応用複素関数 第 3 回
〜 留数定理の応用 (3) 級数の和計算 (続き) 〜

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2023 年 4 月 25 日

目次

1. 連絡事項&本日の内容
2. 留数定理の応用 (続き
   - 級数の和 (続き)
     - s_1, s_2, s_3 の性質 (続き)
     - 和の公式とその証明
     - 級数の和の公式の適用例
     - Basel 問題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (有名な問題への一つの解)
3. 余談 1: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開
4. 余談 2: Euler による sin の無限積展開
5. 参考文献

連絡事項&本日の内容

- 留数定理の応用 級数の和の続きを解説する。

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\right).$$

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、位数は 1. 実際

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = n.$$

さらに $\frac{d}{dz}(\sin \pi z)\Big|_{z=n} = \pi \cos(n\pi) = (-1)^n \pi \neq 0.$

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi\,\mathrm{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、位数は 1. 実際

  $$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = n.$$

  さらに $\left.\frac{d}{dz}(\sin \pi z)\right|_{z=n} = \pi\cos(n\pi) = (-1)^n\pi \neq 0.$
- s_1, s_2, s_3 の極は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、その位数は 1. 留数は

  $$\mathrm{Res}\,(s_1; n) = \left.\frac{\pi}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = (-1)^n,$$

  $$\mathrm{Res}\,(s_3; n) = \mathrm{Res}\,(s_2; n) = \left.\frac{\pi\cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = 1.$$

以下の積分路 Γ_N $(N \in \mathbb{N})$ をしばしば用いる。

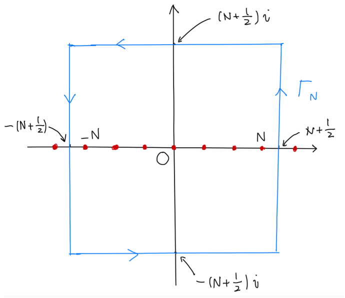

図 1: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

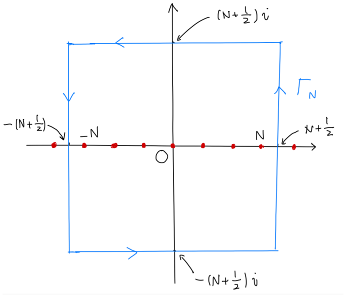

図 1: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$.

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

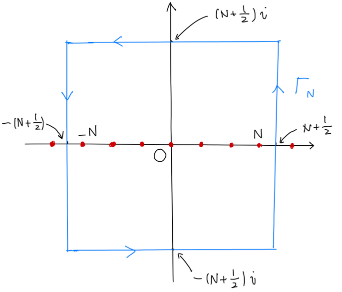

図 1: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$.
- $|s_j(z)| \leq 2\pi$ ($j=1,2$; $z \in \Gamma_N^*$).
  (この不等式の証明に難しいところはないが、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [1] §1.3 には書いてある。)

1.2.3 和の公式とその証明

定理 3.1 (級数の和の公式)

$P(z),\ Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall n \in \mathbb{Z})\ P(n) \neq 0$,
$f = \dfrac{Q}{P}$ とするとき

$$(1)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_2; c\right),$$

$$(2)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_1; c\right),$$

$$(3)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f(z) s_3(z) e^{iz\theta}; c\right) \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

((3) の左辺は Fourier 級数の形をしていることに注意。)

1.2.3 和の公式とその証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

1.2.3 和の公式とその証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N \in \mathbb{N}$ は $N \geq R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0; R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

1.2.3 和の公式とその証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R\in\mathbb{R})(\exists C\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{C}:|z|\ge R)\quad P(z)\ne 0\land |f(z)|\le\frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N\in\mathbb{N}$ は $N\ge R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0;R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=-N}^{N}\operatorname{Res}(fs_j;k)+2\pi i\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}}\operatorname{Res}(fs_j;c).$$

1.2.3 和の公式とその証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N \in \mathbb{N}$ は $N \geq R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0; R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z) s_j(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^{N} \operatorname{Res}\left(f s_j; k\right) + 2\pi i \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f s_j; c\right).$$

k は s_j の 1 位の極であり、f は k のある近傍で正則であるから

$$\operatorname{Res}(f s_j; k) = f(k) \operatorname{Res}\left(s_j; k\right) = \begin{cases} (-1)^k f(k) & (j = 1) \\ f(k) & (j = 2). \end{cases}$$

1.2.3 和の公式とその証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R\in\mathbb{R})(\exists C\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{C}:|z|\ge R)\quad P(z)\ne 0\wedge|f(z)|\le\frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N\in\mathbb{N}$ は $N\ge R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0;R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=-N}^{N}\operatorname{Res}(fs_j;k) + 2\pi i\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(fs_j;c).$$

k は s_j の 1 位の極であり、f は k のある近傍で正則であるから

$$\operatorname{Res}(fs_j;k) = f(k)\operatorname{Res}(s_j;k) = \begin{cases}(-1)^k f(k) & (j=1)\\ f(k) & (j=2).\end{cases}$$

後は $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz=0$ を示せば良い。$|f(z)|\le\dfrac{C}{N^2}$ $(z\in\Gamma_N)$ であるから

$$\left|\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz\right|\le\int_{\Gamma_N}|f(z)|\,|s_j(z)|\,|dz|\le\frac{C}{N^2}\cdot 2\pi\int_{\Gamma_N}|dz|$$
$$=\frac{2\pi C}{N^2}\cdot 4(2N+1)\to 0\quad(N\to\infty).\qquad\square$$

1.2.4 級数の和の公式の適用例

例 3.2

$a > 0$ とするとき $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよう。

例 3.2

$a > 0$ とするとき $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよう。

関数 $f(z) := \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ は、定理 3.1 の仮定を満たす。また f は偶関数であるから

$$2S + \frac{1}{a^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}\,(fs_2; c)\,.$$

1.2.4 級数の和の公式の適用例

例 3.2

$a > 0$ とするとき $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよう。

関数 $f(z) := \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ は、定理 3.1 の仮定を満たす。また f は偶関数であるから

$$2S + \frac{1}{a^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f s_2; c\right).$$

f の極 c は $c = \pm ia$ で位数は 1 であるから

$$\operatorname{Res}\left(f\, s_2; c\right) = s_2(c) \operatorname{Res}\left(f; c\right) = \pi \cot(\pm i\pi a)) \cdot \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm ia}$$

$$= \pi(-i \coth(\pm\pi a)) \cdot \frac{1}{\pm 2ia} = -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a).$$

(ただし $\cot(iz) = -i \coth z$ を用いた。これについては次ページで説明する。)

例 3.2

$a>0$ とするとき $S:=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$ を求めよう。

関数 $f(z):=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ は、定理 3.1 の仮定を満たす。また f は偶関数であるから

$$2S+\frac{1}{a^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=-\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}}\operatorname{Res}(fs_2;c).$$

f の極 c は $c=\pm ia$ で位数は 1 であるから

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f\,s_2;c)&=s_2(c)\operatorname{Res}(f;c)=\pi\cot(\pm i\pi a))\cdot\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm ia}\\&=\pi(-i\coth(\pm\pi a))\cdot\frac{1}{\pm 2ia}=-\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a).\end{aligned}$$

(ただし $\cot(iz)=-i\coth z$ を用いた。これについては次ページで説明する。)
ゆえに

$$2S+\frac{1}{a^2}=\frac{\pi}{a}\coth(\pi a).\quad\therefore\quad S=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth(\pi a)-\frac{1}{a^2}\right).\quad\square$$

メモ: 三角関数、双曲線関数の iz での値

板書では必要なものだけを書くのか。

(必要になったとき自分で導くものだろうけれど、書いてあると安心。)

よく知られた

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2},$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}.$$

メモ: 三角関数、双曲線関数の iz での値

板書では必要なものだけを書くのか。

(必要になったとき自分で導くものだろうけれど、書いてあると安心。)

よく知られた

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},$$

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z},\quad \cot z=\frac{1}{\tan z},\quad \coth z=\frac{1}{\tanh z}.$$

から容易に次が導ける。

$$\cosh(iz)=\cos z,\quad \sinh(iz)=i\sin z,\quad \tanh(iz)=i\tan z,$$

$$\cos(iz)=\cosh z,\quad \sin(iz)=i\sinh z,\quad \tan(iz)=i\tanh z,$$

$$\coth(iz)=-i\cot z,\quad \cot(iz)=-i\coth z.$$

1.2.5 Basel 問題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

1.2.5 Basel 問題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 $(\forall n\in\mathbb{Z})\ P(n)\neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge P(n)\neq 0} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(fs_2; c\right). \tag{4}$$

1.2.5 Basel 問題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 $(\forall n\in\mathbb{Z})\ P(n)\neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

(4)
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge P(n)\neq 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_2; c).$$

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ の場合にこれを用いると

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge n^2\neq 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_2; c) = -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}; 0\right).$$

1.2.5 Basel 問題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 $(\forall n\in\mathbb{Z})\ P(n)\neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

(4)
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge P(n)\neq 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_2; c).$$

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ の場合にこれを用いると

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge n^2\neq 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_2; c) = -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}; 0\right).$$

ところで

$$\cot z=\frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}+\cdots \quad (0<|z|<\pi)$$

1.2.5 Basel 問題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 $(\forall n\in\mathbb{Z})\ P(n)\neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

(4)
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge P(n)\neq 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_2; c).$$

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ の場合にこれを用いると

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge n^2\neq 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_2; c) = -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}; 0\right).$$

ところで

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \cdots \quad (0<|z|<\pi)$$

であるから (2022 年度複素関数第 26 回 に tan の場合の求め方がある)

$$\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{1}{z} - \frac{\pi^4}{45}z + \cdots \quad (0<|z|<1).$$

ゆえに $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}; 0\right) = -\dfrac{\pi^2}{3}$. ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

$\cot z$ の $z=0$ での Laurent 展開を数項だけ求める。

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}{z(1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5}z^4-\cdots)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1-\frac{w}{2}+\frac{w^2}{4!}-\cdots}{1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5}w^2-\cdots}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad (0\text{ の近傍で正則なので展開できるはず}).$$

分母を払うと

$$1-\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{4!}-\cdots = \left(1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5!}w^2-\cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

右辺を展開して、係数を比較することで、$a_0=1$, $a_1=-\frac{1}{3}$, $a_2=-\frac{1}{45}$, $\cdots$ と求まる。

Mathematica で検算: `Series[Cot[z],{z,0,10}]`

余談 1: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開

(授業時間が不足する可能性があるので、ここで紹介)

上で見たように、$\pi\cot(\pi z)$ の極は $n \in \mathbb{Z}$ であり、その位数は 1, 留数は 1 であるから、Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z-n}$ である。

余談 1: $\pi \cot(\pi z)$ の部分分数展開

(授業時間が不足する可能性があるので、ここで紹介)

上で見たように、$\pi \cot(\pi z)$ の極は $n \in \mathbb{Z}$ であり、その位数は 1, 留数は 1 であるから、Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z-n}$ である。

和 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$ は無限和なので収束が問題になるが、もし収束するならば、$\displaystyle\pi \cot(\pi z) - \sum_{n} \frac{1}{z-n}$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則になるはずである。

余談 1: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開

(授業時間が不足する可能性があるので、ここで紹介)

上で見たように、$\pi\cot(\pi z)$ の極は $n\in\mathbb{Z}$ であり、その位数は 1, 留数は 1 であるから、Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z-n}$ である。

和 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-n}$ は無限和なので収束が問題になるが、もし収束するならば、$\pi\cot(\pi z)-\displaystyle\sum_{n}\frac{1}{z-n}$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則になるはずである。

$$実は (ある意味で) \pi\cot(\pi z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-n}.$$

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-n}=\lim_{N_1,N_2\to\infty}\sum_{n=-N_1}^{N_2}\frac{1}{z-n}$ は収束しないが、$N_1=N_2\to\infty$ とすると、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様収束する。

余談 1: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$\pi\cot(\pi z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}). \tag{5}$$

余談 1: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$(5)\qquad \pi\cot(\pi z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

$n\in\mathbb{Z}$ を 1 位の極に持ち、留数が 1 という関数として、(5) の右辺は考えうる最も簡単な関数であろうが、それが三角関数 $\pi\cot(\pi z)$ とぴったり一致するというのは、私にはとても不思議に感じられる。

余談 1: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$(5)\qquad \pi\cot(\pi z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

$n\in\mathbb{Z}$ を 1 位の極に持ち、留数が 1 という関数として、(5) の右辺は考えうる最も簡単な関数であろうが、それが三角関数 $\pi\cot(\pi z)$ とぴったり一致するというのは、私にはとても不思議に感じられる。

細かい注意 : $\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z-(-n)}=\frac{2z}{z^2-n^2}$ である。$\frac{1}{z-n}\sim-\frac{1}{n}$, $\frac{2z}{z^2-n^2}\sim-\frac{2z}{n^2}$ となり、後者は $n\to\pm\infty$ のとき速く減衰する。そのことから、(5) の右辺は、**広義一様収束**という良い性質を持つことが導ける。

余談 1: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$(5)\qquad \pi\cot(\pi z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

$n\in\mathbb{Z}$ を 1 位の極に持ち、留数が 1 という関数として、(5) の右辺は考えうる最も簡単な関数であろうが、それが三角関数 $\pi\cot(\pi z)$ とぴったり一致するというのは、私にはとても不思議に感じられる。

細かい注意　: $\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z-(-n)}=\frac{2z}{z^2-n^2}$ である。$\frac{1}{z-n}\sim-\frac{1}{n}$, $\frac{2z}{z^2-n^2}\sim-\frac{2z}{n^2}$ となり、後者は $n\to\pm\infty$ のとき速く減衰する。そのことから、(5) の右辺は、**広義一様収束**という良い性質を持つことが導ける。例えば項別微分も可能で、次式が導ける。

$$(6)\qquad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right).$$

証明は後でやるかもしれないが、省略するかもしれない (講義ノート [1] §2.4 に書いてある)。

次のような導出方法もある。

$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = -\operatorname{Res}\left(\frac{s_2(z)}{(z-a)^2} : a\right) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}.$$

a を変数とみると

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

これを積分することで $\pi \cot(\pi z)$ の部分分数展開を得る。

(この講義としては、この話の筋を採用するのが良いような気がする。)

余談 2: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。

余談 2: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

余談 2: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

この右辺は $\pi\cot(\pi z)$ に他ならないので (1 枚前のスライド)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi\cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin\pi z}.$$

余談 2: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

この右辺は $\pi\cot(\pi z)$ に他ならないので (1 枚前のスライド)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi\cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin \pi z}.$$

これから $f(z) = \sin \pi z$ を導くことが出来る。ゆえに

余談2: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

この右辺は $\pi\cot(\pi z)$ に他ならないので (1 枚前のスライド)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi\cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin\pi z}.$$

これから $f(z) = \sin\pi z$ を導くことが出来る。ゆえに

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{7}$$

この $\sin\pi z$ の因数分解のような式を発見したのは Euler である。
(詳しくは講義ノート [1] §2.5 を見よ (例 2.26 ⋯ 番号がずれるかもしれない)。)

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).