

2005 年度卒業研究

～ 計算法の変遷 ～

明治大学理工学部数学科

鎌田 伊織 吉本 清夏

指導教諭 桂田 祐史 助教授

2006 年 2 月 25 日

目次

0 . イントロ	1
第一章 三角関数	2
1.1 三角関数の定義	2
1.1.1 イントロ	2
1.1.2 正弦関数(sin)	2
1.1.3 余弦関数(cos)	3
1.1.4 正接関数(tan)	4
1.2 三角関数の基本関係式	5
1.2.1 加法定理	5
1.2.2 黄金比	7
1.3 級数展開	7
1.3.1 正多角形の作図問題	7
1.3.2 $\sin x$ の近似値	8
1.3.3 $\sin x$ の級数	10
1.3.4 $\cos x$ の級数	12
第二章 逆正接関数(Arctan)	14
2.1 円周率の歴史	14
2.2 マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数	15
2.2.1 Leibniz 級数	15
2.2.2 Sharp の公式	17
2.3 Arctan 級数を用いた人々の公式	17
2.3.1 John-Machin の公式	17
2.3.2 Euler の公式	20
2.3.3 Gauss の公式	25
2.3.4 高野喜久雄の公式	28
2.3.5 各公式とグラフの関係	30
第三章 算術幾何平均 (AGM)	33
3.1 イントロ	33
3.2 算術幾何平均と楕円積分	33
3.3 第一種完全楕円積分と第二種完全楕円積分	34
3.4 算術幾何平均による π の計算	51
3.5 ガウス・ルジャンドルの公式	52
3.6 ボールウェインの 4 次式	56
巻末付録	59
参考文献	63

0. イントロ

今回、 \sin についての卒業研究を始めるにあたって、その前段階として1年間、ハイラ・ワナ - の「解析教程」で三角関数を勉強してきた。それをまとめたものが第一章の内容である。その本の中で扱った \sin についてさらに詳しく学び、第二章では Arctan 級数について、第三章では AGM についてまとめた。

また、本卒業研究内で使用しているソフトは(仮称)十進 Basic である。これはコンピュータを計算の道具として使う人のためのプログラミング言語であり、文教大学の白石和夫先生が開発されたフリーソフトである。計算処理をする上で便利な拡張機能(1000桁演算モード、有理数演算モード、複素数演算モード)がついており、本文中のプログラムはこの(仮称)十進 Basic を利用して作成したものである。

第一章 三角関数

1.1 三角関数の定義

1.1.1 イントロ

「角を測る」ことは、紀元前の時代に天文学的に利用され始め、その後日常生活で馴染みのある1年の日数や、時間のもとをつくりあげた。

この第一章では、古代ギリシャから使われており、弦(chord)を測ることによって角を測る方法である、三角関数について詳しくみていくことにする。古代の人々は、この方法によって表を作り、角を求めていたのである。

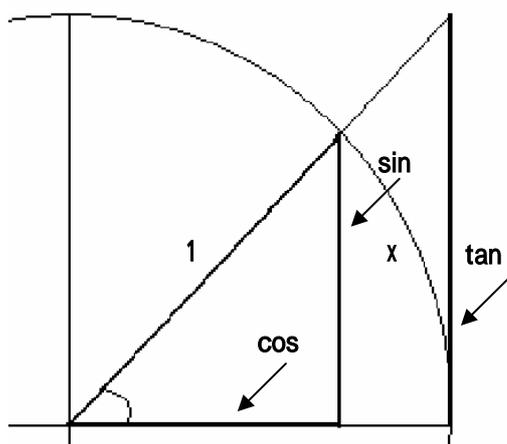


図 1.1 \sin, \cos, \tan の定義

図 1.1 のように半径 1 の円の中に置かれた直角三角形を考える。角 α の対辺の長さを $\sin \alpha$ とし、底辺の長さを $\cos \alpha$ とし、これらの値の商が円への垂直方向の接線の長さ $\tan \alpha$ になっており、

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

と表わされる。

このように定義された関数について、Basic プログラムを用いて調べてみる。

1.1.2 正弦関数(sin)

正弦関数とは、単位円の偏角に対する y 座標を返す関数である。この関数の起源は 630 年頃

のインドにあり,ヨーロッパ科学においては中世にレギオモンタヌス(1464)が始めて使ったとされている. $\sin(x)$ の値は次のプログラムで求められる.

```

1 PRINT " sin(x)の値を求めるプログラム "
2 OPTION ANGLE DEGREES      ! 三角関数の角の大きさの単位を度にする
3 FOR a = 0 TO 360 STEP 1    ! (x) の範囲を示す
4   PRINT sin (a)
5 NEXT a
6 END

```

この値をもとにして, 次のプログラムではグラフを描くことができる.

```

1 PRINT " sin (x) のグラフをかくプログラム "
2 OPTION ANGLE DEGREES      ! 三角関数の角の大きさの単位を度にする
3 DEF f(x) = SIN (x)
4 SET WINDOW - 360, 360, - 2, 2      ! 描画領域に x 座標 y 座標の範囲を示す
5 DRAW GRID (90, 1)          ! x 軸方向は間隔 9 0, y 軸方向は間隔 1 の格子を描く
6 FOR X= - 360 TO 360
7   PLOT LINES: x, f (x);      ! 点を順に線分で結んでいく
8 NEXT x
9 END

```

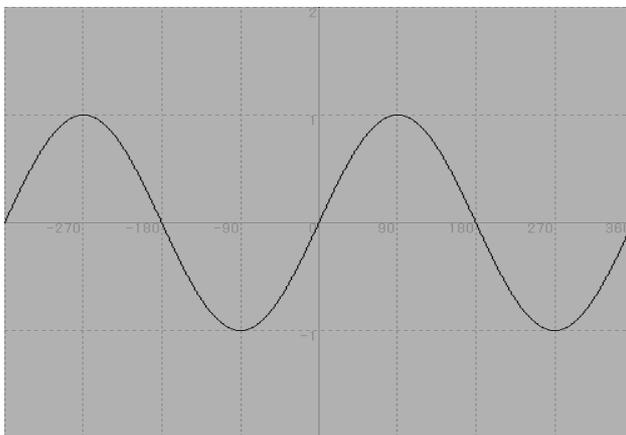


図 1.2 関数 $\sin x$ のグラフ

関数 $\sin x$ は, 周期 2π の奇関数であり, このグラフ(図 1.2)から,

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \pi = 0$$

$$\sin(-\chi) = -\sin \chi$$

$$\sin(\chi + \pi) = -\sin \chi$$

のような公式がたくさん得られる.

1.1.3 余弦関数(cos)

余弦関数とは, 単位円の偏角に対する x 座標を返す関数である. この関数の値は次のプログラムで求められる.

```

1 PRINT " cos (x) の値を求めるプログラム "
2 OPTION ANGLE DEGREES
3 FOR a = 0 TO 360 STEP 1
4   PRINT cos (a)

```

```
5 NEXT a
6 END
```

この値をもとにして、次のプログラムではグラフを描くことができる。

```
1 PRINT " cos (x) のグラフをかくプログラム "
2 OPTION ANGLE DEGREES
3 DEF F (x) = cos (x)
4 SET WINDOW - 360, 360, - 2, 2
5 DRAW GRID (90, 1)
6 FOR X= - 360 TO 360
7   PLOT LINES: x, f(x);
8 NEXT x
9 END
```

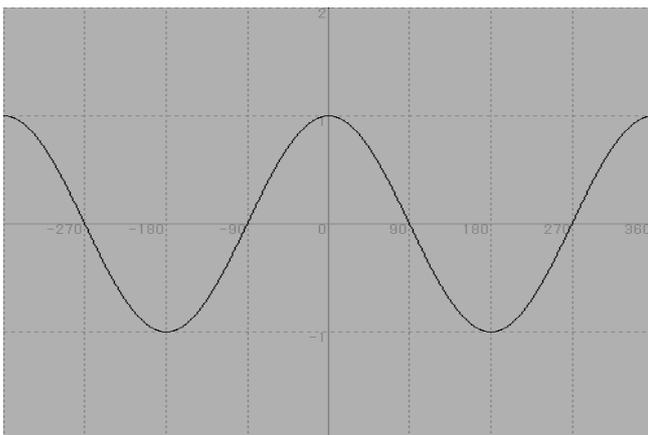


図 1.3 関数 $\cos x$ のグラフ

関数 $\cos x$ は、周期 2π の偶関数であり、このグラフ(図 1.3)から、

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1$$

$$\cos(-\chi) = \cos \chi$$

$$\cos(\chi + \pi) = -\cos \chi$$

のような公式が得られる。

1.1.4 正接関数(tan)

正接関数とは、単位円の偏角に対する正弦と余弦の商で、接線の長さを返す関数である。この関数の値は次のプログラムで求められる。

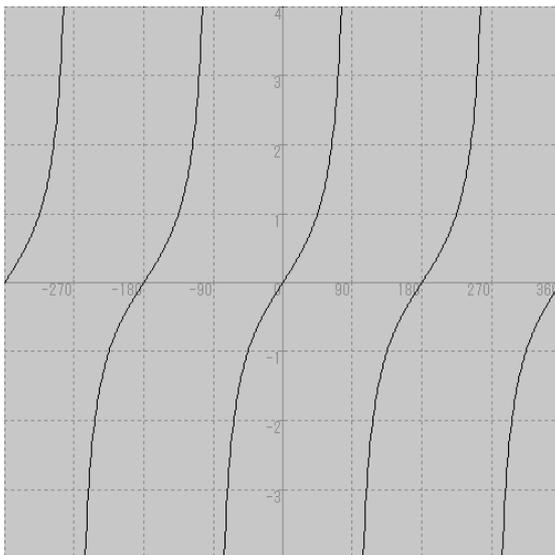
```
1 PRINT " tan (x) の値を求めるプログラム "
2 OPTION ANGLE DEGREES
3 FOR a= - 89 TO 89 STEP 1
4   PRINT tan (a)
5 NEXT a
6 END
```

この値をもとにして、次のプログラムではグラフを描くことができる。

```

1 PRINT " tan (x) のグラフをかくプログラム "
2 OPTION ANGLE DEGREES
3 DEF f (x) = tan (x)
4 SET WINDOW - 180, 180, - 4, 4
5 DRAW axes (90, 1)    ! 目盛り間隔が x 軸方向 90, y 軸方向 1 の x 軸と y 軸を描く
6 DRAW grid (90, 1)
7 FOR X= - 180 TO 180
8   WHEN EXCEPTION IN    ! 実行時のエラーが発生した時の処置を書く
9     PLOT LINES: x, f(x); ! 例外を起こす可能性のある処理 注)1
10    USE
11    PLOT LINES          ! 例外が起きたとき実行すべき処理
12    END WHEN
13 NEXT x
14 END

```

図 1.4 関数 $\tan x$ のグラフ

関数 $\tan x$ は、周期 π の奇関数であり、このグラフ(図 1.4)から、
 $\tan 0 = 0$
 $\tan(-\chi) = -\tan \chi$
 $\tan(\chi + \pi) = \tan \chi$
 のような公式が得られる。

注)1 例外とは、 $x=90$ の場合にエラーになって停止するのを防ぐために行う処理のことである

1.2 三角関数の基本関係式

1.2.1 加法定理

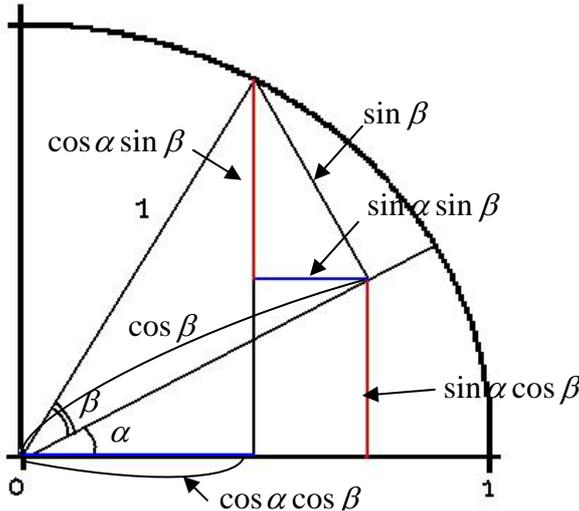


図 1.2 式 (1.2.1)(1.2.2) の証明

\sin と \cos を利用した関係式の基本となるのが、加法定理である。加法定理を用いることで、積の公式や倍角の公式を導くことができる。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1.2.1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1.2.2)$$

の 2 つの式が加法定理である。

これらは $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に角 α, β をとった左図を用いれば説明することができる。

加法定理を使って導かれる式には、次のようなものがある。

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

y を $-y$ に置き換えると

$$\sin(x - y) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

が得られ、 $x = y$ と置き換えると

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

が得られ、 $y = nx$ を代入すると

$$\sin(1 + n)x = \sin x \cos nx + \cos x \sin nx$$

$$\cos(1 + n)x = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx$$

の漸化式が得られる。この漸化式において n に 1 ~ 4 まで代入すると

$n = 1$	$\cos 2x =$	$\cos^2 x$	$- \sin^2 x$
	$\sin 2x =$	$2 \sin x \cos x$	
$n = 2$	$\cos 3x =$	$\cos^3 x$	$- 3 \sin^2 x \cos x$
	$\sin 3x =$	$3 \sin^2 x \cos x$	$- \sin^3 x$
$n = 3$	$\cos 4x =$	$\cos^4 x$	$- 6 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x$
	$\sin 4x =$	$4 \sin x \cos^3 x$	$- 4 \sin^3 x \cos x$
$n = 4$	$\cos 5x =$	$\cos^5 x$	$- 10 \sin^2 x \cos^3 x + 5 \sin^4 x \cos x$
	$\sin 5x =$	$5 \sin x \cos^4 x$	$- 10 \sin^3 x \cos^2 x + \sin^5 x$

となり、これらの係数を取り出してみると、パスカルの三角形が現れている。

よって、このパスカルの三角形から、次の一般的な公式が得られる。下記の公式をド・モアブルの定理という。これは

$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ の実部・虚部をとったもの

である。この式の証明は数学的帰納法を使ってできる。

						1						
						1		1				
					1		2		1			
				1		3		3		1		
			1		4		6		4		1	
		1		5		10		10		5		1

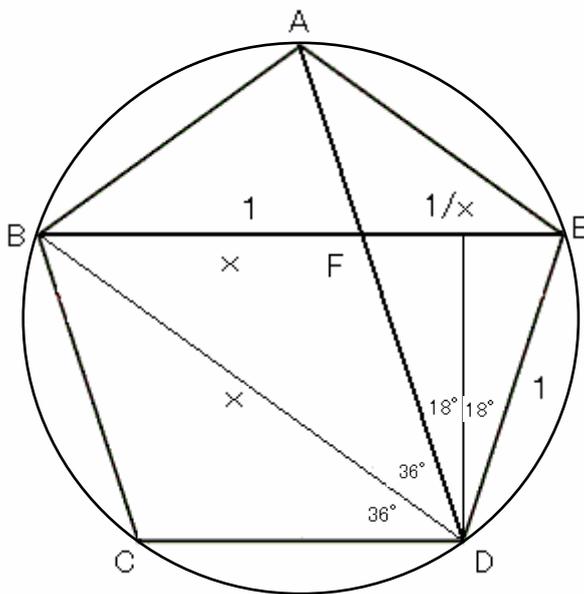
$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin^2 x \cos^{n-2} x$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots = \sum_{k=0}^{n/2} {}_n C_{2k} (-1)^k \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x$$

$$\sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x \cos^{n-3} x$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots = \sum_{k=1}^{(n+1)/2} {}_n C_{2k-1} (-1)^{k-1} \cos^{n-(2k-1)} x \sin^{2k-1} x$$

1.2.2 黄金比



sin と cos の特殊値について考える。

正五角形 ABCDE を考え、対角線 AD と BE の交点を F とする時、四角形 B C D F は平行四辺形になる。

$$AB = BC \quad \text{かつ} \quad BC = BF$$

$$\therefore AB = BF$$

また、二等辺三角形 ABE と二等辺三角形 EAD は相似であるから、

$$ABE = AEB = EAD$$

三角形 ABE と三角形 FEA は相似である。

$$\therefore AB : FE = BE : EA$$

ゆえに $AB = EA = BF$ よって、

$$BF : FE = BE : BF$$

$BF : FE = BE : BF$ となると、点 F は線分 BE を黄金分割するといえる。同様に、正五角形のどの対角線も互いを黄金分割することが分かる。この $BF : BE = BE : BF$ となる比は **黄金比** (Golden Ratio) と呼ばれる。黄金比とは図形の調和を表す値として“美しい”とされている比のことである。上図の辺 BE において、 $1 + \frac{1}{x} = x$ であるので、x の

値は $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($x > 0$) と求められる。この x が黄金比である。

1.3 級数展開

1.3.1 正多角形の作図問題

問) 定規とコンパスだけで正多角形を作図しなさい。

この問に対して、正 3 角形、正 4 角形、正 6 角形などは簡単に作図できることはわかるが、その他の多角形についてはどうだろうか。例えば、正 5 角形は古代ギリシャにおいて作図可能なことが発見されたが、正 7 角形や正 9 角形については作図に成功しなかった。

実際、辺の数が 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16 の正多角形は作図が可能で、それ以外の 7, 9, 11, 13, 14 の正多角形は作図不可能であることから正 17 角形も作図不可能ではないかと予測される。ところが、1796 年にガウスが正 17 角形の作図方法を発見し、さ

らに n が素数の正 n 角形について、 $n = 2^{2^m} + 1$ の形の場合に限り定規とコンパスだけで

作図が可能であることを発見した。 $2^{2^m} + 1$ の形の素数のことをフェルマー素数といい、

この素数はガウスによって 1 世紀に渡る眠りから覚まされ、数論と幾何学に新たな美しさを

吹き込んだといわれている。しかし、 $m = 5$ のとき素数にはならないように、 $2^{2^m} + 1$

の形の数はすべて素数であるわけではなく、現在までに素数であることが知られているの

は、 $m = 0, 1, 2, 3, 4$ の 5 つの場合にのみである。よって、作図可能な素数は $m =$

0 のとき正 3 角形、 $m = 1$ のとき正 5 角形、 $m = 2$ のとき正 17 角形、 $m = 3$ のとき正 2

57 角形、 $m = 4$ のとき正 65537 角形の 5 つだけである。

1.3.2 $\sin x$ の近似値

角をラジアンで測っているとき、角 x がゼロに近づくほど垂直の弦は弧に近づいていく、すなわち x によって近似される度合いが強くなるということである。

つまり $\sin \chi \approx \chi$ ($\chi \rightarrow 0$) と表わされる。

ここで、 $\sin 1^\circ$ の値を求める方法を考える。プトレマイオスは、関数の表から主な値を調べ、その値について加法定理や半角の公式を使うことによって $\sin 3^\circ$, $\cos 3^\circ$, $\sin 0.75^\circ$, $\cos 0.75^\circ$ などほとんどの値を求めていた。しかし、その方法では、 $\sin 1^\circ$ は求められなかったのである。そこで、次のように計算した。

$$\sin 1^\circ \approx \sin 0.75^\circ \cdot \frac{4}{3}$$

つまり
$$\sin 1^\circ \approx 0.01308959586 \dots \times \frac{4}{3} = 0.01745279448 \dots$$

と求められた。

また、アル・カーシーは 1429 年に、次の方程式(4.2)を使ってより精密な計算をしている。

ド・モアブルの公式より

$$\sin 3^\circ = 3 \sin 1^\circ - 4 \sin^3 1^\circ$$

ここで、 $x = \sin 1^\circ$ とすると

$$(4.2) \quad -4x^3 + 3x = \sin 3^\circ$$

とかける。ここで、 x に比べて $-4x^3$ は非常に小さいものとして無視すれば、

$$(4.3) \quad x = \frac{\sin 3^\circ}{3} + \delta$$

といえる。これを(4.2)に代入すると

$$-4 \left(\frac{\sin 3^\circ}{3} + \delta \right)^3 + 3 \left(\frac{\sin 3^\circ}{3} + \delta \right) = \sin 3^\circ$$

展開すると

$$-4 \left\{ \left(\frac{\sin 3^\circ}{3} \right)^3 + 3 \left(\frac{\sin 3^\circ}{3} \right)^2 \delta + 3 \left(\frac{\sin 3^\circ}{3} \right) \delta^2 + \delta^3 \right\} + 3 \delta = 0$$

ここで、 δ に比べて δ^2, δ^3 を非常に小さいものとして無視すれば、

$$-4 \left(\frac{\sin 3^\circ}{3} \right)^3 - 3 \left\{ 4 \left(\frac{\sin 3^\circ}{3} \right)^2 - 1 \right\} \delta = 0$$

よって、

$$3 \left\{ 1 - 4 \left(\frac{\sin 3^\circ}{3} \right)^2 \right\} \delta = 4 \left(\frac{\sin 3^\circ}{3} \right)^3$$

$$\delta = \frac{4 (\sin 3^\circ)^3}{27} \times \frac{3}{9 - 4 (\sin 3^\circ)^2} = \frac{4 (\sin 3^\circ)^3}{9 (9 - 4 \sin^2 3^\circ)}$$

この δ を(4.3)に代入すると、

$$x = \frac{\sin 3^\circ}{3} + \frac{4(\sin 3^\circ)^3}{9(9 - 4\sin^2 3^\circ)}$$

さらに, $\sin 3^\circ = 0.052335956$ なので,

$$x = 0.01744531866666... + 0.00000708768602655... \\ 0.0174524063526932...$$

このようにして, $\sin 1^\circ$ の値が得られた.

$$\sin 1^\circ \approx 0.0174524063526932...$$

また, Taylor 展開を使って $\sin 1^\circ$ を計算すると次のようになる.

```

1 PRINT " sin (1) の値をテイラー展開を用いて求めるプログラム "
2 PRINT " n の値を入力してください "
3 INPUT  n
4 LET x = 1* PI / 180
5 LET s = 0
6 FOR k = 1 TO n STEP 1
7 LET  T = (- 1)^( k - 1)*x^( 2*k - 1) / fact( 2*k - 1)
8 LET s = s + t           ! n 項までの和を計算する
9 NEXT  k
10 PRINT USING " - % . #####^ ^ ^ ^ ^ ^ " :t
    ! t の値を整数部 1 桁, 小数部 4 桁, 指数部( E を含む) 6 桁で表示する
11 PRINT  s
12 END

```

よって, $n = 4$ を代入した場合

$$\sin 1^\circ = 0.017452406437283512819...$$

となる. この値をブトレマイオスやアル・カーシーの計算法で求めた値と比較すると, ブトレマイオスの値は小数点以下第 6 位まで等しく, アル・カーシーは小数点以下 10 桁まで等しいことがわかる.

次に, 級数展開についてみていくことにする.

1.3.3 $\sin(x)$ の級数

$\sin x$ に対する級数(4.3)は, 次のように求められる. この議論はベルヌーイとオイラーによって述べられたものである.

ドモアブルの公式

$$\sin n\chi = n \sin \chi \cos^{n-1} \chi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 \chi \cos^{n-3} \chi + \dots$$

において、 $\chi = \frac{y}{N}$, $n = N$ と置き換える。そこで、 $N \rightarrow \infty$ に近づけると $\chi \rightarrow 0$ となる。

また、 $\sin \chi \approx \chi$ ($\chi \rightarrow 0$) なので、 $\sin x$ を x に置き換える。最後に $\frac{y}{N}$ を x に戻すと、(4.3)

が得られる。しかし、このベルヌーイとオイラーが述べた議論は現代の数学ではとても証明とはみなされないものである。

$$(4.3) \quad \sin \chi = \chi - \frac{\chi^3}{3!} + \frac{\chi^5}{5!} - \frac{\chi^7}{7!} + \frac{\chi^9}{9!} - \dots + (-1)^{i-1} \frac{\chi^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

ここで (4.3) の部分和のグラフを表示する。

```

1 PRINT " sin (x) の級数のグラフを表示するプログラム "
2 PRINT " n の値を入力してください "
3 OPTION BASE 0 ! 配列宣言で添字の下限の指定を省略したときの値を 0 にする
4 INPUT n
5 LET kmax = 3000 ! k の最大値を 3 0 0 0 とする
6 DIM f(kmax) ! 添字 f の上限を 10 とする, 下限は OPTION BASE 文の指定に従う
7 LET f(0) = 0
8 SET WINDOW 0, 30, - 5, 5
9 DRAW grid
10 REM i = 1 の場合の f(k) ! i = 1 の場合は個別に計算する
11 FOR k = 0 TO kmax
12 LET f(k) = x
13 LET x = k / 100 ! DIM 内では整数しか使えないから x の値を小さくする
14 PLOT LINES: x, f(k);
15 PRINT f(k)
16 NEXT k
17 FOR i = 2 TO n
18 PLOT LINES
19 FOR k = 0 TO kmax
20 LET f(k) = f(k) + (- 1)^(i - 1) * x ^ (2*i - 1) / fact (2*i - 1) ! sin(x) の漸化式
21 LET x = k / 100
22 IF ABS (f(k)) < 10 THEN ! 論理式 (|f(k)| < 10) が真のとき, 23 行を実行する
23 PLOT LINES: x, f(k);

```

```

24     END IF
25     PRINT f(k)
26     NEXT k
27 NEXT i
28 END
    
```

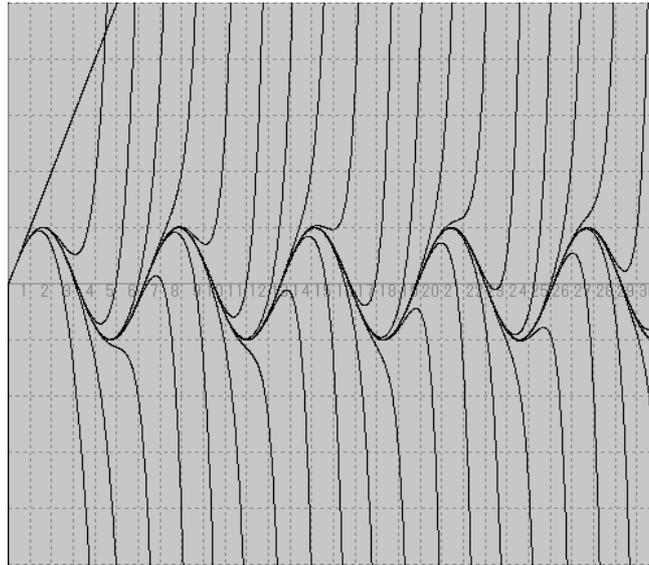


図 1.5 級数 $\sin x$ のテイラー展開の部分和のグラフ

1.3.4 $\cos(x)$ の級数

$\cos x$ に対する級数(4.4)も, 上記と同様に求められる. ドモアブルの公式

$$\cos n\chi = \cos^n \chi - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin^2 \chi \cos^{n-2} \chi + \dots$$

において, $\chi = \frac{y}{N}$, $n = N$ と置き換える. そこで, $N \rightarrow \infty$ に近づけると $\chi \rightarrow 0$ となる.

また, $\cos \chi \rightarrow 1$ ($\chi \rightarrow 0$) なので, $\cos x$ を 1 に置き換える. 最後に $\frac{y}{N}$ を x に戻すと (4.4)が得られる.

$$(4.4) \quad \cos \chi = 1 - \frac{\chi^2}{2!} + \frac{\chi^4}{4!} - \frac{\chi^6}{6!} + \frac{\chi^8}{8!} - \dots +$$

ここで (4.3) の部分和のグラフを表示する.

```

1 PRINT " cos (x) の級数のグラフをかくプログラム "
2 PRINT " n を入力してください "
    
```

```

3 OPTION BASE 0 ! 配列宣言で添字の下限の指定を省略したときの値を 0 にする
4 INPUT n
5 LET kmax = 3000 ! k の最大値を 3 0 0 0 とする
6 DIM f(kmax) ! 添字 f の上限を 3000 とする, 下限は OPTION BASE 文の指定に従う
7 LET f(0) = 0
8 SET WINDOW 0, 30, - 5, 5
9 DRAW grid
10 REM i=1 の場合の f(k)
11 FOR k = 0 TO kmax
12 LET f(k) = 1
13 LET x = k / 100
14 PLOT LINES: x, f(k);
15 NEXT k
16 FOR i = 2 TO n
17 PLOT LINES
18 FOR k = 0 TO kmax
19 LET f(k) = f(k) + (- 1)^(i - 1)*x^(2*(i - 1)) / fact(2*(i - 1)) ! cos(x)の漸化式
20 LET x = k / 100
21 IF ABS(f(k)) < 10 THEN
22 PLOT LINES: x, f(k);
23 END IF
24 PRINT f(k)
25 NEXT k
26 NEXT i
27 END

```

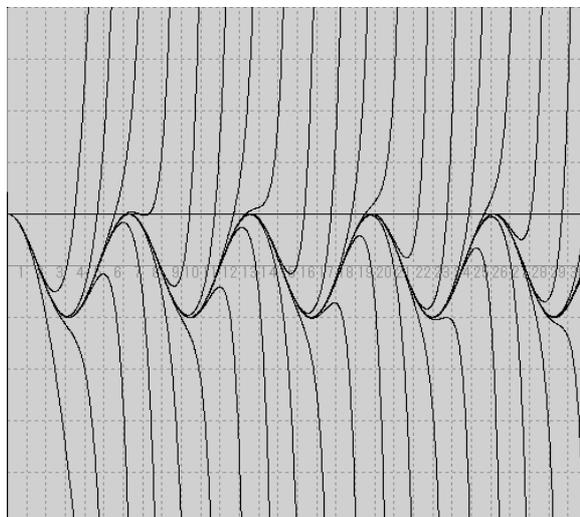


図 1.6 級数 $\cos x$ のテイラー展開の部分和のグラフ

第二章 逆正接関数(arctan)

2.1 の計算法の歴史

円周率は紀元前の時代から現代に至るまで、多くの人々の手によって計算されてきた。計算法の流れは大きく分けて以下の4つに分類することができる。

(1) 円に内接・外接する正多角形の周長の利用

アルキメデス(B C 3 C)は、円に内接する正6, 12, 24, 48角形の周の長さを計算し、最後に円に内接する正96角形の周を計算して、円周率は $3\frac{10}{71}$ より大きいことを発見し

た。さらに、円に外接する正96角形の周も計算し、円周率は $3\frac{1}{7}$ より小さいことを

発見した。つまり、 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ ということである。この他にも、内接または外

接する多角形の周長で円周率を求めた人物はたくさんいるが、内接・外接の両方から厳密な不等式評価を求めたのは、アルキメデスだけであった。

(2) 逆正接関数(Arctan)の Taylor 展開の利用

1500 頃にインドでマーダヴァによって発見された方法である。それと独立にヨーロッパでは1671年にグレゴリー・ライプニッツによって発見された。この方法は、手計算の時代から機械式計算機を経て、現代のコンピュータに至るまで使われ続けているものである。その過程の中で、数多くの公式が生み出され世界記録を更新し続けてきたのである。実際に、2006年の2月の世界記録桁数の計算にも一役かっている。

(3) A G M (算術幾何平均 : Arithmetic Geometric Mean) の利用

1976年に E.Salamin と R.P.Brent が、Gauss と Legendre の関係式を用いる方法である。この方法は、1971年に Strassen と Schonhage が発見した高速乗算法を利用することによって、Arctan の級数展開を利用する方法よりも有用になった。また、Borwein-Borwein が発見した方法もある。AGM については、第三章で詳しく述べたいと思う。

(4) D R M (分割有理数化法 : Divide and Rationalize Method)

1998年に後保範によって発見され、その後、金田 康正教授とともに2002年12月に計算桁数の世界新記録を達成したプログラムに採用された方法である。

DRM 法は級数の計算についての工夫で、arctan 公式、ラマヌジャン公式に適用できる。後保範の「分割有理数化法(DRM)による多数桁関数値計算と円周率計算の世界記録」(2005)は、各方法の計算量について

『十分なメモリが使用できる場合、1兆桁計算に必要な計算量は以下ようになる。

公式	1兆桁乗算との比
(1) Arctan + DRM	300 ~ 350
(2) AGM	300 ~ 350
(3) ラマヌジャン + DRM	100, 160, 210, ...

従来は、AGM 以外はすべて $O(n^2)$ (n :桁数)の計算量であったが、現在は(1)~(3)のいずれも、 $O(n(\log n)^{2-3})$ の計算量である。』と記されてあった。

2001年に刊行された、ドウラエ・ジャン＝ポールの「 π -魅惑の数」では、

『...もちろん項の再編成や、すでに計算した結果を巧妙に再利用するなどの高度なテクニックを用いて、増加した仕事を抑制することは可能に違いないが、級数による公式は放棄される傾向が見られる(P.100)』と記されている。

今回は DRM を詳しく学ぶに至らなかったため、文献からの引用にとどめ、詳しいことは割愛させてもらう。

それでは、第二章では、Arctan の Taylor 展開を利用して円周率を計算した人々の公式と、その公式の収束速度や効率性についてみていくことにする。

2.2 マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数

2.2.1 ライプニッツ級数

1682年に南インドのマーダヴァ、ヨーロッパのグレゴリー、ライプニッツは、 π と関連をもつ最初の無限級数として以下のライプニッツ級数を発見した。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

このことを示すために、まず Arctan のテイラー展開を求める。

$f(x) = \arctan x$ とし両辺を微分すると、

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \quad (|x| < 1)$$

これを項別積分することで、Arctan の Taylor 展開が得られる。

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \quad (|x| < 1) \quad (1)$$

また、この等式が $x = 1$ でも成り立つことを証明するために、以下の2つの定理を出しておく。

ライプニッツの定理

数列 $\{a_n\}$ に絶対値を付けた数列 $\{|a_n|\}$ が 0 に収束する減少数列であるような交代級数は収束する。

アーベルの連続定理

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束するならば $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が成り立つ.

まず、ライプニッツの定理より(1)の右辺の級数は $x = 1$ で収束する.

また、アーベルの連続定理によって $x = 1$ での値は $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ に等しい.

よって、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

となり、ライプニッツ級数が得られた.

したがって、ライプニッツ級数から円周率を求めるには次の和を計算すればよい.

$$\pi = 4 \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots \right\}$$

しかし、この級数は収束が大変遅く円周率の計算には向かない。実際に、Basicプログラムで $N = 10^j$ ($1 < j < 8$) 項までの和 $s(j)$ を計算してみる。

```

1 PRINT " ライプニッツ級数の部分和を表示するプログラム "
2 OPTION BASE 0
3 DIM s(10)
4 SET WINDOW -1, 9, -10, 5
5 DRAW grid(1, 1)
6 FOR j=1 to 8
7   LET N = 10 ^ j
8   LET s(j) = 0
9   FOR k=1 to x
10    LET t = ((-1)^(k-1)) / (2*k-1) * 4
11    LET s(j) = s(j) + t
12    PLOT LINES: log10(N), log10(pi - s(j));
13  NEXT k
14  PRINT N, log10(pi - s(j)), s(j)
15 NEXT j
16 END

```

j の値	N の値	$\log_{10} (\pi - s(j))$	s(j)
1	10	0.497	3.04183961892941
2	100	- 1.001	3.13159290355857
3	1000	- 2.000	3.1405926538397
4	10000	- 3.000	3.14149265358993
5	100000	- 4.000	3.14158265358892
6	1000000	- 4.999	3.14159165359054
7	10000000	- 6.000	3.1415925536
8	100000000	- 8.003	3.14159264366438

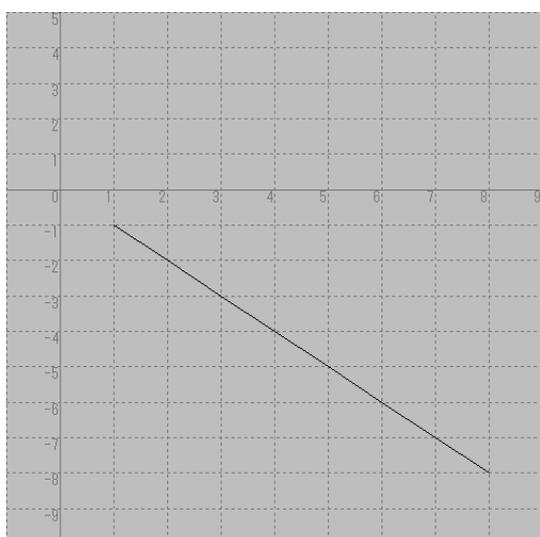


図 2.1 $\log_{10}(\pi - s(j))$ のグラフ

プログラムの結果から、横軸 N (項数) と、縦軸 $\log_{10}(\pi - s(j))$ (N 項での部分和) で現わしたグラフが左図である。これは、傾き - 1 の直線になっている。また、上の表から項数が 10 倍になると、一見正確な値であるかのように見える $s(j)$ の、誤差が現れる桁数が 1 桁ずつズレていっている。

つまり、精度を 1 桁上げるには項数を 10 倍にする必要があるということである。

以上のように、ライプニッツ級数では収束速度が大変遅く、効率が悪いことがプログラムの実行結果から得られた。では、ライプニッツよりは少し精度が上がったシャープの公式についてみていく。

2.2.2 Sharp の公式

アブラハム・シャープ(1651-1742)は以下の公式を使って、71 桁まで正確な値を計算することに成功した。この公式は、2.2.1 の(1)に $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入することで得られる。

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

この公式を用いることで、ライプニッツ級数よりも速く、より多くの桁数を計算できるようになった。

2.3 Arctan 級数を用いた人々の公式

2.3.1 ジョン・マチン(John-Machin)の公式 (1680 - 1752)

1706年に以下の2項公式を得たマチンは、当時の最高記録である100桁を求めるのに成功した。

以後、この公式は多くの人々に利用されることになった。

なかでも、1874年にWilliam Shanks (1812–1882)はマチンの公式を使って707桁まで計算したことでよく知られている。しかし、正確な値は526桁までしか得られていなかった。

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (2)$$

ここで、この式の証明を考えよう。

証明： 正接関数 \tan の加法定理

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

において

$$a = \tan \alpha, \quad b = \tan \beta$$

とおくと

$$\arctan a = \alpha, \quad \arctan b = \beta$$

と書き直すことができる。ただし、 $-\pi < \alpha$, $\beta < \pi$ とすると、式は

$$\alpha + \beta = \arctan \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

と書き換えられ、すなわち

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$

となる。この等式は $a = b$ とおけば

$$2 \arctan a = \arctan \frac{2a}{1-a^2}$$

と変形できる。よって、等式を用いて

$$2 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \arctan \frac{5}{12}$$

が得られる。また、同様にして

$$4 \arctan \frac{1}{5} = 2 \arctan \frac{5}{12} = \arctan \frac{\frac{5}{12} \cdot 2}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \arctan \frac{120}{119}$$

が導かれる。さらに、 $-\arctan \theta = \arctan(-\theta)$ に注意して、再び逆正接関数の加法定理 を使うと、

$$\begin{aligned} ((2)\text{の右辺}) &= 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \arctan \frac{120}{119} + \arctan \left(-\frac{1}{239}\right) \\ &= \arctan \frac{\frac{120}{119} + \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = ((2)\text{の左辺}) \end{aligned}$$

よって、式(2)が成り立つことが分かる。

では、この公式の収束をプログラムで試みることにする。

```

1 PRINT " ジョン・マチンの公式の和を表示するプログラム "
2 OPTION BASE 0
3 DIM s (10)
4 FOR j = 1 TO 10
5   LET n = 100*j
6   LET s (j) = 0
7   LET x = 1 / 5
8   LET y = 1 / 239
9   FOR k = 1 TO n
10  LET t = 4 * (((-1)^(k-1) / (2*k-1)) * 4*x^(2*k-1) - (((-1)^(k-1) / (2*k-1)) * y^(2*k-1)))
11    LET s(j) = s(j) + t
12  NEXT k
13  PRINT n
14  PRINT USING "-%.#####^#####":(PI-s(j))
15 NEXT j
16 END

```

j の値	n の値	$\log_{10} (\pi - s(j))$	- s(j) の値
1	100	- 141.608	2.4608E-0142
2	200	- 281.702	1.9818E-0282
3	300	- 421.672	2.1247E-0422
4	400	- 561.591	2.5617E-0562
5	500	- 701.482	3.2939E-0702
6	600	- 841.355	4.4116E-0842
7	700	- 981.216	6.0771E-0982
8	800	- 998.221	-6.0000E-0999
9	900	- 998.221	-6.0000E-0999
10	1000	- 998.221	-6.0000E-0999

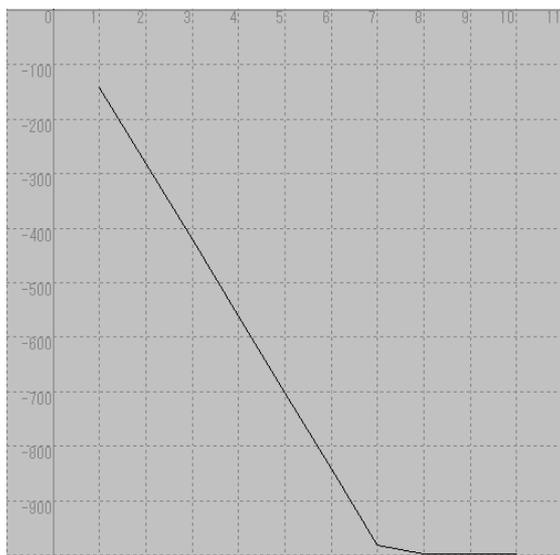


図 2.2 $\log_{10}(\pi - s(j))$ のグラフ

左図からこの公式の項数 j と、項数 j での部分和 $s(j)$ との誤差は、 $1 \leq j \leq 7$ の範囲で、傾き - 140 の直線をえがくことがわかった。

2.3.2 オイラー (Euler) の公式 (1707 - 1783)

1737年にオイラーが得た公式は

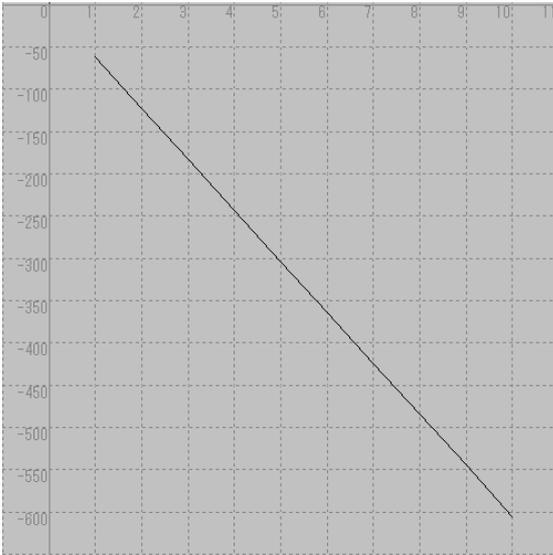
$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \quad (3)$$

である。この等式(3)も(2)と同様に証明できる。

証明： 上記の式

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$

を用いて

図 2.3 $\log_{10}(\pi - s(j))$ のグラフ

左図からこの公式の項数 j と、 π と項数 j での部分和 $s(j)$ との誤差は、 10^{-j} の範囲で、傾き -60 の直線をえがくことがわかった。

また、もう一つ 1755 年にオイラーが発見した公式がある。

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79} \quad (4)$$

である。この等式(4)も(2)と同様に証明できる。

証明： 上記の式

$$2 \arctan a = \arctan \frac{2a}{1-a^2}$$

を用いて

$$2 \arctan \frac{1}{7} = \arctan \frac{\frac{1}{7} \cdot 2}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \arctan \frac{7}{24}$$

$$4 \arctan \frac{1}{7} = 2 \arctan \frac{7}{24} = \arctan \frac{\frac{7}{24} \cdot 2}{1 - \left(\frac{7}{24}\right)^2} = \arctan \frac{336}{527}$$

よって、 $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$ を用いて

$$5 \arctan \frac{1}{7} = \arctan \frac{1}{7} + 4 \arctan \frac{1}{7} = \arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{336}{527} = \arctan \frac{\frac{1}{7} + \frac{336}{527}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{336}{527}} = \arctan \frac{2879}{3353}$$

また

$$2 \arctan \frac{3}{79} = \arctan \frac{\frac{3}{79} \cdot 2}{1 - \left(\frac{3}{79}\right)^2} = \arctan \frac{237}{3116}$$

したがって を用いて

$$\begin{aligned} ((4)\text{の右辺}) &= \arctan \frac{2879}{3353} + \arctan \frac{237}{3116} = \arctan \frac{\frac{2879}{3353} + \frac{237}{3116}}{1 - \frac{2879}{3353} \cdot \frac{237}{3116}} \\ &= \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = ((4)\text{の左辺}) \end{aligned}$$

よって、式(4)が成り立つことが分かる。

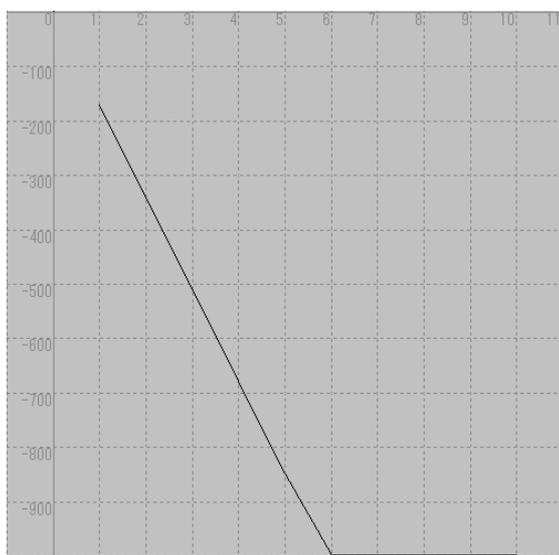
では、この公式の収束を Basic プログラムで試してみることにする。

```

1 PRINT " オイラーの公式を使って収束を調べる "
2 OPTION BASE 0
3 DIM s(10)
4 FOR j = 1 to 10
5   LET n = 100*j
6   LET s(j) = 0
7   LET x = 1/7
8   LET y = 3/79
9   FOR k = 1 TO n
10    LET t = 20*(((-1)^(k-1)/(2*k-1))*x^(2*k-1))
          + 8*(((-1)^(k-1)/(2*k-1))*y^(2*k-1))
11    LET s(j) = s(j)+t
12  NEXT k
13  PRINT n
14  PRINT USING " - %.#####^#####":(PI - s(j))
15 NEXT j
16 END

```

j の値	n の値	$\log_{10} (\pi - s(j))$	$\pi - s(j)$ の値
1	100	- 170.875	1.3318E-0171
2	200	- 340.195	6.3803E-0341
3	300	- 509.390	4.0690E-0510
4	400	- 678.534	2.9182E-0679
5	500	- 847.651	2.2320E-0848
6	600	- 997.958	1.1000E-0998
7	700	- 997.958	1.1000E-0998
8	800	- 997.958	1.1000E-0998
9	900	- 997.958	1.1000E-0998
10	1000	- 997.958	1.1000E-0998

図 2.4 $\log_{10}(\pi - s(j))$ のグラフ

左図からこの公式の項数 j と、 $\pi - s(j)$ と
項数 j での部分和 $s(j)$ との誤差は、 10^{-170j}
 $j \leq 6$ の範囲で、傾き -170 の直線
をえがくことがわかった。

ここで、マチンの公式、オイラーの公式の傾きとの関係性をみることにする。

各公式において、収束の足を引っ張っているのは、マチンの $(\arctan \frac{1}{5})$ 、オイラーの $(\arctan \frac{1}{2})$ 、オイラーの $(\arctan \frac{1}{7})$ の項である。これらとグラフにおける直線の傾きは、

$$\arctan \frac{1}{5} \text{ のとき 傾き } 140 \quad \text{剰余項 } R_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}$$

$$\arctan \frac{1}{2} \text{ のとき 傾き } 60 \quad \text{剰余項 } R_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\arctan \frac{1}{7} \text{ のとき 傾き } 170 \quad \text{剰余項 } R_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{7}\right)^{2n+1}$$

である。また、テイラー展開における剰余項の大体の大きさが後ろの部分である。この剰余

項を $n \rightarrow \infty$ としたときに、一番収束が早いのが $\left(\frac{1}{7}\right)^{2n+1}$ をもつ $\arctan \frac{1}{7}$ である。また、一番

収束が遅いのが $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ をもつ $\arctan \frac{1}{2}$ である。

2.3.3 ガウス(Gauss)の公式 (1777 - 1855)

1863年にガウスは3項公式のなかではおそらく最高の効率をもつ公式を発見した。この公式は1985年にフェルトンによって用いられ、1万21桁が得られた。その公式が

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} \quad (5)$$

である。

では、この公式の収束を Basic プログラムで試してみることにする。

```

1 PRINT " ガウスの公式を使って収束を調べるプログラム "
2 OPTION BASE 0
3 DIM s(10)
4 FOR j = 1 TO 10
5   LET n = 100*j
6   LET s(j) = 0
7   LET x = 1 / 18
8   LET y = 1 / 57
9   LET z = 1 / 239
10  FOR k = 1 TO n
11   LET t = 48*((( - 1)^(k - 1)/(2*k - 1))*x^(2*k - 1))
           + 32*((( - 1)^(k - 1)/(2*k - 1))*y^(2*k - 1))
           - 20*((( - 1)^(k - 1)/(2*k - 1))*z^(2*k - 1))
12   LET s(j) = s(j) + t
13 NEXT k

```

```

14 PRINT n
15 PRINT USING "-%.#####^#####": (PI - s(j))
16 NEXT j
17 END

```

j の値	n の値	$\log_{10}(\pi - s(j))$	$\pi - s(j)$ の値
1	100	- 252.933	1.1667E-0253
2	200	- 504.287	5.1581E-0505
3	300	- 755.517	3.0357E-0756
4	400	- 998.397	4.0000E-0999
5	500	- 998.397	4.0000E-0999
6	600	- 998.397	4.0000E-0999
7	700	- 998.397	4.0000E-0999
8	800	- 998.397	4.0000E-0999
9	900	- 998.397	4.0000E-0999
10	1000	- 998.397	4.0000E-0999

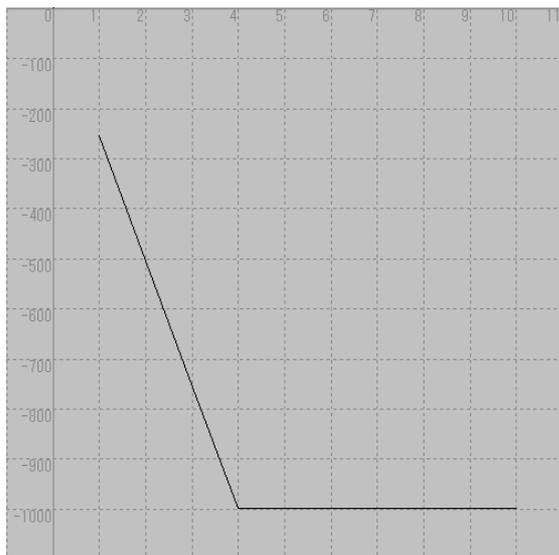


図 2.5 $\log_{10}(\pi - s(j))$ のグラフ

左図からこの公式の項数 j と、 j 項数 j での部分 and $s(j)$ との誤差は、 $1 \leq j \leq 4$ の範囲で、傾き -250 の直線をえがくことがわかった。

公式の中で $\frac{1}{18}$ が一番収束が遅い項であるから、あまり足を引っ張っていないと考えられる。

また、ガウスは 4 項公式も発見している。それが、

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{38} + 20 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} + 24 \arctan \frac{1}{268} \quad (6)$$

である。

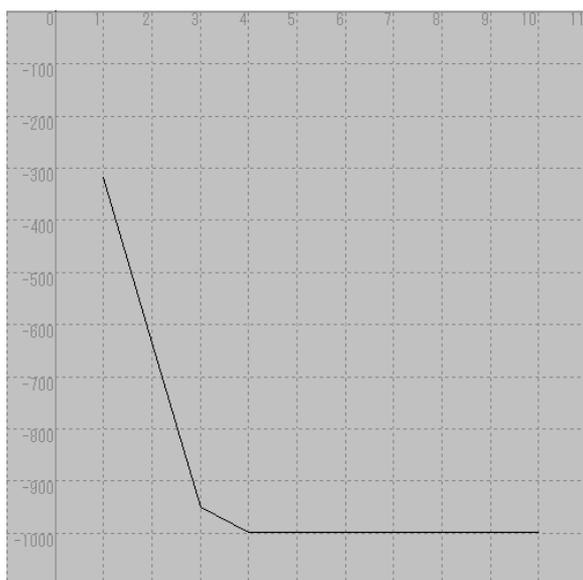
では、この公式の収束を Basic プログラムで試してみることにする。

```

1 PRINT " ガウスの公式を使って収束を調べるプログラム "
2  OPTION BASE 0
3  DIM s(10)
4  FOR j=1 TO 10
5      LET n=100*j
6      LET s(j)=0
7      LET x=1/38
8      LET y=1/57
9      LET z=1/239
10     LET r=1/268
11     FOR k=1 TO n
12         LET t=48*((( - 1)^(k - 1)/(2*k - 1))*x^(2*k - 1))
                +80*((( - 1)^(k - 1)/(2*k - 1))*y^(2*k - 1))
                +28*((( - 1)^(k - 1)/(2*k - 1))*z^(2*k - 1))
                +96*((( - 1)^(k - 1)/(2*k - 1))*r^(2*k - 1))
13         LET s(j)=s(j)+t
14     NEXT k
15     PRINT n
16     PRINT USING " - %.#####^#####": (PI - s(j))
17     NEXT j
18     END

```

j の値	n の値	$\log_{10} (\pi - s(j))$	$\pi - s(j)$ の値
1	100	- 318.158	6.9382E-0319
2	200	- 634.415	3.8422E-0635
3	300	- 950.547	2.8322E-0951
4	400	- 999	- 1.0000E-0999
5	500	- 999	- 1.0000E-0999
6	600	- 999	- 1.0000E-0999
7	700	- 999	- 1.0000E-0999
8	800	- 999	- 1.0000E-0999
9	900	- 999	- 1.0000E-0999
10	1000	- 999	- 1.0000E-0999

図 2.6 $\log_{10}(\pi - s(j))$ のグラフ

左図からこの公式の項数 j と、 π と項数 j での部分和 $s(j)$ との誤差は、 $10^{-j/3}$ の範囲で、傾き - 316 の直線をえがくことがわかった。

公式の中で $\frac{1}{38}$ が一番収束が遅い項であるから、あまり足を引っ張っていないと考えられる。

* 参考 *

高野喜久雄の「 π の arctangent relations を求めて」の中に、ガウスの 9 項公式が記されていたので、ここで紹介する。

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = & 2805 \arctan \frac{1}{5257} - 398 \arctan \frac{1}{9466} + 1950 \frac{1}{12943} \\ & + 1850 \arctan \frac{1}{34208} + 2021 \arctan \frac{1}{44179} + 2097 \arctan \frac{1}{85353} \\ & + 1484 \arctan \frac{1}{114669} + 1389 \arctan \frac{1}{330182} + 808 \arctan \frac{1}{485298} \end{aligned}$$

2.3.4 高野喜久雄の公式

1982 年に高野喜久雄はこの 4 項公式を得ることに成功し、この公式を使って 2002 年に 1 兆 2400 億桁という世界記録が樹立された。それが、

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443} \quad (7)$$

である。

高野喜久雄はどのような過程で公式発見に到達したのか？

彼は、一般探索法と連鎖探索法という2つの方法から Arctan 公式を導いた。詳しくは理解できなかったが、大まかには次のような方法である。

(1) **一般探索法** … 既知のいくつかの関係式から、連鎖を見つけずに公式を導く方法

$$\text{条件 } \left| \sum_{j=1}^n c_j \arctan \frac{1}{x_j} - \frac{\pi}{4} \right| < \pi \text{ をみたく逆正接関係式}$$

$$\sum_{j=1}^n c_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{\pi}{4} \quad (c_j : \text{整数}, x_j : \text{正整数}, j = 1, 2, \dots, n)$$

を考え、Basic プログラムを作成し公式を発見する方法

加法の関係式を有理数の範囲で繰り返し適用していくやり方に基づくプログラムを作成し公式を発見する方法

問題点

速度が遅いので、速くする工夫が必要であった

(2) **連鎖探索法** … 既知のいくつかの関係式から、連鎖をつないで公式を導く方法

これらの方法から、彼は100以上もの公式を発見している。

これだけの手間ひまをかけて、1つずつの公式を検証していく努力の過程が、世界記録を樹立した公式の発見につながったのだと感じた。

次に、その“高野の公式”と呼ばれるものについて述べることにする。

(高野喜久雄「 の arctangent relations を求めて」より)

では、この公式の収束を Basic プログラムでみてみることにする。

```
1 PRINT " 高野喜久雄の公式を使って収束を調べるプログラム "
```

```
2 OPTION BASE 0
```

```
3 DIM s(10)
```

```
4 FOR j = 1 TO 10
```

```
5   LET n = 100*j
```

```
6   LET s(j) = 0
```

```
7   LET x = 1/49
```

```
8   LET y = 1/57
```

```
9   LET z = 1/239
```

```

10 LET r = 1 / 110443
11 FOR k = 1 TO n
12 LET t = 48*((( - 1)^( k - 1) / ( 2*k - 1))*x^( 2*k - 1))
      +128*((( - 1)^( k - 1) / ( 2*k - 1))*y^( 2*k - 1))
      - 20*((( - 1)^( k - 1) / ( 2*k - 1))*z^( 2*k - 1))
      +48*((( - 1)^( k - 1) / ( 2*k - 1))*r^( 2*k - 1))
13 LET s(j) = s(j)+ t
14 NEXT k
15 PRINT n
16 PRINT USING " - %.#####^#####": (PI - s(j))
17 NEXT j
18 END

```

j の値	n の値	$\log_{10} (\pi - s(j))$	PI - s(j) の値
1	100	- 340.351	4.4510E-0341
2	200	- 678.690	2.0384E-0679
3	300	- 998.397	- 4.0000E-0999
4	400	- 998.397	- 4.0000E-0999
5	500	- 998.397	- 4.0000E-0999
6	600	- 998.397	- 4.0000E-0999
7	700	- 998.397	- 4.0000E-0999
8	800	- 998.397	- 4.0000E-0999
9	900	- 998.397	- 4.0000E-0999
10	1000	- 998.397	- 4.0000E-0999

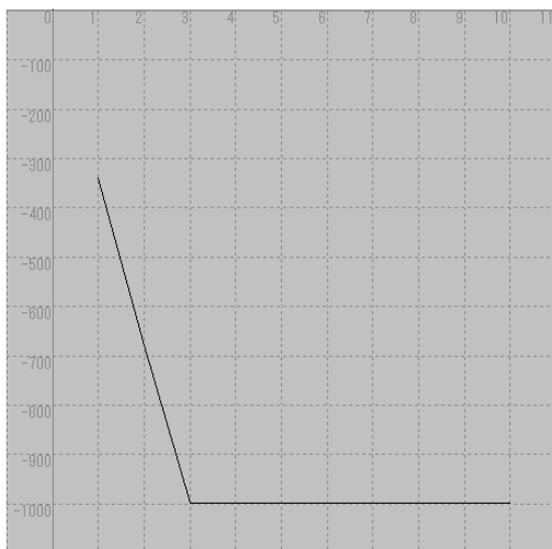
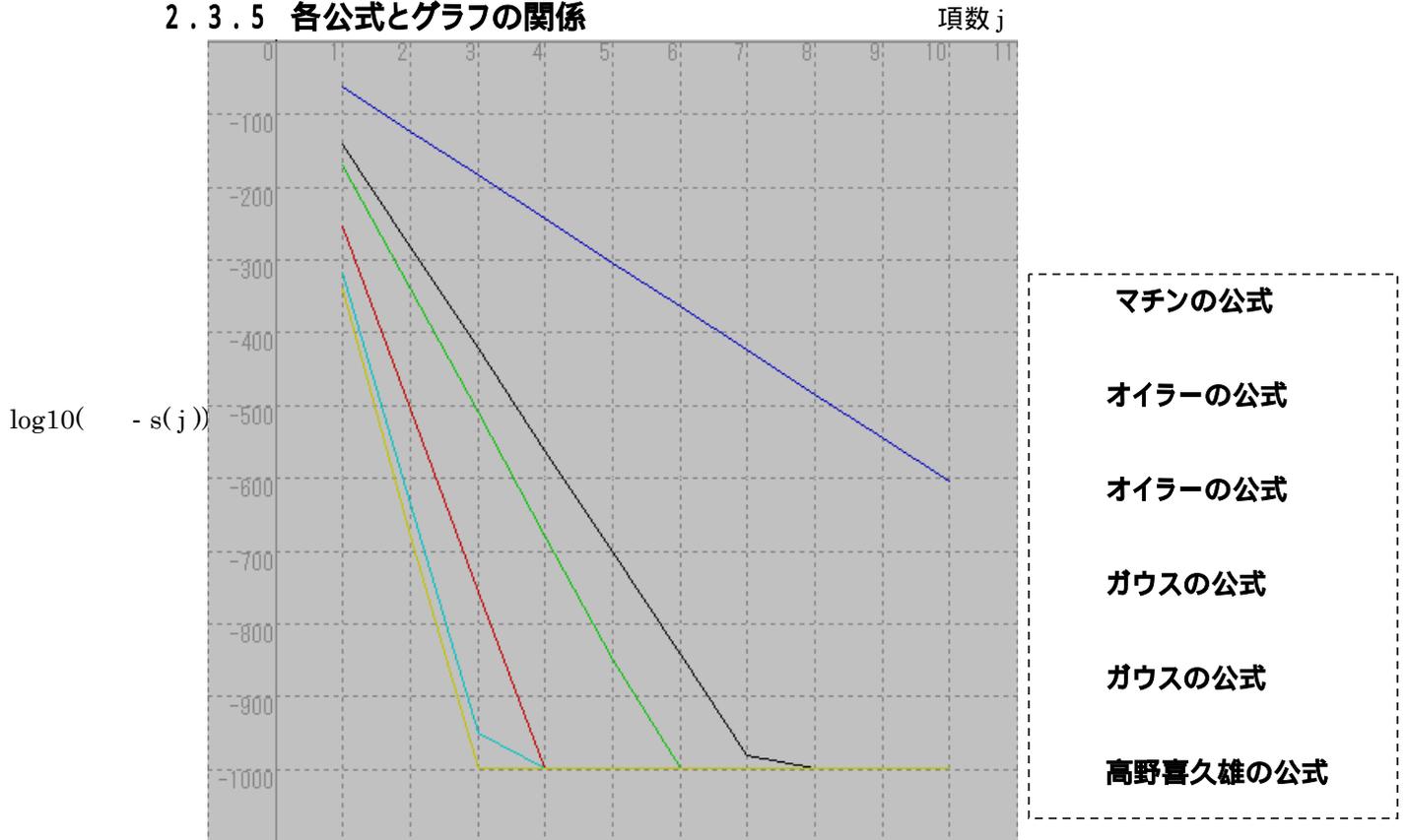


図 2.7 $\log_{10}(\pi - s(j))$ のグラフ

左図からこの公式の項数 j と、項数 j での部分和 $s(j)$ との誤差は、 $1 \leq j \leq 3$ の範囲で、傾き -324 の直線をえがくことがわかった。

公式の中で $\frac{1}{49}$ が一番収束が遅い項であるから、あまり足を引っ張っていないと考えられる。

2.3.5 各公式とグラフの関係

図 2.8 部分和の項数 j と誤差 $\log_{10}(-s(j))$ との関係

すでに述べてきた(2)~(7)までの公式について、部分和の項数 j と誤差 $\log_{10}(-s(j))$ との関係を図にすると上図ようになる。また下の表は各公式における $\arctan(x)$ の $|x|$ の値と、傾きの関係をまとめたものである。

$\arctan(x)$ の値	傾き	$\log_{10}(x)$
$\frac{1}{2}$	- 60	- 0.301
$\frac{1}{5}$	- 140	- 0.698
$\frac{1}{7}$	- 170	- 0.845
$\frac{1}{18}$	- 250	- 1.255
$\frac{1}{38}$	- 316	- 1.579
$\frac{1}{49}$	- 324	- 1.690

以上より、

- (i) グラフの傾きは、それぞれの公式において最も収束速度が遅い項（つまり、 $\arctan(x)$ の $|x|$ の値が大きい）による
- (ii) $\arctan(x)$ の $|x|$ の値が大きい項をもつ公式ほど、|傾き|が小さい
- (iii) $\log_{10}(x)$ の値と傾きを比較すると、 $\log_{10}(x)$ の値のおおよそ 200 倍が傾きになっていることがわかった。

このことを、調べてみると、次のようになる。

<Machin の公式を例にとって考える>

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

$x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{239}$ とおき, Taylor 展開をすると,

$$\pi = 4 \left\{ 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} y^{2k-1} \right\}$$

となる。また $n=100$ j での部分和 $s(j)$ は,

$$S(j) = 4 \left\{ 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} y^{2k-1} \right\}$$

となる。よって、 $\pi - s(j)$ との誤差は,

$$|\pi - S(j)| \leq \left| 4 \left\{ 4 \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} - \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} \right\} \right|$$

となる。つまり、 $|\pi - s(j)|$ は $(n+1)$ 項目の値よりも小さくなる。さらに、 y^{2n+1} は

$y = \frac{1}{239}$ が非常に小さいので無視すると,

$$|\pi - S(j)| \leq \left| 4 \left\{ 4 \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} - \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} \right\} \right| \approx 16 \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

といえる。ここで両辺の対数をとると,

$$\begin{aligned} \log_{10} |\pi - S(j)| &= \log_{10} 16 - \log_{10} (2n+1) + (2n+1) \log_{10} x \\ &= 2n \log_{10} x - \log_{10} (2n+1) + \underbrace{(\log_{10} 16 + \log_{10} x)}_{\text{定数}} \end{aligned}$$

定数

となり、この右辺は n に関する直線の式になっている。この直線における傾きは前の 2 項であるが、 $\log_{10} (2n+1)$ という値は非常に小さい値なので考えないものとする、傾きは $2n \log_{10} x = 200 \log_{10} x$ になる。

よって、 $\log_{10} x$ の 200 倍が傾きとなり、グラフから得られた結果と等しくなることが調べられた。

第三章 算術幾何平均(AGM)

3.1 イントロ

円周率 を計算する方法としてアメリカのユージン・サラミンとオーストラリアのリチャード・ブレントにより、第一種完全楕円積分と第二種完全楕円積分に関するルジャンドルの関係式と Gauss, "the fundamental limit theorem" の二つの関係式を用いて1976年にそれぞれ独立かつ同時に発見された公式をガウス・ルジャンドルの公式(サラミン・ブレントの公式)と呼ぶ.

この章では、まず算術幾何平均について説明をして、ガウス・ルジャンドルの公式(サラミン・ブレントの公式)を利用して円周率 を計算してみる.

3.2 算術幾何平均と楕円積分

a, b を正の数とすると、不等式

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

が成り立つ. 実数 $a \geq b > 0$ が与えられたとき、

$$a_0 = a, \quad b_0 = b$$

とおく. さらに、数列 $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$ を以下のように定める.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0 + b_0}{2}, & b_1 &= \sqrt{a_0 b_0}, \\ a_2 &= \frac{a_1 + b_1}{2}, & b_2 &= \sqrt{a_1 b_1}, \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

正確に表現すれば、帰納的に、

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と定義する. 数学的帰納法により、

$$a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n$$

が、すべての n について成立することが分かる. つまり、

$$a \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq a_{n+2} \geq \dots \geq b_{n+2} \geq b_{n+1} \geq b_n \geq \dots \geq b \quad (3.1.1)$$

が成り立つ. 数列 $\{a_n\}$ は有界な減少数列であるので収束する. 数列 $\{b_n\}$

も有界な増加数列であるので収束して、(3.1.1)より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ。

一方、

$$0 < a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \quad (3.1.2)$$

である。この不等式を繰り返し使うことによって、

$$0 < a_{n+1} - b_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (a_0 - b_0)$$

となるので、数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は共通の極限に収束する。この値を a と b の算術幾何平均 (arithmetic-geometric mean) と呼び、 $M(a, b)$ で表す。

3.3 第一種完全楕円積分と第二種完全楕円積分

第一種完全楕円積分は次式で定義される。

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (0 \leq k < 1)$$

この積分を k の関数と考えて、

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.2.1)$$

とする。後ろの式は $x = \sin \theta$ と変換して得られる。

そして、 $k^2 + k'^2 = 1$ となる k' をとり

さらに、

$$K'(k) := K(k')$$

と定義する。

一方、第二種完全楕円積分は次式で定義される。

$$E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (0 \leq k < 1)$$

この積分を k の関数と考えて、

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad (3.2.2)$$

とする．後ろの式は $x = \sin \theta$ と変換して得られる．

さきほどと同様に、 $k^2 + k'^2 = 1$ となる k' をとり、

$$E'(k) := E(k')$$

と定義する．

算術幾何平均は楕円関数と深い関係がある．

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

の、 $k^2 = -1$ の場合

$$\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

を考える．1799年5月30日、ガウスは計算の結果、算術幾何平均 $M(\sqrt{2}, 1)$ と $\frac{\pi}{2\omega}$ が小数点以下第11桁まで一致することを発見した．その日のガウスの日記には次のことが記してあるという．

このようにして、 $\sqrt{2}$ と 1 の算術幾何平均と $\frac{\pi}{2\omega}$ が一致することが分かった．
この事実の証明は必ず解析学の全く新しい分野を開くであろう．

ガウスの発見した事実は、次のような一般的な定理として述べることができる．以下、 $a \geq b > 0$ に対して、積分

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.2.3)$$

を定義する．

定理 3.1 (Gauss, " the fundamental limit theorem ")

$a \geq b > 0$ とすると、等式

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(a, b)}$$

が成立する .

証明 :

積分 $I(a, b)$ を $t = b \tan \theta$ で変換すると、

$$dt = \frac{b}{\cos^2 \theta} d\theta$$

であるので、

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

ここで、この右辺の積分を、

$$u = \frac{1}{2} \left(t + \frac{ab}{t} \right) \quad (3.2.5)$$

で変換する . (3.2.5) より、

$$u^2 + ab = \left\{ \frac{1}{2} \left(t + \frac{ab}{t} \right) \right\}^2 = t^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ab}{t^2} \right) \right\}^2 \quad (3.2.6)$$

$$du = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ab}{t^2} \right) dt \quad (3.2.7)$$

である . (3.2.6) (3.2.7) より、

$$du = \sqrt{\frac{u^2 + ab}{t^2}} dt \quad (3.2.8)$$

よって、(3.2.8) より、

$$\frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} = \frac{\sqrt{t^2} du}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)} \sqrt{ab + u^2}} \quad (3.2.9)$$

一方、(3.2.5) の両辺を二乗すると、

$$\frac{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}{t^2} = 4u^2 + (a+b)^2 \quad (3.2.10)$$

である．変換 $u = \frac{1}{2}(t - \frac{ab}{t})$ のグラフに注意すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \end{aligned}$$

(3.2.9) (3.2.10) より、

$$\begin{aligned} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a+b)^2 + 4u^2} \sqrt{ab+u^2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right\} (ab+u^2)}} \end{aligned}$$

つまり、

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right\} (ab+u^2)}} \quad (3.2.11)$$

(3.2.4) (3.2.11) より、

$$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \quad (3.2.12)$$

(3.2.12) を繰り返し用いると、

$$I(a,b) = I(a_1, b_1) = I(a_2, b_2) = \dots = I(M(a,b), M(a,b)) \quad (3.2.13)$$

一方、定義より、

$$\begin{aligned} I(M(a,b), M(a,b)) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{M(a,b)^2 \cos^2 \theta + M(a,b)^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.2.14) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{M(a,b)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(a,b)} \end{aligned}$$

(3.2.13), (3.2.14) より、

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(a,b)}$$

となり、定理 3.1 が証明された。

次に、積分
$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}$$

と第一種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (3.2.15)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.2.16)$$

の関係を見てみる。

(3.2.16) より、

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + (1-k^2) \sin^2 \theta}} \quad (3.2.17)$$

k^2 が実数であって、 $0 < k^2 < 1$ であれば、(3.2.3) (3.2.17) より、

$$K(k) = I(1, \sqrt{1-k^2}) = I(1, k') \quad (3.2.18)$$

ここで、 $k' = \sqrt{1-k^2}$ であるので、定理 3.1 により、

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(1, k')} \quad (3.2.19)$$

である。 k は実数ではないが、 k^2 が負の実数のなるときは、(3.2.15) を $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ で変換すると、

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta'}{\sqrt{(1-k^2) \cos^2 \theta' + \sin^2 \theta'}} \quad (3.2.20)$$

となり、定理 3.1 の証明より、

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(\sqrt{1-k^2}, 1)} \quad (3.2.21)$$

特に、 $k^2 = -1$ のときは、(3.2.21)より、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(\sqrt{2},1)}$$

となり、1799年にガウスが発見したことが証明できた。

命題 3.1 (完全楕円積分の性質)

$0 < k < 1, k^2 + k'^2 = 1$ とすると、次の等式が成り立つ。

() $K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(1, k')}$

() $K(k) = \frac{1}{1+k} K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$

() $K(k) = \frac{2}{1+k'} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)$

() $E(k) = \frac{1+k}{2} E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) + \frac{k'^2}{2} K(k)$

() $E(k) = (1+k') E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) - k' K(k)$

証明：

() は等式 (3.2.19) で証明済みである。

() ~ () については参考文献 [8] の P.272 ~ P.274 を参考にしてください。

次に $a > b > 0$ に対して、

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (3.2.22)$$

とおく。

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \theta} d\theta \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

ここで、(3.2.2)より、

$$= aE\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)$$

つまり、

$$J(a,b) = aE\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right) \quad (3.2.23)$$

である。

$a > b > 0$ から数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty$ ができる。

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (3.2.24)$$

とおく。

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (3.2.25)$$

であるので、(3.2.24) (3.2.25) より、

$$a_n = a_{n+1} + c_{n+1}, \quad b_n = a_{n+1} - c_{n+1} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (3.2.26)$$

が成り立つ。(3.3.24) の両辺を二乗することにより、

$$c_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (3.2.27)$$

が成立することがわかる。 $c_0 = \sqrt{a_0^2 - b_0^2}$ とおく。

命題 3.2

$n=0,1,2,\dots$ に対して、等式

$$2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) = a_n b_n I(a_n, b_n)$$

が成立する。

証明：

$$k_n = \frac{c_n}{a_n} \quad (3.2.28)$$

とおくと、(3.2.27) より、

$$k_n' := \sqrt{1-k_n^2} = \frac{b_n}{a_n} \quad (\because k^2 + k'^2 = 1) \quad (3.2.29)$$

である。(3.2.24) より、

$$\begin{aligned}
 2J(a_{n+1}, b_{n+1}) &= 2a_{n+1}E\left(\sqrt{1 - \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2}}\right) \\
 &= 2a_{n+1}E\left(\sqrt{\frac{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2}}\right) \\
 &= 2a_{n+1}E\left(\frac{c_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \\
 &= 2a_{n+1}E(k_{n+1}) \quad (\because (3.2.28)) \qquad (3.2.30)
 \end{aligned}$$

となる.

同様にして、

$$J(a_n, b_n) = a_n E\left(\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{a_n^2}}\right) = a_n E(k_n) \qquad (3.2.31)$$

が成り立つ. (3.2.24) \wedge (3.2.25) \wedge (3.2.28) \wedge (3.2.29) より、

$$k_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n} \qquad (3.2.32)$$

(3.2.30) \wedge (3.2.31) より、

$$2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) = 2a_{n+1}E(k_{n+1}) - a_n E(k_n)$$

したがって、

$$2a_{n+1}E(k_{n+1}) - a_n E(k_n) = a_n b_n I(a_n, b_n) \qquad (3.2.33)$$

を示せばよい.

一方、

$$\begin{aligned}
 a_n b_n I(a_n, b_n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \quad (\because (3.2.3)) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \left(\frac{b_n^2}{a_n^2}\right) \sin^2 \theta}} \\
 &= I\left(1, \frac{b_n}{a_n}\right)
 \end{aligned}$$

(3.2.18)より、

$$= K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2} \right) \\ = K(k_n)$$

したがって、(3.2.33)は、

$$2a_{n+1}E(k_{n+1}) - a_nE(k_n) = b_nK(k_n) \quad (3.2.34)$$

と同値である。

$2a_{n+1} = a_n + b_n$ を(3.2.34)に代入し、 a_n で割ると、証明すべき式は、

$$\left(1 + \frac{b_n}{a_n} \right) E(k_{n+1}) - E(k_n) = \frac{b_n}{a_n} K(k_n)$$

となり、(3.2.29) (3.2.32)より

$$(1 + k'_n)E\left(\frac{1 - k'_n}{1 + k'_n}\right) - E(k_n) = k'_nK(k_n)$$

すなわち、

$$E(k) = (1 + k')E\left(\frac{1 - k'}{1 + k'}\right) - k'K(k)$$

この式は命題3.1の()に他ならない。

命題3.3

$a > b > 0$ に対して、等式

$$J(a, b) = \left(a - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) I(a, b)$$

が成立する。

証明：

命題3.2より、

$$2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) = a_n b_n I(a_n, b_n) = a_0 b_0 I(a_0, b_0) \quad (3.2.35)$$

が成り立つ。($n = 0, 1, 2, \dots$)

一方、(3.2.25)の両辺を二乗すると、

$$4a_{n+1}^2 = (a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n)$$

両辺に $-2a_n^2 - 2a_n b_n$ を加えると、

$$4a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - 2a_nb_n = -a_n^2 + b_n^2 = c_n^2 \quad (3.2.36)$$

ここで、

$$A_n = 2^n (J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_0, b_0))$$

とおくと、

$$A_{n+1} - A_n = 2^{n+1} (J(a_{n+1}, b_{n+1}) - a_{n+1}^2 I(a_0, b_0)) - 2^n (J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_0, b_0))$$

(3.2.35) より、

$$= 2^{n-1} (2a_nb_n - 4a_{n+1}^2 + 2a_n^2) I(a_0, b_0)$$

(3.2.36) より、

$$= 2^{n-1} c_n^2 I(a_0, b_0) \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (3.2.37)$$

(3.2.37) を n について加えると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I(a_0, b_0) \quad (3.2.38)$$

ここで、

$$S_N = \sum_{n=0}^N (A_{n+1} - A_n) = A_{N+1} - A_0 \quad (3.2.39)$$

であるので、 A_n の定義より、

$$\begin{aligned} -A_n &= 2^n (a_n^2 I(a_0, b_0) - J(a_n, b_n)) \\ &= 2^n (a_n^2 I(a_n, b_n) - J(a_n, b_n)) \\ &= 2^n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2 d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta} d\theta \right) \\ &= 2^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a_n^2 - b_n^2) \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \\ &= 2^n c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \quad (\because 3.2.27) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} 0 \leq -A_n &< 2^n c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \\ &= 2^n c_n^2 I(a_n, b_n) = 2^n c_n^2 I(a_0, b_0) \end{aligned}$$

である .

c_{n+1} の定義式 (3 . 2 . 2 4) および、(3 . 2 . 2 7) より、

$$4a_n c_n = a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2 = c_{n-1}^2$$

であり、 c_n について解くと、

$$c_n = \frac{1}{4} \left(\frac{c_{n-1}}{a_n} \right) c_{n-1} \quad (3 . 2 . 4 0)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, 任意の整数 $n \geq 0$ について $a_n > b > 0$ であるので、十分大きな整数 M をとれば、

$n > M$ なる任意の整数 n について、

$$0 \leq \frac{c_{n-1}}{a_n} < 1$$

が成り立つ . (3 . 2 . 4 0) より、 $n > M$ ならば、

$$c_n = \frac{1}{4} \left(\frac{c_{n-1}}{a_n} \right) c_{n-1} < \frac{1}{4} c_{n-1} \quad (3 . 2 . 4 1)$$

(3 . 2 . 4 1) を繰り返し使うことによって、 $n > M$ ならば、

$$0 \leq c_n < \left(\frac{1}{2} \right)^{2(n-M)} c_M \quad (3 . 2 . 4 2)$$

よって、

$$0 \leq 2^n c_n < 2^M c_M \left(\frac{1}{2} \right)^{n-M}$$

となるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n c_n = 0$$

である .

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n c_n^2 = 0$$

また、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_{N+1} = 0$$

つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -A_0 \quad (3.2.43)$$

そして、

$$A_0 = J(a_0, b_0) - a_0^2 I(a_0, b_0) \quad (3.2.44)$$

であるので、

(3.2.40) (3.2.41) (3.2.43) (3.2.44) より、

$$J(a_0, b_0) = \left(a_0 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) I(a_0, b_0)$$

定理 3.2

$K(k), K(k')$ は線形微分方程式

$$(k^3 - k) \frac{d^2 y}{dk^2} + (3k^2 - 1) \frac{dy}{dk} + ky = 0$$

の解である。

証明：

参考文献 [8] の P.209 ~ P.210 を参考にして下さい。

定理 3.3

$E(k), K(k)$ は次の微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k} \\ \frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2 K}{kk'^2} \end{cases}$$

証明：

参考文献 [8] の P.214 ~ P.215 を参考にして下さい。

定理 3.4 ルジャンドル (Legendre) の関係式

$0 < k < 1$ のとき、等式

$$E(k)K'(k) + E'(k)K(k) - K(k)K'(k) = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。

証明：

定理 3.2 により、 $K(k), K(k')$ は線形微分方程式

$$(k^3 - k) \frac{d^2 y}{dk^2} + (3k^2 - 1) \frac{dy}{dk} + ky = 0$$

の解であるので、 $H_1(k) = \frac{\sqrt{k}}{k'K(k)}$, $H_2(k) = \frac{\sqrt{k}}{k'K'(k)}$ とおくと、

$H_1(k), H_2(k)$ は微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dk^2} = -\frac{1}{4k^2} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 y$$

の解になることが計算によりわかる。すなわち、

$$\frac{d^2 H_1}{dk^2} = -\frac{1}{4k^2} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 H_1,$$

$$\frac{d^2 H_2}{dk^2} = -\frac{1}{4k^2} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 H_2$$

である。したがって、

$$\frac{\left(\frac{d^2 H_1}{dk^2} \right)}{H_1} = \frac{\left(\frac{d^2 H_2}{dk^2} \right)}{H_2} \quad (3.2.45)$$

ここで、

$$W = \frac{dH_1}{dk} H_2 - H_1 \frac{dH_2}{dk}$$

を考える。(3.2.45) より、

$$\frac{dW}{dk} = 0$$

となるので、 W は定数 c に等しい。

$$W = c \quad (3.2.46)$$

等式 (3.2.46) を K, K' で表すと

$$k(1-k^2) \left(\frac{dK}{dk} K' - K \frac{dK'}{dk} \right) = c$$

となる。

定理 3.3 の下の等式より、

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E - (1-k^2)K}{k(1-k^2)} \quad (3.2.47)$$

$$\frac{dK'}{dk'} = \frac{E' - (1 - k'^2)K'}{k'(1 - k'^2)} \quad (3.2.48)$$

が成り立つ． $k^2 + k'^2 = 1$ であるので、

$$\frac{d}{dk} = -\frac{k}{k'} \cdot \frac{d}{dk'}$$

したがって、(3.2.48)より、

$$\frac{dK'}{dk} = -\frac{E' - (1 - k'^2)K'}{k'^2 k} = -\frac{E' - k^2 K'}{(1 - k^2)k} \quad (3.2.49)$$

(3.2.47)と(3.2.49)を使って、(3.2.46)から $\frac{dK}{dk}$, $\frac{dK'}{dk'}$ を消去すると、

$$EK' - KK' + KE' = c \quad (3.2.50)$$

c は k によらない定数である． c の値を定めるには、 $k \rightarrow 0$ とすればよい．

(3.2.1)と(3.2.2)より、 $k \rightarrow 0$ のとき、

$$K(k) \rightarrow \frac{\pi}{2}, E(k) \rightarrow \frac{\pi}{2}, E'(k) \rightarrow 1 \quad (3.2.51)$$

である．一方、 $k \rightarrow 0$ のとき、

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$$

であり、

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \right)$$

であるので、この積分は ∞ に発散している．

$EK' - KK' = (E - K)K'$ は $k \rightarrow 0$ のとき、 $0 \times \infty$ の不定形になるが、実は k の極限は0となる．

そうすれば(3.2.50)(3.2.51)より、 $c = \frac{\pi}{2}$ となる．

すなわち、 $\lim_{k \rightarrow 0} (E - K)K' = 0$

を示せばよい．

まず、 $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$, $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$ について考える．

$$\begin{aligned}
 E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(-k^2 \sin^2 \theta) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-k^2 \sin^2 \theta)^2 + \dots \right\} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{8}k^4 \sin^4 \theta + \dots \right\} d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}k^2 - \frac{3\pi}{128}k^4 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-k^2 \sin^2 \theta) + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-k^2 \sin^2 \theta)^2 + \dots \right\} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \theta + \frac{3}{8}k^4 \sin^4 \theta + \dots \right\} d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2 + \frac{9\pi}{128}k^4 + \dots
 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
 E(k) - K(k) &= -\frac{\pi}{4}k^2 - \frac{3\pi}{32}k^4 + \dots \\
 \therefore E - K &= O(k^2) \qquad (3.2.52)
 \end{aligned}$$

次に $K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ より、

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}} \text{ が成り立つので、 } s = \frac{1}{x} \text{ で変換すると、}$$

$$K' = \int_k^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-k^2)(1-x^2)}}$$

となる．次の二つの不等式に注意する．

$$k < x < \sqrt{k} \text{ならば、} 1-k < 1-x^2 < 1$$

$$\sqrt{k} < x < 1 \text{ならば、} 1-k < \frac{x^2-k^2}{x^2} < 1$$

したがって、

$$A < K' < B \quad (3.2.53)$$

ここで、

$$A = \int_k^{\sqrt{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}} + \int_{\sqrt{k}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1-k}} \left(\int_k^{\sqrt{k}} \frac{dx}{x^2-k^2} \right) + \int_{\sqrt{k}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

また、

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha} = \log|x + \sqrt{x^2+\alpha}|$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a} \log \left| \frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right|$$

である。

ここで、 A, B を計算すると、

$$A = \int_k^{\sqrt{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}} + \int_{\sqrt{k}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[\log|x + \sqrt{x^2-k^2}| \right]_k^{\sqrt{k}} + \left[-\frac{1}{1} \log \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| \right]_{\sqrt{k}}^1$$

$$= \left\{ \log(\sqrt{k} + \sqrt{k-k^2}) - \log k \right\} - \left\{ -\log \frac{1 + \sqrt{1-k}}{\sqrt{k}} \right\}$$

$$= \log \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-k^2}}{k} + \log \frac{1 + \sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1-k}} A$$

となる。

(3.2.53)より、 $0 < \vartheta < 1$ となる ϑ が存在して、

$$K' = \frac{1}{\sqrt{1-\vartheta k}} \times A$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{1-9k}} \log \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-k^2}}{k} + \log \frac{1+\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-9k}} \{2\log(1+\sqrt{1-k}) - \log k\} \qquad (3.2.54)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{1-9k}} \log(1+\sqrt{1-k}) - \log 4 \right) = 0$$

および、

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-9k}} \right) \log k = 0$$

に注意すると、

(3.2.54) より、

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left(K' - \log \frac{4}{k} \right) = 0 \qquad (3.2.55)$$

を得る .

(3.2.54) \(\wedge\) (3.2.55) より、

$$\lim_{k \rightarrow 0} (E - K)K' = 0$$

となり、 $c = \frac{\pi}{2}$ が示せた .

よって、定理 3.4 は示された .

系 3.1

$0 < k < 1$ が与えられたとき、 $a = 1, b = k' := \sqrt{1-k^2}$ ととると、等式

$$E(k) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) K(k)$$

が成り立つ .

証明 :

$a = 1, b = k' := \sqrt{1-k^2}$ とすれば、(3.2.18) \(\wedge\) (3.2.23) により、

$$I(1, k') = K(k), \quad J(1, k') = E(k)$$

であるので、命題 3.3 より系は導かれる .

3.4 算術幾何平均による π の計算

楕円積分 $K(k)$, $E(k)$ が算術幾何平均を使って計算できることと定理 3.4 ルジャンドル (Legendre) の関係式を組み合わせることによって π の計算ができる.

特に、 $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とすると、 $k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となり、簡単になる.

定理 3.4 より、

$$2K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

両辺に $\frac{2}{\pi^2}$ をかけると、

$$\frac{2}{\pi}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{2}{\pi}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{\pi}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2 = \frac{1}{\pi} \quad (3.3.1)$$

$a=1, b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ として、算術幾何平均を考えると、(3.2.20) より

$$\frac{2}{\pi}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad (3.3.2)$$

系 3.1 より、

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) \frac{2}{\pi}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) \frac{1}{M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

ここで、(3.3.2) (3.3.3) を (3.3.1) に代入すると、

$$\frac{1}{M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \left\{ \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) \frac{1}{M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \right\}^2 = \frac{1}{\pi}$$

したがって、

$$\pi = \frac{2M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}$$

である .

3.5 ガウス・ルジャンドルの公式

$$a_0 = 1, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, t_0 = \frac{1}{4} \quad \text{として、}$$

以下の反復式を a_n と b_n の差が所要桁以上になるまで計算する.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}, t_n = t_{n-1} - 2^{n-1} (a_n - a_{n-1})^2$$

所要桁になったら円周率は、

$$\pi \approx \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}$$

と求められる .

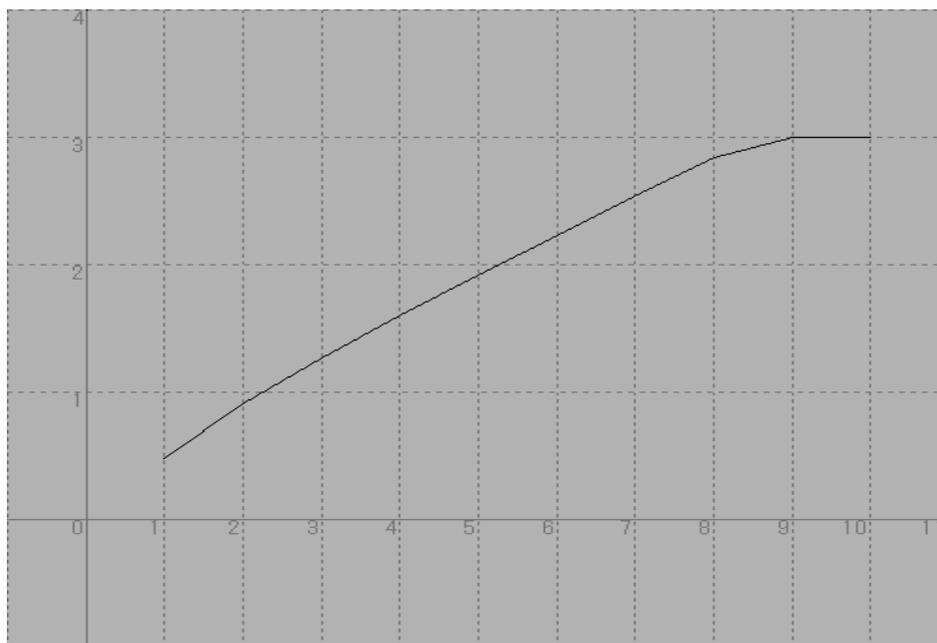
そして、ガウス・ルジャンドルの公式をプログラム化すると以下になる.

```

1 PRINT "ガウス・ルジャンドルの公式を使って求めるプログラム"
2 OPTION BASE 0                16 LET n=maxn
3 DIM A(100)                   17 LET K=(A(n)+B(n))^2/(4*T(n))
4 DIM B(100)                   18 PRINT K
5 DIM T(100)                   19 END
6 LET A(0)=1
7 LET B(0)=1/SQR(2)
8 LET T(0)=1/4
9 LET maxn=10
10 FOR n=1 TO maxn
11 LET A(n)=(A(n-1)+B(n-1))/2
12 LET B(n)=SQR(A(n-1)*B(n-1))
13 LET T(n)=T(n-1)-2^(n-1)*(A(n)-A(n-1))^2
14 PRINT USING "### -%.#####^ ^ ^ ^ ^ ^": n,PI-(A(n)+B(n))^2/(4*T(n))
15 NEXT n
    
```

< 実行結果 >

n	\log_{10} (誤差)	$\log_{10} \log_{10} (\text{誤差}) $	誤差
1	- 2.99421910004535	0.476283576387522	1.0134E-0003
2	- 8.13216142849251	0.910205991068765	7.3763E-0009
3	- 18.7372405045939	1.27270563127577	1.8313E-0019
4	- 40.2618459746923	1.60489368307732	5.4721E-0041
5	- 83.6186863268941	1.9223033403794	2.4061E-0084
6	- 170.636651308677	2.23207231963058	2.3086E-0171
7	- 244.975268110345	2.53778796084657	1.0586E-0345
8	- 693.954285941059	2.84133086236055	1.1110E-0694
9	- 999.823272242356	2.99992324132716	- 1.5022E-1000
10	- 999.823272242356	2.99992324132716	- 1.5022E-1000



< 縦軸 : $\log_{10} | \log_{10} (\text{誤差}) |$ 、横軸 : 回数 n >

fig 1 . 誤差

上の結果をみてみると、との誤差を1回目と2回目、2回目と3回目、3回目と4回目・・・と比べてみると計算精度が約2倍ずつになっていることがわかる。

このプログラムは1000桁モードであるので9回目、10回目は1000桁を超えてしまっているので参考にはならない。

3.141592653	5897932384	6264338327	9502884197	1693993751	0582097494
4592307816	4062862089	9862803482	5342117067	9821480865	1328230664
7093844609	5505822317	2535940812	8481117450	2841027019	3852110555
9644622948	9549303819	6442881097	5665933446	1284756482	3378678316
5271201909	1456485669	2346034861	0454326648	2133936072	6024914127
3724587006	6063155881	7488152092	0962829254	0917153643	6789259036
0011330530	5488204665	2138414695	1941511609	4330572703	6575959195
3092186117	3819326117	9310511854	8074462379	9627495673	5188575272
4891227938	1830119491	2983367336	2440656643	0860213949	4639522473
7190702179	8609437027	7053921717	6293176752	3846748184	6766940513
2000568127	1452635608	2778577134	2757789609	1736371787	2146844090
1224953430	1465495853	7105079227	9689258923	5420199561	1212902196
0864034418	1598136297	7477130996	0518707211	3499999983	7297804995
1059731732	8160963185	9502445945	5346908302	6425223082	5334468503
5261931188	1710100031	3783875288	6587533208	3814206171	7766914730
3598253490	4287554687	3115956286	3882353787	5937519577	8185778053
2171226806	6130019278	7661119590	9216420199		

ここで、 $\pi = \frac{2M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2} \Rightarrow \pi \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}$ の導きについて考える。

まず、

$$\frac{(a_n + b_n)^2}{4} = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 = a_{n+1}^2 \rightarrow M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

となる。

次に、ガウス・ルジャンドルの公式より、

$$t_0 = \frac{1}{4}, t_n = t_{n-1} - 2^{n-1}(a_n - a_{n-1})^2 \text{ についての漸化式をたてると、}$$

$$t_n = \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^n 2^{k-1}(a_k - a_{k-1})^2$$

となる。

また、 $t_n = \frac{1 - \sum_{k=0}^n 2^k c_k^2}{2}$ と考えられる .

$$\begin{aligned}
 t_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n 2^k c_k^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(c_0^2 + \sum_{k=1}^n 2^k c_k^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 2^k c_k^2 \right) \quad (\because c_0^2 = (a_0^2 - b_0^2)) \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^k c_k^2 \\
 &= \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} c_k^2 \\
 &= \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} (a_k^2 - b_k^2) \quad (\because c_k^2 = (a_k^2 - b_k^2)) \\
 &= \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} (a_n - a_{n-1})^2 \quad \dots
 \end{aligned}$$

以上より、

$$\pi = \frac{2M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2} \Rightarrow \pi = \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}$$

となることがわかる .

<p>< 補足 ></p> <p>の証明</p> $ \begin{aligned} a_k^2 - b_k^2 &= \left(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} \right)^2 - (\sqrt{a_{k-1} b_{k-1}})^2 \\ &= \left(\frac{a_{k-1} - b_{k-1}}{2} \right)^2 \\ a_k - a_{k-1} &= \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} - a_{k-1} \\ &= \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} \\ \therefore a_k^2 - b_k^2 &= (a_k - a_{k-1})^2 \end{aligned} $

3.6 ボールウェインの4次式

$A = 6 - 4\sqrt{2}, Y = \sqrt{2} - 1, K = 0$ として、

以下の反復式を A と Y の差が所要桁以上になるまで計算する。

$$Y = \frac{1 - (1 - Y^4)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - Y^4)^{\frac{1}{4}}}, A = A(1 + Y)^4 - 2^{(2K+3)}Y(1 + Y + Y^2), K = K + 1$$

所要桁になったら円周率は、

$$\pi \approx \frac{1}{A}$$

と求められる。

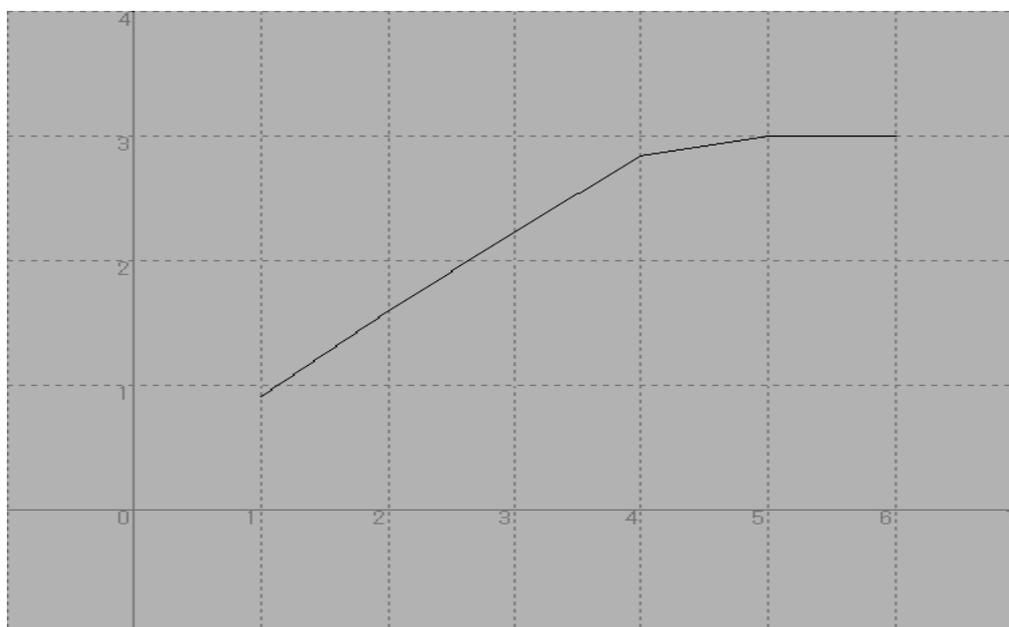
そして、ボールウェインの4次式をプログラム化すると以下になる。

```

1 PRINT "ボールウェインの4次式を使って求めるプログラム"
2 LET A=6-4*SQR(2)
3 LET Y=SQR(2)-1
4 LET K=0
5 FOR N=1 TO 6
6   LET x=sqr(sqr(1-y^4))
7   LET Y=(1-x)/(1+x)
8   LET A=A*(1+Y)^4-2^(2*K+3)*Y*(1+Y+Y^2)
9   LET K=K+1
10  PRINT USING "### -%.#####^ ^ ^ ^ ^ ^": n,PI-1/A
11 NEXT N
12 LET T=1/A
13 PRINT T
14 END
    
```

< 実行結果 >

n	\log_{10} 誤差	$\log_{10} \log_{10}(\text{誤差}) $	誤差
1	- 8.13216142849251	0.910205991068765	7.3763E-0009
2	- 40.2618459746923	1.60489368307732	5.4721E-0041
3	- 170.636651308677	2.23207231963058	2.3086E-0171
4	- 693.954285941059	2.8413308623605	1.1110E-0694
5	- 998.048691629463	2.99915172965425	8.9394E-0999
6	- 998.048691629463	2.99915172965425	8.9394E-0999



< 縦軸 : $\log_{10} | \log_{10}(\text{誤差}) |$ 、横軸 : 回数 n >

fig 2 . 誤差

上の結果をみてみると、 どの誤差を1回目と2回目、2回目と3回目、3回目と4回目・・・と比べてみると計算精度が約4倍ずつになっていることがわかる。

このプログラムは1000桁モードであるので5回目、6回目は1000桁を超えてしまっているので参考にはならない。

ガウス・ルジャンドル公式とポールウェインの4次式ではポールウェインの4次式の方が計算が速い

3.141592653	5897932384	6264338327	9502884197	1693993751	0582097494
4592307816	4062862089	9862803482	5342117067	9821480865	1328230664
7093844609	5505822317	2535940812	8481117450	2841027019	3852110555
9644622948	9549303819	6442881097	5665933446	1284756482	3378678316
5271201909	1456485669	2346034861	0454326648	2133936072	6024914127
3724587006	6063155881	7488152092	0962829254	0917153643	6789259036
0011330530	5488204665	2138414695	1941511609	4330572703	6575959195
3092186117	3819326117	9310511854	8074462379	9627495673	5188575272
4891227938	1830119491	2983367336	2440656643	0860213949	4639522473
7190702179	8609437027	7053921717	6293176752	3846748184	6766940513
2000568127	1452635608	2778577134	2757789609	1736371787	2146844090
1224953430	1465495853	7105079227	9689258923	5420199561	1212902196
0864034418	1598136297	7477130996	0518707211	3499999983	7297804995
1059731732	8160963185	9502445945	5346908302	6425223082	5334468503
5261931188	1710100031	3783875288	6587533208	3814206171	7766914730
3598253490	4287554687	3115956286	3882353787	5937519577	8185778053
2171226806	6130019278	7661119590	921642019		

ガウス・ルジャンドルの公式とボールウェインの4次式を比べて見ると、ガウス・ルジャンドルの方で n を2増やすと計算精度が4倍ボールウェインの4次の方で n を1増やす計算精度が4倍となり同等の値を求められる。計算の際に算術幾何平均では必要な演算は有理数の加減乗除のみであり、ボールウェイン1に対して、ガウス・ルジャンドルは2倍の計算の手間が掛かる。

西洋・インドでの計算

人物・地域・出典	年代	記録・ の値	方法・公式
アーメス・パピルス (エジプト)	B.C.1650 頃	$256/81 \approx 3.16$	直径9の円と一辺8の正方形の面積 が大体等しい
スーサ書板 (バビロニア)	B.C.1600 頃	3.125	正6角形の円周(別に内接や外接す る物ではない)
シュルバースートラ (インド)	B.C.500 頃	3.09	
アルキメデス (ギリシャ)	B.C.250 頃	$211875/67441$ ≈ 3.1416	円に内接・外接する正96角形の面積
ウマスヴァティー (インド)	B.C.150 頃	3.16	正6角形・正12角形を内接
プトレマイオス	87-165	$195882/62351$ ≈ 3.16016	
劉徽 (中国)	260 頃	3.1416	正96角形の辺の長さ
祖沖之 (中国)	480	3.1415926	正24576角形の辺の長さ
アールヤバタ (インド)	500	3.1416	内接正384角形の辺の長さ?
アルクワリズミ (アラビア)	937-1038	3.141745...	
バースカラ	1114-1185	3.1416, 3.141666...	
マーダヴァ (インド)	1400 頃	小数点以下 11 桁	無限級数展開
アル=カーシー (ペルシャ)	1429	小数点以下 16 桁	正805306368($3 \cdot 2^{28}$)角形の辺の長さ
アドリアン・メティウス	1527-1607	$355/113 \approx 3.1415929$	
ピエタ	1540-1603	小数点以下 10 桁	正393216($3 \cdot 2^{17}$)角形の面積
フランソワ・ヴィエート	1579	小数点以下 9 桁	正393216($3 \cdot 2^{17}$)角形の辺の長さ
アドリアン・パン・ルーマン (オランダ)	1593	小数点以下 9 桁	
ロマヌス	1561-1615	小数点以下 15 桁	正83886080($2^{24} \cdot 5$)角形の面積

ルドルフ (Ludolf van Ceulen)	1596	小数点以下 20 桁	正 515396075520(2 ³⁵ *3*5 角形の面積)
ルドルフ (Ludolf van Ceulen)	1540-1610	小数点以下 35 桁	正 4611686018427387904(2 ⁶²)角形の面積
アイザック・ニュートン	1665	小数点以下 15 桁	
アブラハム・シャープ	1706	小数点以下 71 桁	
ジョン・マチン	1706	小数点以下 99 桁	マチンの公式
ド・ラグニー	1719	小数点以下 126 桁	
ベガ	1794	小数点以下 139 桁	
ウィリアム・ラザフォード	1824	小数点以下 151 桁	
ヨハン・ダーゼ	1844	小数点以下 204 桁	ダーゼの公式
トーマス・クラウゼン	1847	小数点以下 247 桁	
ウィリアム・ラザフォー	1853	小数点以下 439 桁	
リヒター	1855	小数点以下 499 桁	
ウィリアム・シャンクス	1874	小数点以下 526 桁	マチンの公式
ファーガソン	1946	小数点以下 619 桁	
ファーガソン	1947.1	小数点以下 709 桁	
ファーガソン	1947.9	小数点以下 807 桁	

日本での計算

氏名	年・月	計算記録	方法・公式
村松茂清	1661	小数点以下 7 桁	正 2 ¹⁵ 角形の面積
古郡之政	1674	22/7,157/50,355/113	
奥田有益	1683	小数点以下 2 桁	
磯村吉徳	1683	小数点以下 3 桁	
古郡解	1696	小数点以下 3 桁	
三宅賢隆	1699	小数点以下 6 桁	
関孝和	1712	小数点以下 11 桁	エイトケン加速
建部賢弘	1722	小数点以下 41 桁	リチャードソン加速
鎌田俊清	1722	小数点以下 25 桁	正 2 ⁴⁴ 角形の面積
松永良弼	18c	小数点以下 52 桁	日本の和算における最高記録

コンピュータによる計算

～ 円周率の歴史 ～

円周率の値を何桁まで求められるか、世界一の座を賭けて日本とアメリカで、いずれもスーパーコンピュータを駆使した熱闘が繰り広げられています。

氏名	年・月	精度 (計算桁数)	使用機種	使用公式
リトワイズナー	1949	2,037 (2,040)	ENIAC	M(M)
ニコルソン、ジーネル	1954	3,092 (3,093)	NORC	M(M)
フェルトン	1957	7,480 (10,021)	Pegasus	K(G)
ジェネトン	1958	10,000 (10,000)	IBM 704	K(G)
フェルトン	1958	7480 (10,021)	Pegasus	K(G)
ギュー	1959	16,167 (16,167)	IBM 704	M(M)
シャンクス、レンチ	1961	100,265 (100,265)	IBM 7090	S(G)
ギュー、フィリヤトル	1966	250,000 (250,000)	IBM 7030	G(S)
ギュー、ディシャン	1967	500,000 (500,000)	CDC 6600	G(S)
ギュー、ブーエ	1973	1,001,250 (1,001,250)	CDC 7600	G(S)
三好、金田	1981	2,000,036 (2,000,040)	FACOM M-200	K(M)
ギュー	1981 - 1982	2,000,050 (不詳)	未確認	(不詳)
田村	1982	2,097,144 (2,097,152)	MELCOM 900	L(L)

田村、金田	1982	4,194,288 (4,194,304)	HITAC M-280H	L(L)
田村、金田	1982	8,388,576 (8388608)	HITAC M-280H	L(L)
金田、吉野、田村	1983	16,777,216 (16,777,216)	HITAC M-280H	L(L)
後、金田	1983.10	10,013,395 (10,013,400)	HITAC S-810/20	G(L)
ゴスパー	1985.10	17,526,200 (17,526,200 以上)	Symbolics 3670	R(B4)
ベイリー	1986.1	29,360,111 (29,360,128)	CRAY-2	B4(B2)
金田、田村	1986.9	33,554,414 (33,554,432)	HITAC S-810/20	L(L)
金田、田村	1986.10	67,108,864 (67,108,864)	HITAC S-810/20	L(L)
金田、田村、久保等	1987.1	134,214,700 (134,214,728)	NEC SX-2	L(B2)
金田、田村	1988.1	201,326,551 (201,326,572)	HITAC S-820/80	L(B4)
チュドノフスキー兄弟	1989.5	480,000,000 以上 (480,000,000?)	CRAY-2 IBM-3093/VF	C(C)
チュドノフスキー兄弟	1989.5	535,339,270 以上 (535,339,270?)	IBM 3090	C(不詳)
金田、田村	1989.7	536,870,898 (536,870,120)	HITAC S-82/80	L(B4)
チュドノフスキー兄弟	1989.8	1,011,196,691? (1,011,196,691 以上)	IBM 3090	C(C)
金田、田村	1989.11	1,073,741,799 (1,073,741,824)	HITAC S-82/80	L(B4)
チュドノフスキー兄弟	1991.8	2,260,000,000 (不詳)	自作の計算機	C(C)
高橋、金田	1995.6	3,221,220,000 (3,221,225,472)	HITAC S-3800/480	B4(L)
高橋、金田	1995.8	4,294,960,000 (4,294,967,296)	HITAC S-3800/480	B4(L)

高橋、金田	1995.10	6,442,450,000 (6,442,450,944)	HITAC S-3800/480	B4(L)
チュドノフスキー兄弟	1996.3	8,000,000,000? (8,000,000,000 以上)	自作の計算機	C(C)
高橋、金田	1997.4	17,179,869,184 (17,179,869,142)	HITACHI SR2201	L(B4)
高橋、金田	1997.5	34,359,738,327) (34,359,738,368)	HITACHI SR2201	B4(L)
高橋、金田	1997.8	51,539,600,000 (51,539,600,000)	HITACHI SR2201	B4(L)
高橋、金田	1999.4	68,719,470,000 (68,719,470,000)	HITACHI SR8000	L(B4)
高橋、金田	1999.9	206,158,430,000 (206,158,430,000)	HITACHI SR8000	L(B4)
高橋、金田	2002.11	1,241,100,000,000 (1,241,177,304,180)	HITACHI SR8000/MPP	T(S) &DRM

M: マチンの公式、S: シュテルマーの公式、G: ガウスの公式、K: クリンゲンシェルナ、L: ガウス・ルジャンドル(サラミン・プレントの公式)、R: ラマヌジャンの公式、B2: ボールウェイン2次式、B4: ボールウェイン4次式、C: チュドノフスキーの公式、T: 高野喜久雄の公式

参考文献

- [1] E. ハイラー, G. ワナー 著, 蟹江幸博 訳, 解析教程 上, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1997)
- [2] 桂田祐史, ノート, 明治大学数学科助教授 (2004)
- [3] 清水康生, の数値解析, 明治大学数学科 2003 年度卒業研究レポート (2004)
- [4] ペートル・ベックマン 著, 田尾陽一, 清水韶光 訳, の歴史, 蒼樹書房 (1973)
- [5] 数学文化, Vol.1, 日本数学協会 (2003)
- [6] 金田康正, のはなし, 東京書籍 (1991)
- [7] 和田秀男, 高速乗算法と素数判定法 マイコンによる円周率の計算 上智大学数学教室 No.15 (1983)
- [8] 梅村浩, 楕円関数論, 東京大学出版会 (1999)
- [9] ドウラエ・ジャン = ポール(Jean-Paul Delahaye)著, 畑政義 訳, 魅惑の数, 朝倉書店 (2001)
- [10] 後 保範, 分割有理数化法(DRM)による多数桁関数値計算と円周率計算の世界記録, <http://www.hucc.hokudai.ac.jp/pdf/Ushiro/20050224gijyutsu/paper4/paper.pdf> (2005/1/25, 2005/3/3)
- [11] 高野喜久雄, のarctangent relations を求めて, bit, (1983/4), pp.83-91.
- [12] 松元隆二, 円周率の公式集
http://pluto50.pluto.ai.kyutech.ac.jp/plt/matumoto/pi_small/_pi_small.html
- [13] 金田康正, 金田研究室ホームページ, <http://pi2.cc.u-tokyo.ac.jp/index-j.html>
- [14] 円周率 について, <http://reciter1415.hp.infoseek.co.jp/index.html>
- [15] のページ, <http://hp.vector.co.jp/authors/VA014765/pi/index.html>

謝辞

本卒業研究を行うにあたり、熱心に御指導・御鞭撻下さいました桂田祐史助教授に深く感謝の意を表すと共に、厚く御礼申し上げます。

最後に、桂田祐史助教授の更なる御栄達、御健勝と当研究室の更なる御発展を心よりお祈り致します。

1 年半ありがとうございました。

平成 18 年 2 月 鎌田 伊織 吉本 清夏