iv･ｖ･viでは，収束の早さを比較しやすいよう同じ座標上に載せるため，(仮称) 十進BASICで求めた結果を EXCEL で処理し，グラフを書いた．
iii･iv･ｖのグラフを書く上で用いた (仮称) 十進 BASIC のプログラムは，付録で紹介する．

ｉ：平方根

この漸化式を用いて，近似分数の作る数列と元の平方根の誤差のグラフを書き，近似分数の作る数列が元の平方根に収束していることをプログラムで確認する．誤差を表す z(i)の常用対数をとることで，誤差が何桁めからであるかがわかる．グラフは横軸にｎ次の近似分数のｎ，縦軸には誤差の常用対数をとった値をとる．

＜プログラム⑦＞

```
1 DECLARE EXTERNAL FUNCTION mylog
2 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
3 PRINT "「平方根√xを連分数に展開する部分商を求め,求めた近似分数と√xとの差を求める」"
4 INPUT PROMPT "平方根√xの正の整数xを入力してください":x
5 INPUT PROMPT "第n次までの部分商を求める。求めたいnを入力してください":n
6 OPTION BASE 0
7 DIM p(n),q(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
8
9 PRINT "部分商を求める"
```

```
10 LET q(0)=INT(SQR(x))
11 PRINT "q( 0 )=";q(0)
12 LET p(0)=SQR(x)-q(0)
13 IF p(0)=0 THEN STOP
14 FOR i=1 TO n
15      LET r(i)=1/p(i-1)
16      LET q(i)=INT(r(i))
17      PRINT "q(";i;")=";q(i)
18      LET p(i)=r(i)-q(i)
19 NEXT i
20
21 PRINT " "
22 PRINT "n次の近似分数を求める"
23 LET a(0)=q(0)
24 LET b(0)=1
25 LET c(0)=a(0)/b(0)
26 PRINT USING "-%.####################":c(0)
27 LET a(1)=q(0)*q(1)+1
28 LET b(1)=q(1)
29 LET c(1)=a(1)/b(1)
30 PRINT USING "-%.####################":c(1)
31 FOR i=2 TO n
32      LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
33      LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
34      LET c(i)=a(i)/b(i)
35      PRINT USING "-%.####################":c(i)
36 NEXT i
37
38 PRINT " "
39 PRINT "誤差の値を求め，誤差の桁数を求める"
40 FOR i=0 TO n
41      LET z(i)=SQR(x)-c(i)
42      PRINT USING "-%%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
43 NEXT i
44
45 !グラフを書く
```

```
DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
SET WINDOW -10,30,-30,10
DRAW grid
FOR i=0 TO n
      PLOT LINES : i,f(i);
NEXT i
END

!外部関数定義
EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
FOR i=1 TO 54
      LET a=SQR(a)
      LET b=SQR(b)
NEXT i
LET mylog= (b-1)/(a-1)
END FUNCTION
```

～プログラムの説明～

まずプログラム⑤と同様にして，部分商 q を求めた．

次に $\sqrt{x}$ と近似分数との誤差を求める．

$a(i), b(i)$ を

$$\begin{aligned} a(i) &= q(i) * a(i-1) + a(i-2) \\ b(i) &= q(i) * b(i-1) + b(i-2) \end{aligned} \qquad (i = 0,1,2,\cdots)$$

（ただし，$a(0) = q(0),\quad b(0) = 1,\quad a(1) = q(0) * q(1) + 1,\quad b(1) = q(1)$）

で定め，近似分数 $c(i)$ は

$$c(i) = \frac{a(i)}{b(i)}$$

で求まる．ここで，実行結果は小数第１５位までを表示するようにする．

誤差 $z(i)$ を

$$z(i) = \sqrt{x} - c(i) \quad (i = 0,1,2,\cdots,n)$$

と置く．ここで，実行結果は小数第１５位までを表示するようにする．

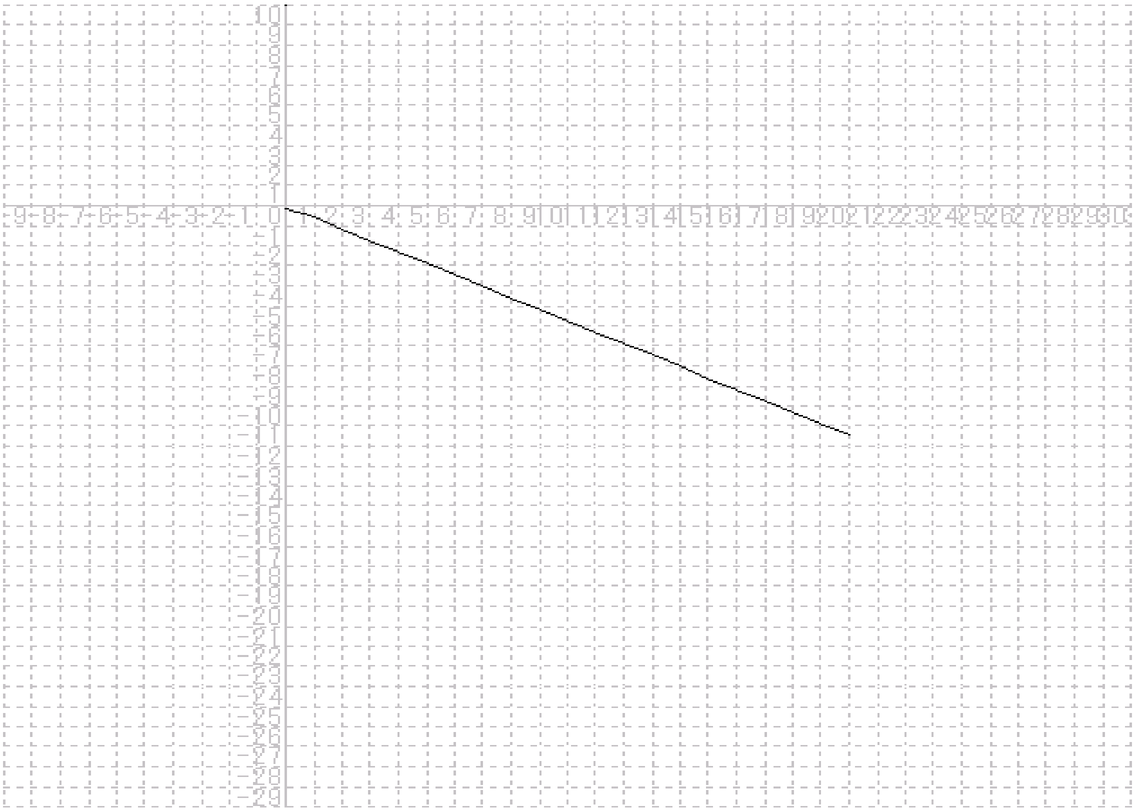
$$\begin{cases} x = i \\ y = \log_{10}(|z(i)|) \end{cases}$$

とし，グラフを書く．

例: $x = 3,\quad n = 20$ での実行結果は以下である.（表示が長いため二行にした.）

「平方根√xを連分数に展開する部分商を求	1.73202614379084967320
め,求めた近似分数と√xとの差を求める」	1.73205741626794258373
平方根√xの正の整数xを入力してください3	1.73204903677758318739
第n次までの部分商を求める。求めたいnを入	1.73205128205128205128
力してください20	1.73205068043172219615
部分商を求める	1.73205084163517691515
q(0)= 1	1.73205079844083993462
q(1)= 1	1.73205081001472754050
q(2)= 2	1.73205080691351369563
q(3)= 1	1.73205080774448144037
q(4)= 2	1.73205080752182430420
q(5)= 1	1.73205080758148510402
q(6)= 2	1.73205080756549904089
q(7)= 1	
q(8)= 2	誤差の値を求め, 誤差の桁数を求める
q(9)= 1	-00.1354587759
q(10)= 2	-00.5719475475
q(11)= 1	-01.1845275782
q(12)= 2	-01.7459550864
q(13)= 1	-02.3207465562
q(14)= 2	-02.8919339017
q(15)= 1	-03.4640852753
q(16)= 2	-04.0359782171
q(17)= 1	-04.6079403969
q(18)= 2	-05.1798840238
q(19)= 1	-05.7518326218
q(20)= 2	-06.3237798879
n次の近似分数を求める	-06.8957275108
1.00000000000000000000	-07.4676750382
2.00000000000000000000	-08.0396225911
1.66666666666666666667	-08.6115701372
1.75000000000000000000	-09.1835176851
1.72727272727272727273	-09.7554652326
1.73333333333333333333	-10.3274127801
1.73170731707317073171	-10.8993603276
1.73214285714285714286	-11.4713078752

グラフは，以下のようになる．



～実行結果について～

$$x = 3,\ n = 10$$

$$q_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$$

$$p(0) = \sqrt{3} - 1 \neq 0$$

$i = 1$ の時,

$$a(1) = \frac{1}{p(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$
$$q(1) = \lfloor a(1) \rfloor = 1$$
$$p(1) = a(1) - q(1) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \neq 0$$

$i = 2$ の時,

$$a(2) = \frac{1}{p(1)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$
$$q(2) = \lfloor a(2) \rfloor = 2$$
$$p(2) = a(2) - q(2) = (\sqrt{3}+1) - 2 = \sqrt{3} - 1 \neq 0$$

つまり，$1 \le i \le 10$ では

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & (i\text{は奇数}) \\ \sqrt{3}+1 & (i\text{は偶数}) \end{cases}, \quad q_i = \begin{cases} 1 & (i\text{は奇数}) \\ 2 & (i\text{は偶数}) \end{cases}, \quad p_i = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} & (i\text{は奇数}) \\ \sqrt{3}-1 & (i\text{は偶数}) \end{cases}$$

である．よって，$1 \le i \le 10$ の時,

$$q(1)=1, q(2)=2, q(3)=1, q(4)=2, q(5)=1,$$
$$q(6)=2, q(7)=1, q(8)=2, q(9)=1, q(10)=2$$

である.

故に $\sqrt{3}$ の

0次の近似分数は，1.

1次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1}=2$

2次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{3}$

3次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1}=\dfrac{7}{4}$

4次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2}=\dfrac{19}{11}$

5次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1}=\dfrac{26}{15}$

6次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2}=\dfrac{71}{41}$

7次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1}=\dfrac{97}{56}$

8次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2}=\dfrac{265}{153}$

9次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1}=\dfrac{362}{209}$

10次の近似分数は，$1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2}=\dfrac{989}{571}$

である.

各近似分数と $\sqrt{3}$ とのそれぞれの誤差は,

$$z(0)=\sqrt{3}-1, \quad z(1)=\sqrt{3}-2, \quad z(2)=\sqrt{3}-\frac{5}{3}, \quad z(3)=\sqrt{3}-\frac{7}{4},$$

$$z(4)=\sqrt{3}-\frac{19}{11},\quad z(5)=\sqrt{3}-\frac{26}{15},\quad z(6)=\sqrt{3}-\frac{71}{41},\quad z(7)=\sqrt{3}-\frac{97}{56},$$

$$z(8)=\sqrt{3}-\frac{265}{153},\quad z(9)=\sqrt{3}-\frac{362}{209},\quad z(10)=\sqrt{3}-\frac{989}{571}$$

である.

これら誤差 $z(i),\ (i=0,1,2,\cdots 10)$ の常用対数をとった値を y 軸にとった.

グラフから読み取れることとして，誤差のグラフが右下がりのほぼ直線となっているため，高次の近似分数が $\sqrt{3}$ に近づいていることがわかる.

また,「グラフの傾きが急であればあるほど，元の実数に収束するのが速い」ということが言える.

ii：二次無理数

平方根同様に元の二次無理数とその近似分数との誤差をグラフで表し，近似分数の作る数列が元の二次無理数に収束していることをプログラムで確認する.

＜プログラム⑧＞

```
 1 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
2 PRINT "二次無理数の連分数展開"
3 PRINT "a*x^2+b*x+c=0の解を求めるプログラム"
4 PRINT "この時の(b^2-4ac)の値を判別式Dとする"
5 INPUT PROMPT "係数を入力してください":a,b,c
6 PRINT "";a;"x^2+(";b;")x+(";c;")=0の解x1,x2を求める"
7 PRINT "この二次方程式の判別式Dの値は"
8 LET D=b^2-4*a*c
9 PRINT "D=";D
10 IF D<=0 THEN
11      PRINT "この方程式は実数を解にもたない"
12      STOP
13 ELSE
14      LET x1=(-1*b+SQR(D))/(2*a)
15      LET x2=(-1*b-SQR(D))/(2*a)
16      LET a1=2*a
17      PRINT "よってこの二次方程式の解x1,x2は"
18      PRINT "x1=";"(";-b;"+√";D;")/";a1;""
19      PRINT "x2=";"(";-b;"-√";D;")/";a1;""
20 END IF
21 PRINT ""
```

```
22 PRINT "二次無理数x1を連分数に展開する"
23 PRINT " n次の近似分数に展開する部分商qを求める. "
24 INPUT PROMPT "nを入力してください ":n
25
26 OPTION BASE 0
27 DIM q(n),p(n),r(n), w(n),v(n),u(n), y(n),z(n)
28
29 PRINT "部分商を求める"
30 LET q(0)=INT(x1)
31 PRINT "q( 0 )=";q(0)
32 LET p(0)=x1-q(0)
33 IF p(0)=0 THEN STOP
34 FOR i=1 TO n
35     LET r(i)=1/p(i-1)
36     LET q(i)=INT(r(i))
37     PRINT "q(";i;")=";q(i)
38     LET p(i)=r(i)-q(i)
39 NEXT i
40
41 PRINT " "
42 PRINT "n次の近似分数を求める"
43 LET w(0)=q(0)
44 LET v(0)=1
45 LET u(0)=w(0)/v(0)
46 PRINT USING "-%%.###############^^^^^^":u(1)
47 LET w(1)=q(0)*q(1)+1
48 LET v(1)=q(1)
49 LET u(1)=w(1)/v(1)
50 PRINT USING "-%%.###############^^^^^^":u(1)
51 FOR i=2 TO n
52     LET w(i)=q(i)*w(i-1)+w(i-2)
53     LET v(i)=q(i)*v(i-1)+v(i-2)
54     LET u(i)=w(i)/v(i)
55     PRINT USING "-%%.###############^^^^^^":u(i)
56 NEXT i
57
```

```
58 PRINT ""
59 PRINT "誤差の桁数を求める"
60 FOR i=0 TO n
61      LET z(i)=x1-u(i)
62      PRINT USING "-%%.#####":myLOG(10,ABS(z(i)))
63 NEXT i
64
65 !グラフを書く
66 DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
67 SET WINDOW -10,30,-30,10
68 DRAW grid
69 FOR i=0 TO n
70      PLOT LINES : i,f(i);
71 NEXT i
72 END
73
74 !外部関数定義
75 EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
76 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
77 FOR i=1 TO 54
78      LET a=SQR(a)
79      LET b=SQR(b)
80 NEXT i
81 LET mylog= (b-1)/(a-1)
82 END FUNCTION
```

～プログラムの説明～

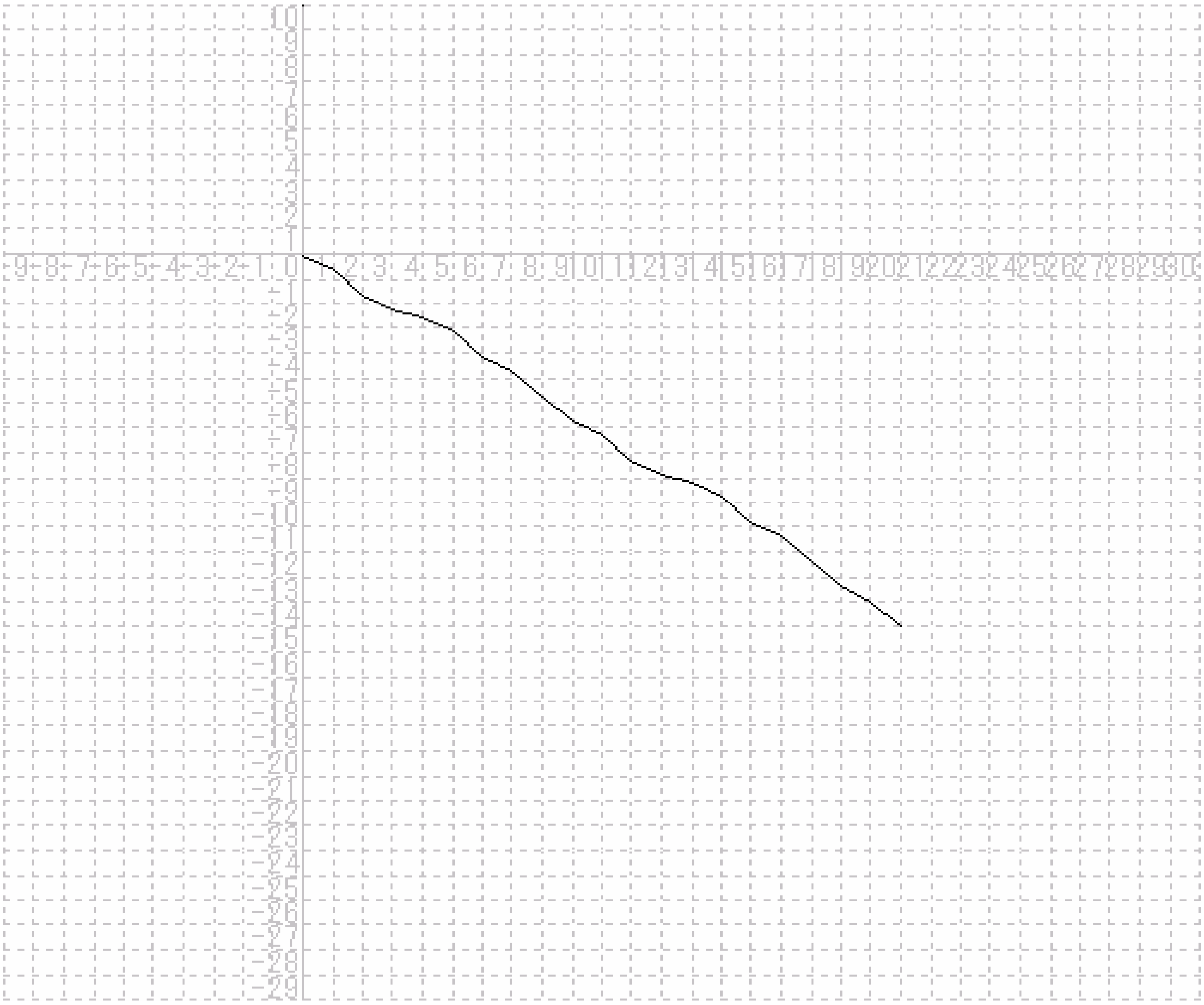
プログラムの40行目まではプログラム⑥の38行目までと同じプロセスであるため，省略する．
また，40行目からはプログラム⑦の21行目から同じプロセスであるため，省略する．

例: $a=1, b=-7, c=-6, n=20$ での実行結果.

二次無理数の連分数展開	77.777777777777778E-0001
a*x^2+b*x+c=0の解を求めるプログラム	77.692307692307692E-0001
この時の(b^2-4ac)の値を判別式Dとする	77.727272727272727E-0001
係数を入力してください1,-7,-6	77.719298245614035E-0001
1 x^2+(-7)x+(-6)=0の解x1,x2を求める	77.720207253886010E-0001
この二次方程式の判別式Dの値は	77.720000000000000E-0001

D= 73 よってこの二次方程式の解x1,x2は x1=(7 +√ 73)/ 2 x2=(7 -√ 73)/ 2 二次無理数x1を連分数に展開する n次の近似分数に展開する部分商qを求める. nを入力してください 20 部分商を求める q(0)= 7 q(1)= 1 q(2)= 3 q(3)= 2 q(4)= 1 q(5)= 1 q(6)= 2 q(7)= 3 q(8)= 1 q(9)= 7 q(10)= 1 q(11)= 3 q(12)= 2 q(13)= 1 q(14)= 1 q(15)= 2 q(16)= 3 q(17)= 1 q(18)= 7 q(19)= 1 q(20)= 3 n次の近似分数を求める 00.000000000000000E+0000 80.000000000000000E-0001 77.500000000000000E-0001	77.720020586721565E-0001 77.720018239854081E-0001 77.720018774935461E-0001 77.720018713936685E-0001 77.720018732663280E-0001 77.720018724997872E-0001 77.720018726745571E-0001 77.720018726546335E-0001 77.720018726591760E-0001 77.720018726587248E-0001 77.720018726587763E-0001 77.720018726587645E-0001 誤差の桁数を求める -00.11238 -00.64207 -01.65754 -02.23838 -02.55735 -03.13942 -04.14238 -04.72463 -05.72754 -06.73046 -07.31271 -08.31562 -08.89788 -09.21641 -09.79866 -10.80158 -11.38383 -12.38674 -13.38966 -13.97191 -14.97483

グラフは以下のようになる.



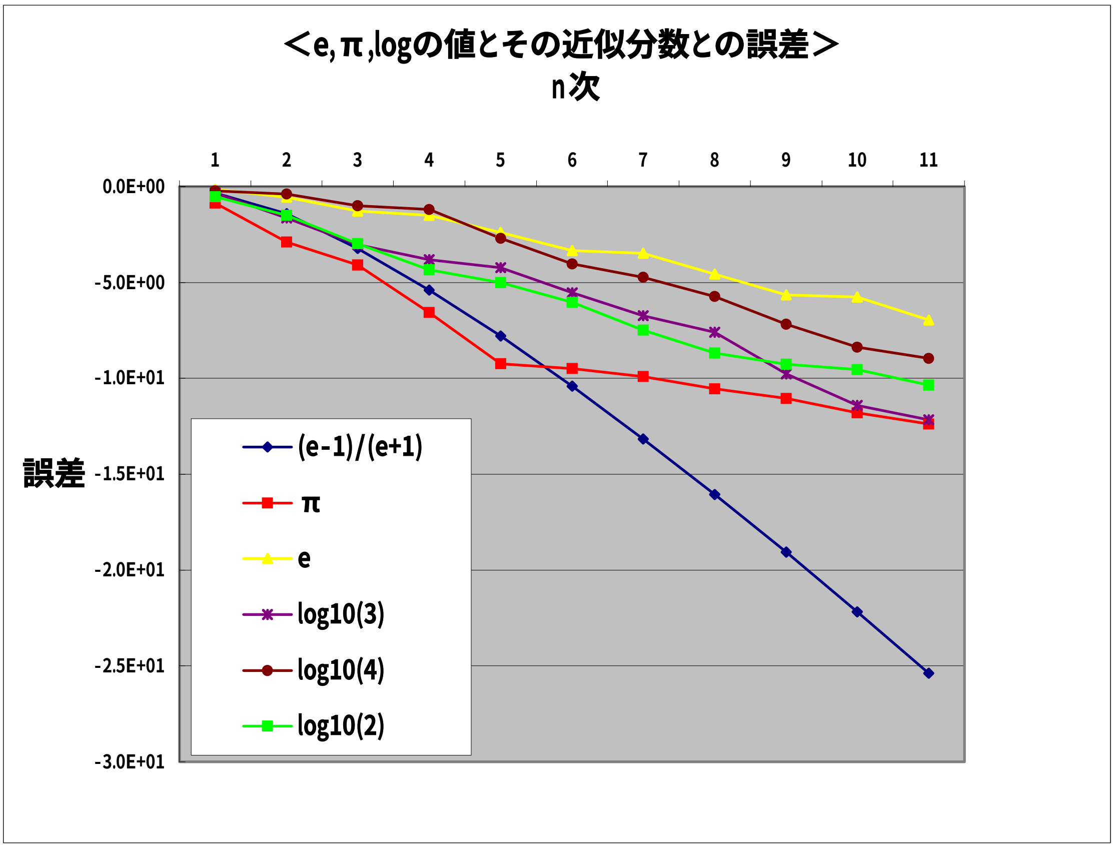
～実行結果について～

実行結果もプログラム⑤およびプログラム⑥の説明と同様である.

グラフに関して，二次無理数の場合も，$\sqrt{3}$の時と同様に直線的ではないものの，右下がりのグラフであり，

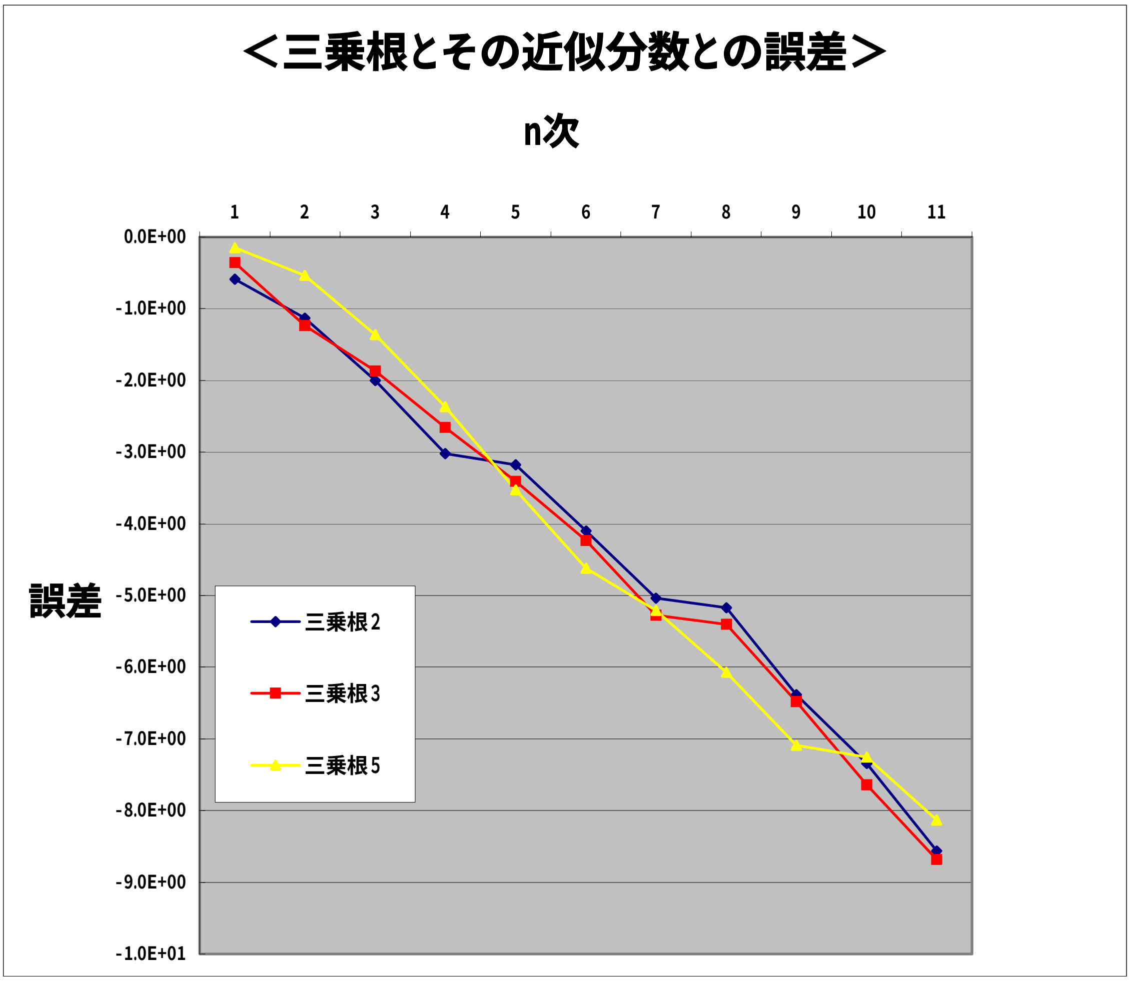
近似分数が元の二次無理数$\dfrac{7+\sqrt{73}}{2}$に収束していることがわかる.

iii. e, π ,log



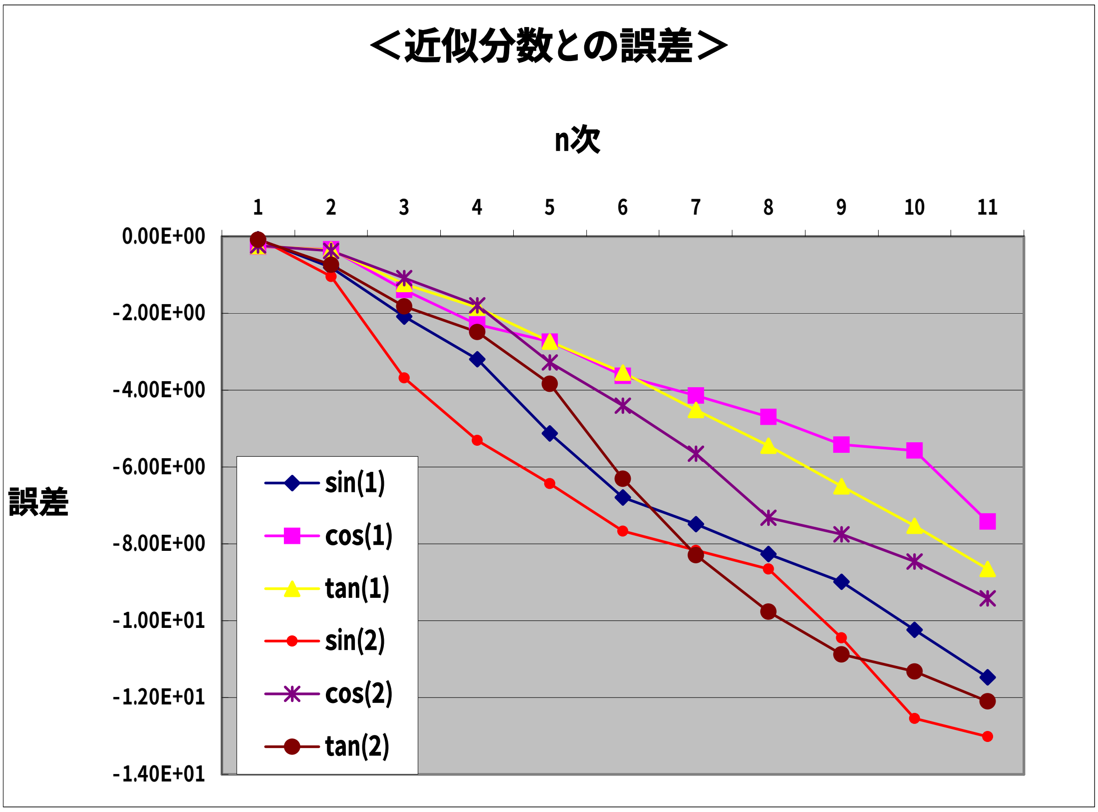
このグラフから，11 次の近似分数までの誤差では，$\dfrac{e-1}{e+1}, \pi, \log_{10}(3), \log_{10}(2), \log_{10}(4), e$ の順で収束が早いことがわかる．ただし，この順はあくまで，11 次の近似分数との誤差での値であるため，正確な収束の早さの順ではない．

iv. 三乗根



三乗根では部分商 q に規則性がないため，グラフが直線的にはならない．また $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}$ の 3 つは，11 次の近似分数での誤差の値がほぼ等しいため，収束の早さが 11 次では同じである．先の例と同様に，正確な収束の早さの順はこのグラフからは判断できない．

v．三角関数



三角関数に関しては部分商 q に規則性があるものとないものがある．

例えば，tan (1) の部分商 q_i は，

$$1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 5,\ 1,\ 7,\ 1,\ 9,\ 1,\ 11,\ 1,\ 13,\ 1,\ 15,\ 1,\ 17,\ 1,\ 19,\cdots$$

と q_i の奇数番目に奇数が規則的にならぶ．故にtan 1のグラフ (黄色) は直線的にtan 1に収束して行くことがグラフからわかる．

また $\tan x$ は第 I 部の (4．13) 式，

$$\tan x=\frac{x^2}{1}\,\frac{x^2}{-3}\,\frac{x^2}{-5}\,\frac{x^2}{-7}\,\frac{x^2}{-9}\,\frac{x^2}{-11}\,\frac{x^2}{-13}\,\frac{x^2}{-15}\,\frac{x^2}{-17}\,\frac{}{-}\cdots$$

の形に連分数展開できる．故に，

$$\tan 1=\frac{1}{1}\,\frac{1}{-3}\,\frac{1}{-5}\,\frac{1}{-7}\,\frac{1}{-9}\,\frac{1}{-11}\,\frac{1}{-13}\,\frac{1}{-15}\,\frac{1}{-17}\,\frac{1}{-19}\,\frac{}{-}\cdots$$

である．一方，ユークリッドの互除法で求めた連分数展開は

$$\tan 1=1+\frac{1}{1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+3}\,\frac{1}{+5}\,\frac{1}{+7}\,\frac{1}{+9}\,\frac{1}{+11}\,\frac{1}{+13}\,\frac{1}{+15}\,\frac{}{+}\cdots$$

である．この二つの連分数展開の収束の早さを比較するため，グラフを作った．プログラムより，実行結果を EXCEL で処理した．

まず，$\tan 1 = \frac{1}{1-}\frac{1}{3-}\frac{1}{5-}\frac{1}{7-}\frac{1}{9-}\frac{1}{11-}\frac{1}{13-}\frac{1}{15-}\frac{1}{17-}\frac{1}{19-}\cdots$のプログラムは以下である.

＜プログラム⑨＞ ：式(4．13)

```
1 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
2 PRINT "＜tan1を(4．13)式の単純連分数展開し，近似分数との誤差の桁数を求める＞"
3 INPUT PROMPT " n次の近似分数を求める ":n
4 PRINT "";n;"次までの近似分数の部分商qを求める"
5
6 !tan1の値を求める.
7 LET x1=1
8 LET x2=1
9 FOR i=1 TO 30
10     LET x1=x1+(-1)^(i-1)*1^(2*i-1)/fact(2*i-1)
11     LET x2=x2+(-1)^(i-1)*1^(2*(i-1))/fact(2*(i-1))
12 NEXT i
13 PRINT "sin1=";x1-1
14 PRINT "cos1=";x2-1
15 PRINT "tan1=";(x1-1)/(x2-1)
16 LET x=(x1-1)/(x2-1)
17
18 OPTION BASE 0
19 DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
20
21 !部分商を求める.
22 FOR i=1 TO n
23     LET p(i)=-1
24     LET q(i)=2*i-1
25     PRINT "q(";i;")=";q(i)
26 NEXT i
27
28 PRINT " "
29 PRINT "n次の近似分数を求める"
30 LET a(0)=0
31 LET b(0)=1
32 LET c(0)=a(0)/b(0)
33 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(0)
34 LET a(1)=1
```

```
35 LET b(1)=q(1)
36 LET c(1)=a(1)/b(1)
37 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(1)
38 FOR i=2 TO n
39      LET a(i)=q(i)*a(i-1)+p(i)*a(i-2)
40      LET b(i)=q(i)*b(i-1)+p(i)*b(i-2)
41      LET c(i)=a(i)/b(i)
42      PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(i)
43 NEXT i
44
45 PRINT " "
46 PRINT "誤差の桁数を求める"
47 FOR i=0 TO n
48      LET z(i)=x-c(i)
49      PRINT USING "-%%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
50 NEXT i
51
52 !グラフを書く
53 DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
54 SET WINDOW -10,30,-30,10
55 DRAW grid
56 FOR i=0 TO n
57      PLOT LINES : i,f(i);
58 NEXT i
59 END
60
61 !外部関数定義
62 EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
63 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
64 FOR i=1 TO 54
65      LET a=SQR(a)
66      LET b=SQR(b)
67 NEXT i
68 LET mylog= (b-1)/(a-1)
69 END FUNCTION
```

次に，$\tan 1 = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{7+}\frac{1}{9+}\frac{1}{11+}\frac{1}{13+}\frac{1}{15+}\cdots$ のプログラムは以下である.

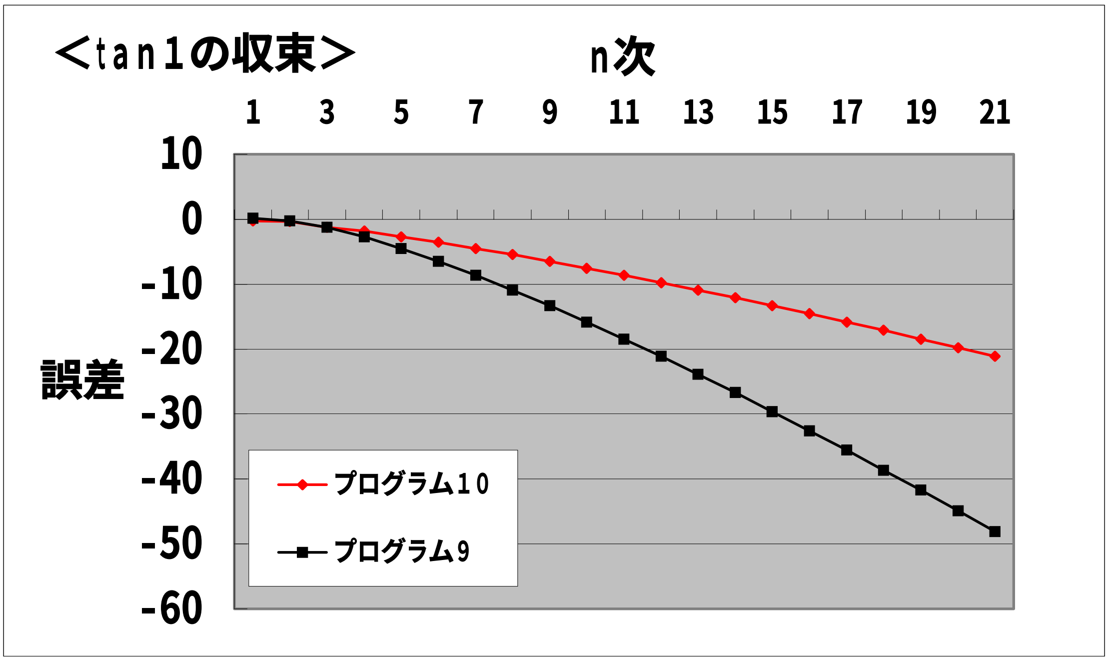
＜プログラム⑩＞：ユークリッドの互除法

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
PRINT "＜tan(x)を単純連分数に展開する部分商qを求める＞"
INPUT PROMPT "  正の整数を入力してください  ":x
PRINT "tan(";x;")を単純連分数に展開する"
INPUT PROMPT " n次の近似分数を求める  ":n
PRINT "";n;"次までの近似分数の部分商qを求める"

!tan1の値を求める
LET x1=x
LET x2=x
FOR i=1 TO 30
    LET x1=x1+(-1)^(i-1)*x^(2*i-1)/fact(2*i-1)
    LET x2=x2+(-1)^(i-1)*x^(2*(i-1))/fact(2*(i-1))
NEXT i
PRINT "sin(";x;")=";x1-x
PRINT "cos(";x;")=";x2-x
PRINT "tan(";x;")=";(x1-x)/(x2-x)
LET x=(x1-x)/(x2-x)

!部分商を求める
OPTION BASE 0
DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
LET q(0)=INT(x)
PRINT "q( 0 )=";q(0)
LET p(0)=x-q(0)
IF p(0)=0 THEN STOP
FOR i=1 TO n
    LET r(i)=1/p(i-1)
    LET q(i)=INT(r(i))
    PRINT "q(";i;")=";q(i)
    LET p(i)=r(i)-q(i)
NEXT i

PRINT " "
PRINT "n次の近似分数を求める"
LET a(0)=q(0)
```

```
37 LET b(0)=1
38 LET c(0)=a(0)/b(0)
39 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(0)
40 LET a(1)=q(0)*q(1)+1
41 LET b(1)=q(1)
42 LET c(1)=a(1)/b(1)
43 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(1)
44 FOR i=2 TO n
45      LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
46      LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
47      LET c(i)=a(i)/b(i)
48      PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(i)
49 NEXT i
50
51 PRINT " "
52 PRINT "誤差の桁数を求める"
53 FOR i=0 TO n
54      LET z(i)=x-c(i)
55      PRINT USING "-%%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
56 NEXT i
57
58 !グラフを書く
59 DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
60 SET WINDOW -10,30,-30,10
61 DRAW grid
62 FOR i=0 TO n
63      PLOT LINES : i,f(i);
64 NEXT i
65 END
66
67 !外部関数定義
68 EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
69 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
70 FOR i=1 TO 54
71      LET a=SQR(a)
72      LET b=SQR(b)
73 NEXT i
```

```
74 LET mylog= (b-1)/(a-1)
75 END FUNCTION
```

グラフは以下である.



グラフより, tan1はユークリッドの互除法, (4. 13)式のどちらで連分数展開しても部分商は規則性があるため, 誤差の桁数のグラフはほぼ直線的である. よって, ユークリッドの互除法よりも, (4. 13)式の方が近似分数は速くtan1に収束すると考えられる.

vi. オイラー定数

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log_e n \to 0.5772156649015\cdots$. この定数はオイラー定数と呼ばれ，今日でも無理数なのか有理数なのか解っていない数である．このオイラー定数を単純連分数展開する．ただし，オイラー定数は約 100 桁で計算する．

＜プログラム⑪＞

```
1 DECLARE EXTERNAL FUNCTION mylog
2 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
3 INPUT PROMPT "第n次までの部分商を求める。求めたいnを入力してください":n
4 OPTION BASE 0
5 DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
6 !オイラー定数
7 LET  x=0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672367726777
            6467093694706329174674951463144725
8
9 !部分商を求める
10 LET q(0)=INT(x)
11 PRINT "q( 0 )=";q(0)
12 LET p(0)=x-q(0)
13 IF p(0)=0 THEN STOP
14 FOR i=1 TO n
15      LET r(i)=1/p(i-1)
16      LET q(i)=INT(r(i))
17      PRINT "q(";i;")=";q(i)
18      LET p(i)=r(i)-q(i)
19 NEXT i
20
21 PRINT " "
22 PRINT "n次の近似分数を求める"
23 LET a(0)=q(0)
24 LET b(0)=1
25 LET c(0)=a(0)/b(0)
26 PRINT USING "-%%.################^^^^^":c(0)
27 LET a(1)=q(0)*q(1)+1
28 LET b(1)=q(1)
```

```
29 LET c(1)=a(1)/b(1)
30 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(1)
31 FOR i=2 TO n
32      LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
33      LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
34      LET c(i)=a(i)/b(i)
35      PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(i)
36 NEXT i
37
38 PRINT " "
39 PRINT "誤差の桁数を求める"
40 FOR i=0 TO n
41      LET z(i)=x-c(i)
42      PRINT USING "-%%.#####":mylog(10,ABS(z(i)))
43 NEXT i
44
45 !グラフを書く
46 DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
47 SET WINDOW -10,30,-30,10
48 DRAW grid
49 FOR i=0 TO n
50      PLOT LINES : i,f(i);
51 NEXT i
52 END
53
54 !外部関数定義
55 EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
56 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
57 FOR i=1 TO 54
58      LET a=SQR(a)
59      LET b=SQR(b)
60 NEXT i
61 LET mylog= (b-1)/(a-1)
62 END FUNCTION
```

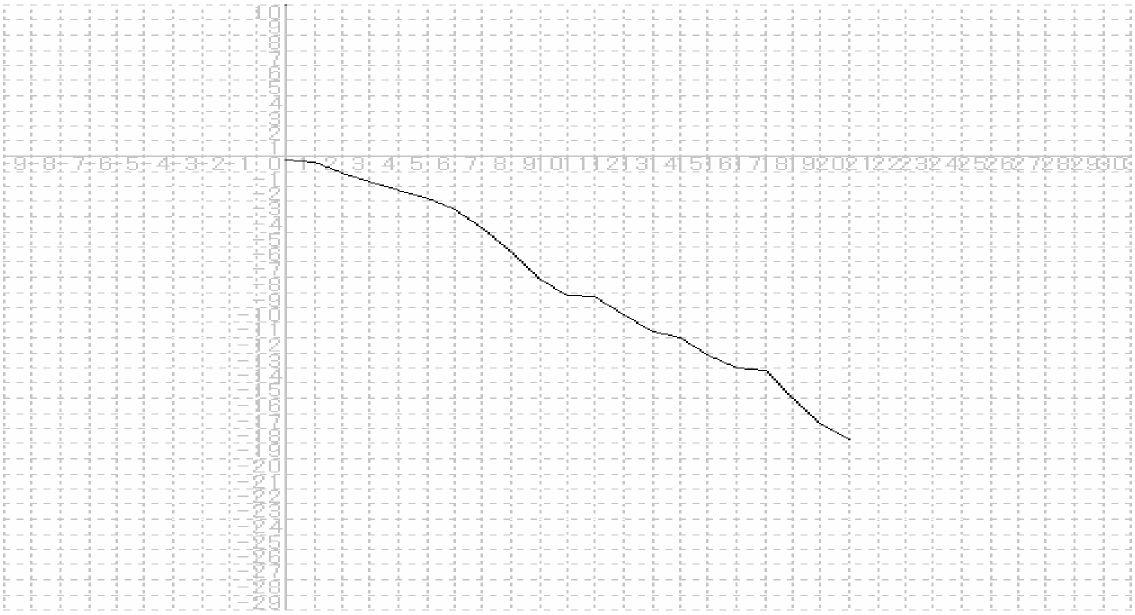
～実行結果～

n=20 での実行結果は以下である.

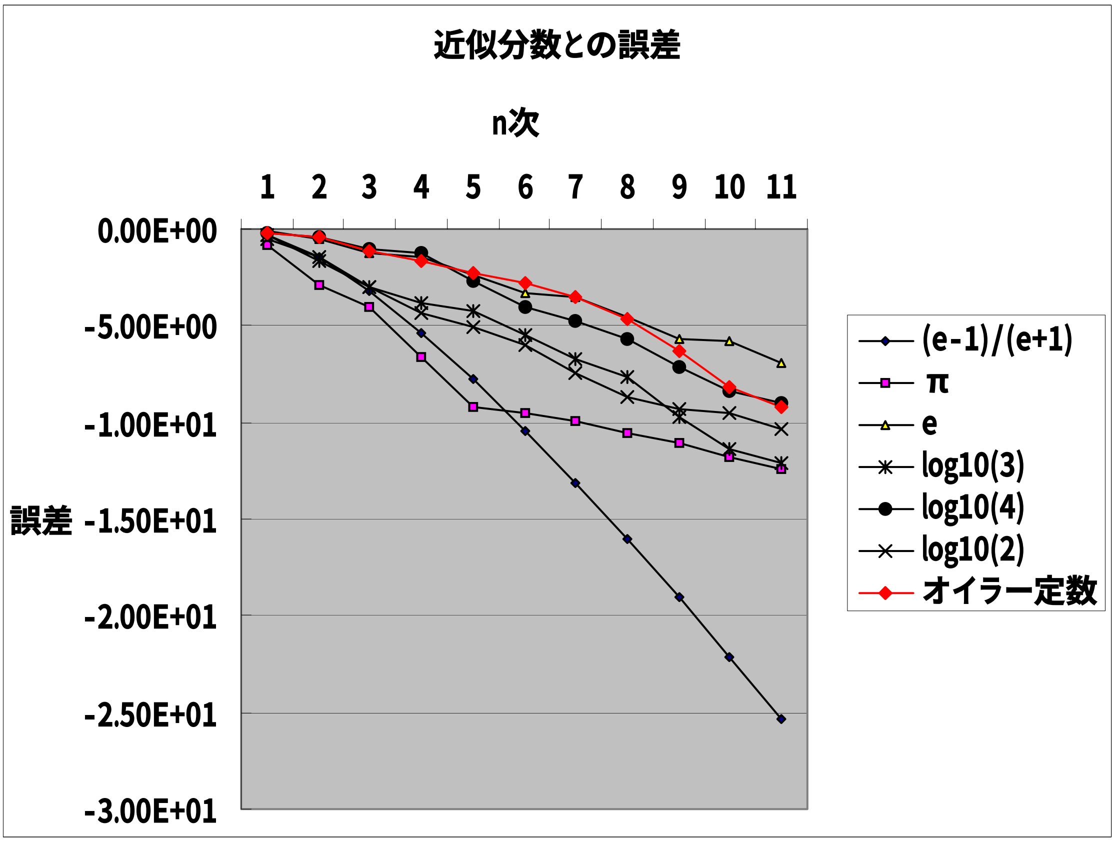
```
第n次までの部分商を求める。求めたいnを入力してください20
q( 0 )= 0
q( 1 )= 1
q( 2 )= 1
q( 3 )= 2
q( 4 )= 1
q( 5 )= 2
q( 6 )= 1
q( 7 )= 4
q( 8 )= 3
q( 9 )= 13
q( 10 )= 5
q( 11 )= 1
q( 12 )= 1
q( 13 )= 8
q( 14 )= 1
q( 15 )= 2
q( 16 )= 4
q( 17 )= 1
q( 18 )= 1
q( 19 )= 40
q( 20 )= 1

n次の近似分数を求める
 00.000000000000000E+000
 10.000000000000000E-001
 50.000000000000000E-002
 60.000000000000000E-002
 57.142857142857143E-002
 57.894736842105263E-002
 57.692307692307692E-002
 57.723577235772358E-002
 57.721518987341772E-002
 57.721567135793077E-002
 57.721566423084130E-002
 57.721566540400088E-002
 57.721566487002797E-002
```

```
 57.721566490407552E-002
 57.721566490050840E-002
 57.721566490161139E-002
 57.721566490152372E-002
 57.721566490154012E-002
 57.721566490153276E-002
 57.721566490153286E-002
 57.721566490153286E-002

誤差の桁数を求める
-00.23866
-00.37388
-01.11229
-01.64236
-02.23754
-02.76153
-03.53374
-04.69664
-06.32328
-08.19001
-09.17348
-09.29889
-10.50162
-11.59471
-11.98951
-13.10498
-14.03883
-14.13927
-16.00957
-17.65434
-18.71876
```

オイラー定数の近似分数との誤差のグラフは以下である.



収束の速さを比較するため, iiiのグラフと共に, 表示する.



このグラフより, オイラー定数の 11 次の近似分数での収束の速さは, 部分商に規則性がないため, 直線的にならず, 収束の速さも他のグラフと比べると, 速い･遅いは判断できない.

4. まとめ

イントロで立てた3つの目標は,

＜目標1＞

有理数･無理数などをユークリッドの互除法を用いて連分数に展開するプログラムを作ること.

＜目標2＞

二次方程式の実数根を連分数に展開した際, その単純連分数の部分商 q_i が循環することをプログラムによって確認すること.

＜目標3＞

様々な実数とその近似分数の誤差をプログラムで求め, 誤差の対数グラフを書き, 収束の速さを比較する.

であったが, ユークリッドの互除法を用いて与えられた実数を単純連分数展開することは達成した. tan1 の連分数の連分数展開の部分商に, 1, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 7, 1, 9, 1, 11, 1, 13, 1, 15, 1, 17, 1, 19･･･と1つ置きに奇数が現れること, e の連分数の連分数展開の部分商に, 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1,･･･と 2 つ置きに偶数が求められることの疑問が残ってしまったことが残念である.

tan1 の単純連分数展開と, (4. 13) 式での収束の速さが比較できたことは, 非常に興味深かったが, なぜ (4. 13) 式の収束が速いのかまでは, 解決できなかったのが残念である.

5. 付録

ⅰ：プログラム

＜プログラム⑫＞：自然対数 e を単純連分数展開し,近似分数との誤差の桁数のグラフを書く

```
DECLARE EXTERNAL FUNCTION mylog
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
PRINT "自然対数eを単純連分数展開し, 近似分数との誤差の桁数のグラフを書く"
INPUT PROMPT "第n次までの部分商を求める.求めたいnを入力してください":n
OPTION BASE 0
DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)

!eの値を求める.
LET x=1
LET e=x
LET t=1
FOR i=1 TO 1000
    LET t=t*x/i
    LET e=e+t
NEXT i
PRINT "e=";e
LET x=e

!部分商を求める
LET q(0)=INT(x)
PRINT "q( 0 )=";q(0)
LET p(0)=x-q(0)
IF p(0)=0 THEN STOP
FOR i=1 TO n
    LET r(i)=1/p(i-1)
    LET q(i)=INT(r(i))
    PRINT "q(";i;")=";q(i)
    LET p(i)=r(i)-q(i)
NEXT i

PRINT " "
PRINT "n次の近似分数を求める"
```

```
LET a(0)=q(0)
LET b(0)=1
LET c(0)=a(0)/b(0)
PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(0)
LET a(1)=q(0)*q(1)+1
LET b(1)=q(1)
LET c(1)=a(1)/b(1)
PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(1)
FOR i=2 TO n
    LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
    LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
    LET c(i)=a(i)/b(i)
    PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(i)
NEXT i

!誤差の桁数を求める
PRINT " "
FOR i=0 TO n
    LET z(i)=x-c(i)
    PRINT USING "-%%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
NEXT i

!グラフを書く
DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
SET WINDOW -10,30,-30,10
DRAW grid
FOR i=0 TO n
    PLOT LINES : i,f(i);
NEXT i
END

!外部関数定義
EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
FOR i=1 TO 54
    LET a=SQR(a)
    LET b=SQR(b)
```

```
70 NEXT i
71 LET mylog= (b-1)/(a-1)
72 END FUNCTION
```

＜プログラム⑬＞：πを単純連分数展開し,近似分数との誤差の桁数のグラフを書く

```
1 DECLARE EXTERNAL FUNCTION mylog
2 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
3 PRINT "πを単純連分数展開し, 近似分数との誤差のグラフを書く"
4 INPUT PROMPT "第n次までの部分商を求める。求めたいnを入力してください":n
5 OPTION BASE 0
6 DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
7 !部分商を求める
8 LET x=PI
9 LET q(0)=INT(x)
10 PRINT "q( 0 )=";q(0)
11 LET p(0)=x-q(0)
12 IF p(0)=0 THEN STOP
13 FOR i=1 TO n
14      LET r(i)=1/p(i-1)
15      LET q(i)=INT(r(i))
16      PRINT "q(";i;")=";q(i)
17      LET p(i)=r(i)-q(i)
18 NEXT i
19
20 PRINT " "
21 PRINT "近似分数を求める"
22 LET a(0)=q(0)
23 LET b(0)=1
24 LET c(0)=a(0)/b(0)
25 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(0)
26 LET a(1)=q(0)*q(1)+1
27 LET b(1)=q(1)
28 LET c(1)=a(1)/b(1)
29 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(1)
30 FOR i=2 TO n
31      LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
32      LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
33      LET c(i)=a(i)/b(i)
34      PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(i)
35 NEXT i
36
```

```
PRINT " "
PRINT "誤差の桁数を求める"
FOR i=0 TO n
    LET z(i)=x-c(i)
    PRINT USING "-%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
NEXT i

!グラフを書く
DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
SET WINDOW -10,30,-30,10
DRAW grid
FOR i=0 TO n
    PLOT LINES : i,f(i);
NEXT i
END

!外部関数定義
EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
FOR i=1 TO 54
    LET a=SQR(a)
    LET b=SQR(b)
NEXT i
LET mylog= (b-1)/(a-1)
END FUNCTION
```

＜プログラム⑭＞：ｌｏｇX を単純連分数展開し,近似分数との誤差の桁数のグラフを書く

```
1 DECLARE EXTERNAL FUNCTION mylog
2 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
3 PRINT "log10(x)を単純連分数展開する部分用を求め,近似分数との誤差のグラフを書く"
4 INPUT PROMPT "log10(x)の正の整数xを入力してください":x
5 INPUT PROMPT "第n次までの部分商を求める。求めたいnを入力してください":n
6
7 OPTION BASE 0
8 DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
9 LET h=mylog(10,x)
10
11 !部分商を求める
12 LET q(0)=INT(h)
13 PRINT "q( 0 )=";q(0)
14 LET p(0)=h-q(0)
15 IF p(0)=0 THEN STOP
16 FOR i=1 TO n
17      LET r(i)=1/p(i-1)
18      LET q(i)=INT(r(i))
19      PRINT "q(";i;")=";q(i)
20      LET p(i)=r(i)-q(i)
21 NEXT i
22
23 PRINT " "
24 PRINT "近似分数を求める"
25 LET a(0)=q(0)
26 LET b(0)=1
27 LET c(0)=a(0)/b(0)
28 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(0)
29 LET a(1)=q(0)*q(1)+1
30 LET b(1)=q(1)
31 LET c(1)=a(1)/b(1)
32 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(1)
33 FOR i=2 TO n
34      LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
35      LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
36      LET c(i)=a(i)/b(i)
```

```
    PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(i)
NEXT i

PRINT " "
PRINT "誤差の桁数を求める"
FOR i=0 TO n
    LET z(i)=h-c(i)
    PRINT USING "-%%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
NEXT i

!グラフを書く
DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
SET WINDOW -10,30,-30,10
DRAW grid
FOR i=0 TO n
    PLOT LINES : i,f(i);
NEXT i
END

!外部関数定義
EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
FOR i=1 TO 54
    LET a=SQR(a)
    LET b=SQR(b)
NEXT i
LET mylog= (b-1)/(a-1)
END FUNCTION
```

＜プログラム⑮＞：三乗根を単純連分数展開し,近似分数との誤差の桁数のグラフを書く

```
1 DECLARE EXTERNAL FUNCTION mylog
2 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
3 PRINT "三乗根mを単純連分数展開する部分商を求め,近似分数との誤差のグラフを書く"
4 INPUT PROMPT "求めたい三乗根を入力してください":m
5 INPUT PROMPT "第n次までの部分商を求める。求めたいnを入力してください":n
6
7 OPTION BASE 0
8 DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
9
10 !三乗根の値を求める
11 LET h=x^3-m
12 FOR x=1 TO 200
13       LET h=(h+m/(h*h))/2
14 NEXT x
15 PRINT h
16
17 !部分商を求める
18 LET q(0)=INT(h)
19 PRINT "q( 0 )=";q(0)
20 LET p(0)=h-q(0)
21 IF p(0)=0 THEN STOP
22 FOR i=1 TO n
23       LET r(i)=1/p(i-1)
24       LET q(i)=INT(r(i))
25       PRINT "q(";i;")=";q(i)
26       LET p(i)=r(i)-q(i)
27 NEXT i
28
29 PRINT " "
30 PRINT "近似分数を求める"
31 LET a(0)=q(0)
32 LET b(0)=1
33 LET c(0)=a(0)/b(0)
34 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(0)
35 LET a(1)=q(0)*q(1)+1
36 LET b(1)=q(1)
```

```
LET c(1)=a(1)/b(1)
PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(1)
FOR i=2 TO n
    LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
    LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
    LET c(i)=a(i)/b(i)
    PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(i)
NEXT i

PRINT " "
PRINT "誤差の桁数を求める"
FOR i=0 TO n
    LET z(i)=h-c(i)
    PRINT USING "-%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
NEXT i

!グラフを書く
DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
SET WINDOW -10,30,-30,10
DRAW grid
FOR i=0 TO n
    PLOT LINES : i,f(i);
NEXT i
END

!外部関数定義
EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
FOR i=1 TO 54
    LET a=SQR(a)
    LET b=SQR(b)
NEXT i
LET mylog= (b-1)/(a-1)
END FUNCTION
```

＜プログラム⑯＞：sin X を単純連分数展開し,近似分数との誤差の桁数のグラフを書く

```
1 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
2 PRINT "＜sin(x)を単純連分数展開する部分商qを求める＞"
3 INPUT PROMPT "  正の整数を入力してください  ":x
4 PRINT "sin(";x;")を正則な連分数に展開する"
5 INPUT PROMPT " n次の近似分数を求める  ":n
6 PRINT "";n;"次までの近似分数の部分商qを求める"
7 OPTION BASE 0
8 DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
9
10 !sin(x)の値を求める
11 LET x1=x
12 FOR i=1 TO 30
13      LET x1=x1+(-1)^(i-1)*x^(2*i-1)/fact(2*i-1)
14 NEXT i
15 PRINT "sin(";x;")=";x1-x
16 LET x=x1-x
17
18 !部分商を求める
19 LET q(0)=INT(x)
20 PRINT "q( 0 )=";q(0)
21 LET p(0)=x-q(0)
22 IF p(0)=0 THEN STOP
23 FOR i=1 TO n
24      LET r(i)=1/p(i-1)
25      LET q(i)=INT(r(i))
26      PRINT "q(";i;")=";q(i)
27      LET p(i)=r(i)-q(i)
28 NEXT i
29
30 PRINT " "
31 PRINT "n次の近似分数を求める"
32 LET a(0)=q(0)
33 LET b(0)=1
34 LET c(0)=a(0)/b(0)
35 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(0)
36 LET a(1)=q(0)*q(1)+1
```

```
LET b(1)=q(1)
LET c(1)=a(1)/b(1)
PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(1)
FOR i=2 TO n
      LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
      LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
      LET c(i)=a(i)/b(i)
      PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(i)
NEXT i

PRINT " "
PRINT "誤差の桁数を求める"
FOR i=0 TO n
      LET z(i)=x-c(i)
      PRINT USING "-%%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
NEXT i

!グラフを書く
DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
SET WINDOW -10,30,-30,10
DRAW grid
FOR i=0 TO n
      PLOT LINES : i,f(i);
NEXT i
END

!外部関数定義
EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
FOR i=1 TO 54
      LET a=SQR(a)
      LET b=SQR(b)
NEXT i
LET mylog= (b-1)/(a-1)
END FUNCTION
```

＜プログラム⑰＞：cos X を単純連分数展開し,近似分数との誤差の桁数のグラフを書く

```
1 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
2 PRINT "＜cos(x)を正則な連分数に展開する部分商qを求める＞"
3 INPUT PROMPT "  正の整数を入力してください  ":x
4 PRINT "cos(";x;")を正則な連分数に展開する"
5 INPUT PROMPT " n次の近似分数を求める  ":n
6 PRINT "";n;"次までの近似分数の部分商qを求める"
7 OPTION BASE 0
8 DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
9
10 !cos(x)の値を求める
11 LET x2=x
12 FOR i=1 TO 30
13       LET x2=x2+(-1)^(i-1)*x^(2*(i-1))/fact(2*(i-1))
14 NEXT i
15 PRINT "cos(";x;")=";x2-x
16 LET x=x2-x
17
18 !部分商を求める
19 LET q(0)=INT(x)
20 PRINT "q( 0 )=";q(0)
21 LET p(0)=x-q(0)
22 IF p(0)=0 THEN STOP
23 FOR i=1 TO n
24       LET r(i)=1/p(i-1)
25       LET q(i)=INT(r(i))
26       PRINT "q(";i;")=";q(i)
27       LET p(i)=r(i)-q(i)
28 NEXT i
29
30 PRINT " "
31 PRINT "n次の近似分数を求める"
32 LET a(0)=q(0)
33 LET b(0)=1
34 LET c(0)=a(0)/b(0)
35 PRINT USING "-%%.##############^^^^^":c(0)
36 LET a(1)=q(0)*q(1)+1
```

```
37 LET b(1)=q(1)
38 LET c(1)=a(1)/b(1)
39 PRINT USING "-%%.##############^^^^^":c(1)
40 FOR i=2 TO n
41      LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
42      LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
43      LET c(i)=a(i)/b(i)
44      PRINT USING "-%%.##############^^^^^":c(i)
45 NEXT i
46
47 PRINT " "
48 PRINT "誤差の桁数を求める"
49 FOR i=0 TO n
50      LET z(i)=x-c(i)
51      PRINT USING "-%%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
52 NEXT i
53
54 !グラフを書く
55 DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
56 SET WINDOW -10,30,-30,10
57 DRAW grid
58 FOR i=0 TO n
59      PLOT LINES : i,f(i);
60 NEXT i
61 END
62
63 !外部関数定義
64 EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
65 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
66 FOR i=1 TO 54
67      LET a=SQR(a)
68      LET b=SQR(b)
69 NEXT i
70 LET mylog= (b-1)/(a-1)
71 END FUNCTION
```

＜プログラム⑱＞：tanX を単純連分数展開し,近似分数との誤差の桁数のグラフを書く

```
1 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
2 PRINT "＜tan(x)を単純連分数に展開する部分商qを求める＞"
3 INPUT PROMPT "  正の整数を入力してください  ":x
4 PRINT "tan(";x;")を単純連分数に展開する"
5 INPUT PROMPT " n次の近似分数を求める  ":n
6 PRINT "";n;"次までの近似分数の部分商qを求める"
7
8 !tan1の値を求める
9 LET x1=x
10 LET x2=x
11 FOR i=1 TO 30
12      LET x1=x1+(-1)^(i-1)*x^(2*i-1)/fact(2*i-1)
13      LET x2=x2+(-1)^(i-1)*x^(2*(i-1))/fact(2*(i-1))
14 NEXT i
15 PRINT "sin(";x;")=";x1-x
16 PRINT "cos(";x;")=";x2-x
17 PRINT "tan(";x;")=";(x1-x)/(x2-x)
18 LET x=(x1-x)/(x2-x)
19
20 !部分商を求める
21 OPTION BASE 0
22 DIM q(n),p(n),r(n), a(n),b(n),c(n), z(n)
23 LET q(0)=INT(x)
24 PRINT "q( 0 )=";q(0)
25 LET p(0)=x-q(0)
26 IF p(0)=0 THEN STOP
27 FOR i=1 TO n
28      LET r(i)=1/p(i-1)
29      LET q(i)=INT(r(i))
30      PRINT "q(";i;")=";q(i)
31      LET p(i)=r(i)-q(i)
32 NEXT i
33
34 PRINT " "
35 PRINT "n次の近似分数を求める"
36 LET a(0)=q(0)
```

```
37 LET b(0)=1
38 LET c(0)=a(0)/b(0)
39 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(0)
40 LET a(1)=q(0)*q(1)+1
41 LET b(1)=q(1)
42 LET c(1)=a(1)/b(1)
43 PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(1)
44 FOR i=2 TO n
45      LET a(i)=q(i)*a(i-1)+a(i-2)
46      LET b(i)=q(i)*b(i-1)+b(i-2)
47      LET c(i)=a(i)/b(i)
48      PRINT USING "-%%.###############^^^^^":c(i)
49 NEXT i
50
51 PRINT " "
52 PRINT "誤差の桁数を求める"
53 FOR i=0 TO n
54      LET z(i)=x-c(i)
55      PRINT USING "-%%.##########":mylog(10,ABS(z(i)))
56 NEXT i
57
58 !グラフを書く
59 DEF f(i)=mylog(10,ABS(z(i)))
60 SET WINDOW -10,30,-30,10
61 DRAW grid
62 FOR i=0 TO n
63      PLOT LINES : i,f(i);
64 NEXT i
65 END
66
67 !外部関数定義
68 EXTERNAL FUNCTION mylog(a,b)
69 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
70 FOR i=1 TO 54
71      LET a=SQR(a)
72      LET b=SQR(b)
73 NEXT i
```

```
74 LET mylog= (b-1)/(a-1)
75 END FUNCTION
```

ii：語句の説明

- PRINT 式 ： 数値式, 文字列式の値を表示する.
- INPUT PROMPT “a, b ”:a, b ： 文字列を表示して, 変数にキーボードから値を入力する.
- LET 変数名＝式 ： 数値変数名 = 数値式, 文字列変数名 = 文字列式, 式の値を変数に代入する.
- DO～LOOP ： DO ～ LOOP 構文では, DO 行と LOOP 行に挟まれた各文が繰り返し実行される.
- END ： 主プログラムの終了.
- IF 論理式 THEN A ： 論理式が真であるとき, Aを実行する.
  - ➢ DO ～ IF 論理式 THEN EXIT DO ～ LOOP ： 論理式が真であるとき, LOOP 文の次の行に分岐する.
- INT(x) ： x を超えない最大の整数
- SQR(x) ： x の非負の平方根
- OPTION BASE 0 ： 配列宣言で添字の下限の指定を省略したときの値を 0 にする.
- DIM ： 配列名と, その次元, 添字の上限, 下限を宣言する.
- STOP ： プログラムの実行を終了させる.
- FOR～NEXT ： FOR 制御変数 = 始値 TO 限界 STEP 増分 ～ NEXT 制御変数のように書く.
  - ➢ ただし, 制御変数は単純変数を書く. 添字付き変数を制御変数にすることはできない. 始値, 限界, 増分は数値式. NEXT 文には FOR 文に書いた制御変数と同じ変数を書く. 限界, 増分は FOR 文が実行されたときに計算され, この構文の繰り返しを終了するまでその値が用いられる.
  - ➢ 増分が正の数のときは, 次のように動作する.

    ⑴ 制御変数に始値を代入する.

    ⑵ 制御変数の値が限界より小さければ, ………の各文を実行する。

    そうでなければ, この構文の処理を終えて先に進む.

    ⑶ NEXT 文を実行すると, 制御変数に増分が加算され, ⑵ に戻る.
  - ➢ 増分が負の数のときの動作は, ⑵ の段階で大小が逆になる.
  - ➢ 「STEP 増分」を省略すると, 増分は1とみなされる.

iii：参考文献

〔1〕E.ハイナー(E.Hairer)/G.ワナー(G.Wanner)著（蟹江　幸博　訳）, 解析教程(上),
シュプリンガー･フェアラーク東京(1997).
〔2〕E.ハイナー(E.Hairer)/G.ワナー(G.Wanner)著（蟹江　幸博　訳）, 解析教程(下),
シュプリンガー･フェアラーク東京(1997).
〔3〕高木　貞治, 初等整数論講義　第2版, 共立出版(1971).
〔4〕砂田　利一, 幾何入門, 財団法人　放送大学教育振興会（2004）.