

# 応用複素関数 第4回

～ Riemann 球面と1次分数変換 (1) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2023年5月9日

# 目次

- 1 連絡事項
- 2 Riemann 球面, 1 次分数変換
  - イントロ
  - 1 次分数変換の定義
  - 1 次分数変換の性質
  - 平行移動, 定数倍, 反転
  - $\widehat{\mathbb{C}}$  の円
  - 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換
  - Riemann 球面の幾何学的イメージ
  - Riemann 球面  $\widehat{\mathbb{C}}$  への位相の導入
  - 1 次分数変換は  $\widehat{\mathbb{C}}$  から  $\widehat{\mathbb{C}}$  への同相写像である
  - Riemann 球面は Riemann 面である
  - 1 次分数変換の鏡像の原理
  - 1 次分数変換による領域の等角写像
- 3 参考文献

- 複素関数論の基本的なツールである 1 次分数変換を紹介する (桂田 [1] の §3 の内容, ただしあまり対応は良くない)。そのために、それ自身重要な無限遠点  $\infty$ , Riemann 球面も紹介する。
- トポロジーについての予備知識がないと分かりにくい (かもしれない) ところがあるが、あえて紹介しました。その部分は「そういうものか」くらいに流してもらって結構です。
- これが終わった後は、しばらく関数論の流体力学への応用の話をする予定です (資料は [1] とは別のものを提供します)。Mathematica を使うので、起動するかどうかチェックしておいて下さい。もし起動できなくなっている場合、アクティベーション・キーの再発行が必要かもしれません。そのような状況になった場合、気軽に相談して下さい。

## 2 Riemann 球面, 1 次分数変換

### 2.0 イントロ

最初に問:  $\infty$  は数か? (Cf. 実数で考えるときの  $+\infty, -\infty$ )

答:  $\infty$  は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

$\infty$  をモノに格上げし、 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を考え、距離空間とする。

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \hat{\mathbb{C}}$  において  $f(z)$  が  $\infty$  に収束する、とする。

$\hat{\mathbb{C}}$  はもう体ではない。 $\infty$  は数ではないが、それに準ずるもの。

$\hat{\mathbb{C}}$  を **Riemann 球面** とよぶ。

$\hat{\mathbb{C}}$  を  $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathbb{C})$  と表す (1次元複素射影空間と呼ばれる)。**Riemann 面** (説明は略) の典型例である。

こうお膳立てすると、 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  という関数は非常に基本的となる。  
これを **1 次分数変換** とよぶ。

## 2.0 イントロ $\infty$ と四則

$\hat{\mathbb{C}}$  において、 $\lim$  と「合う」ように次のように定めることもある。

①  $(\forall a \in \mathbb{C}) \quad a + \infty = \infty + a = \infty.$

②  $(\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$

③  $\infty \cdot \infty = \infty.$

④  $(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad \frac{a}{0} = \infty.$

⑤  $(\forall b \in \mathbb{C}) \quad \frac{b}{\infty} = 0.$

(1) は「 $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = a, \lim_{z \rightarrow c} g(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \rightarrow c} (f(z) + g(z)) = \infty$ 」と解釈可能。

しかし、 $\infty + \infty$  や  $0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  は定義しない (つじつまが合うように定義出来ない)。

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  は体ではなく、移項や消去などは気軽に出来ない。

## 2.0 イントロ 余談的注意: $\mathbb{R}$ と $\pm\infty$ , $\mathbb{C}$ と $\infty$

実数の世界の  $\infty$  と複素数の世界の  $\infty$  は、(ふつう) 記号で見分けがつかないが違うものである。ここでは実数世界の  $\infty$  は  $+\infty$  と書く。

$I \subset \mathbb{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$  とする。  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  とは

$$(\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) f(x) > R.$$

実数の世界には、 $-\infty$  もあって、これは  $+\infty$  とは違うものである。数直線で言うと、 $+\infty$  は右の果て、 $-\infty$  は左の果てである。

複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点  $\infty$  が1個あるだけ。

$$+\infty \neq -\infty = (-1) \cdot (+\infty),$$

$$(-1) \cdot \infty = \infty$$

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を作るように、 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  を作れる (杉浦 [2])。

## 2.1 1次分数変換の定義 (1) 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$  とするとき  $\frac{az + b}{cz + d}$  を考える。

⓪  $c \neq 0$  のとき、 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  で連続で

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

⓶  $c = 0$  のとき、 $\mathbb{C}$  で連続で

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \infty.$$

(注:  $ad - bc \neq 0$  より、 $a \neq 0$  かつ  $d \neq 0$  である。 $-d/c$  と  $a/c$  が  $\infty$  になる、と考えると分かりやすいかも。)

念のため復習  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in \bar{\Omega}$ ,  $A \in \mathbb{C}$  とする。

- $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Leftrightarrow (\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega: |z - a| < \delta) |f(z)| > R.$
- $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \Omega: |z| > R) |f(z) - A| < \varepsilon.$

(細かい注意:  $\Omega$  内の点列  $\{z_n\}$  で  $\lim |z_n| = +\infty$  となるものが存在すると仮定しておく。)

## 2.1 1次分数変換の定義 (2) 定義

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$  とする。

①  $c \neq 0$  のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & (z \neq -d/c, \infty) \\ \infty & (z = -d/c) \\ \frac{a}{c} & (z = \infty) \end{cases}$$

②  $c = 0$  のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{az + b}{d} & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$$

で定められる  $\varphi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  を **1次分数変換** と呼ぶ。

以下、単に  $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  と表す。  $\varphi(-d/c) = \infty$ ,  $\varphi(\infty) = a/c$  と約束。



## 2.2 1次分数変換の性質 (1)

### 命題 4.1

任意の1次分数変換  $\varphi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  は連続である。

### 証明.

我々はまだ  $\widehat{\mathbb{C}}$  に距離も位相も導入していない(それで連続性を議論するのは反則!). しかし、任意の  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  に対して  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$  が成り立つように色々なことを定義する(約束). その約束が果たされれば連続。□

## 2.2 1次分数変換の性質 (2) 行列と対応させる

複素数成分の、2次の正則行列の全体 (一般線型群) を  $GL(2; \mathbb{C})$  と表す。

$$GL(2; \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbb{C})$  に対して、1次分数変換  $\varphi_A$  を次式で定める。

$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

次が基本的である。

### 命題 4.2

- ①  $A, B \in GL(2; \mathbb{C})$  とするとき  $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$ .
- ②  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  に対して、 $\varphi_I = \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$  ( $\hat{\mathbb{C}}$  上の恒等写像).
- ③  $A \in GL(2; \mathbb{C})$  ならば  $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$ .

## 2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明

①  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}, rz + s \neq 0, c\varphi_B(z) + d \neq 0$  とすると

$$\begin{aligned} \varphi_A \circ \varphi_B(z) &= \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz + q}{rz + s}\right) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d} \\ &= \dots \text{中略} \dots = \frac{(ap + br)z + (aq + bs)}{(cp + dr)z + cq + ds} = \varphi_{AB}(z). \end{aligned}$$

ゆえに有限個の点を除いて、 $\varphi_A \circ \varphi_B$  と  $\varphi_{AB}$  は一致する。

$\varphi_A \circ \varphi_B$  と  $\varphi_{AB}$  は  $\hat{\mathbb{C}}$  で連続であるから、 $\hat{\mathbb{C}}$  全体で一致する。

②  $c = 0$  の場合に相当する。定義より  $\varphi_I(z) = \begin{cases} z & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$ 。これは  $\hat{\mathbb{C}}$  の恒等写像である。

## 2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明 (続き), 系

- ③  $A \in GL(2; \widehat{\mathbb{C}})$  のとき、 $A^{-1}$  が存在して、 $A^{-1} \in GL(2; \mathbb{C})$ .  
(1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

同様にして  $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ . ゆえに  $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$ . □

### 系 4.3

任意の 1 次分数変換は全単射である。

(上の定理の (3) により、逆写像が存在することが分かるから。)

## 2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

- ① 平行移動  $b \in \mathbb{C}$  とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

- ② 定数倍  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

$a = re^{i\theta}$  ( $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$ ) とすると、 $M_a$  は、 $z \mapsto rz$  (拡大または縮小) と  $z \mapsto e^{i\theta}z$  (回転) の2つに分解できる。

- ③ 反転

$$R(z) := \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}.$$

以上から、平行移動、定数倍、反転が1次分数変換であることが分かった。

## 2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (2)

### 命題 4.4

任意の1次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成として表せる。

(どうやって証明する?)

### 証明.

(a)  $c \neq 0$  の場合、部分分数分解により

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = -\frac{ad - bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} + \frac{a}{c}.$$

これは  $T_{d/c}$ ,  $R$ ,  $M_{-\frac{ad-bc}{c^2}}$ ,  $T_{a/c}$  を合成したものである。

(b)  $c = 0$  の場合、

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

これは  $M_{a/d}$ ,  $T_{b/d}$  を合成したものである。

## 2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式

$\widehat{\mathbb{C}}$  の円とは、普通の円と直線 ( $\infty$  を通る半径無限大の円と考える) の総称である。

$|\beta|^2 - ac \geq 0$  を満たす  $a, c \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$  を用いて

$$(1) \quad az\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + c = 0$$

の形に表せるもの全体である。

気になる人には自分で確かめてもらおう。

**問** 複素平面内の任意の直線は、ある  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}$  を用いて

$$a\bar{z} + \bar{a}z + \beta = 0$$

と表せる (直線の方程式)。

**問** 複素平面内の任意の円は、ある  $c \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}, \beta \leq |c|^2$  を用いて、

$$z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + \beta = 0$$

と表せる (円の方程式)。

## 2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

### 命題 4.5 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、 $\widehat{\mathbb{C}}$  の任意の円を  $\widehat{\mathbb{C}}$  の円に写す。

### 証明.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。

定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。

反転  $R(z) = \frac{1}{z}$  でどうなるか調べる。 $\widehat{\mathbb{C}}$  の円の方程式 (1) に、 $z = R^{-1}(w) = \frac{1}{w}$  を代入すると

$$a \frac{1}{w} \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \beta \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \bar{\beta} \left(\frac{1}{w}\right) + c = 0.$$

これは次式と同値である。

$$a + \beta w + \bar{\beta} \bar{w} + cw\bar{w} = 0$$

$a' := c, \beta' := \bar{\beta}, c' := a$  とおくと

$$a' w \bar{w} + \beta' \bar{w} + \bar{\beta}' w + c' = 0.$$



## 2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (1)

### 補題 4.6

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$  が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす1次分数変換が一意的に存在する。

**証明** (存在)  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  (3つとも有限) の場合は

$$(2) \quad \varphi(z) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}.$$

これが条件を満たすことは目視で確認できる。

$\beta = \infty$  の場合は  $\varphi(z) := \frac{\alpha - \gamma}{z - \gamma}$ ,  $\gamma = \infty$  の場合は  $\varphi(z) := \frac{z - \beta}{\alpha - \beta}$ ,  $\alpha = \infty$  の場合は  $\varphi(z) := \frac{z - \beta}{z - \gamma}$  とすればよい。

**注** (証明の途中だけれど) (2) は自分で書けるようにしておくべき公式である。  
( $\beta$  で 0 より赤、 $\gamma$  で  $\infty$  より青、最後に  $\alpha$  で 1 となるように調節するオレンジ)

## 2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (2)

(一意性)  $\varphi_1, \varphi_2$  が条件を満たすならば、 $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  も1次分数変換で

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

$\varphi(\infty) = \infty$  より、ある  $a, b$  が存在して  $\varphi(z) = az + b$ .

$\varphi(0) = 0$  より、 $b = 0$ .

$\varphi(1) = 1$  より、 $a = 1$ .

ゆえに  $\varphi(z) = z = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)$ . すなわち  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ .

$\varphi_1$  を右からかけて  $\varphi_1 = \varphi_2$ . □

## 2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (3)

命題 4.7 (任意の3点を任意の3点に写せる)

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$  が相異なり、 $\alpha', \beta', \gamma' \in \widehat{\mathbb{C}}$  が相異なるならば、ある1次分数変換  $\varphi$  が存在して

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'.$$

証明.

一般に  $\alpha, \beta, \gamma$  を  $1, 0, \infty$  に写す1次分数変換を  $\varphi_{\alpha, \beta, \gamma}$  と表すことにすると、

$$\varphi := \varphi_{\alpha', \beta', \gamma'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}$$

とすればよい。 □

## 2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (4)

**例題** 1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す1次分数変換を求めよ。

**(解答)** 命題 4.7 の証明を実行する、というイメージの解答である。

1, 2, 3 を 1, 0,  $\infty$  に写す1次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z) = \frac{1-3}{1-2} \cdot \frac{z-2}{z-3} = \frac{2z-4}{z-3}. \quad \text{対応する行列は } \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2, 3, 1 を 1, 0,  $\infty$  に写す1次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z) = \frac{2-1}{2-3} \cdot \frac{z-3}{z-1} = \frac{-z+3}{z-1}. \quad \text{対応する行列は } \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求める1次分数変換に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

ゆえに  $\varphi(z) = \frac{5z-13}{3z-7}$ .

□

## 2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を Riemann 球面と呼ぶか。  $\widehat{\mathbb{C}}$  は  $\mathbb{R}^3$  の球面と同一視できるから。

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

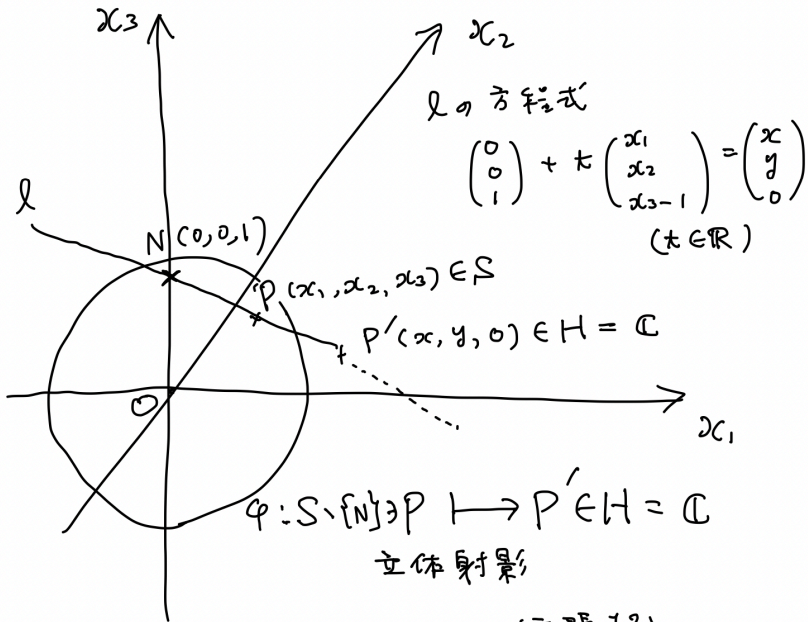
とおく。また  $x_1x_2$  平面  $x_3 = 0$  を  $H$  で表し、複素平面  $\mathbb{C}$  と同一視する。すなわち  $(x_1, x_2, 0) \in H$  に  $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$  を対応させる。

任意の  $P \in S \setminus \{N\}$  に対して、 $N$  と  $P$  を通る直線と、平面  $H$  との交点  $P'$  がただ一つ定まる。 $P$  に  $P'$  を対応させる写像

$$\varphi: S \setminus \{N\} \ni P \mapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、 $N$  からの**立体射影 (stereographic projection)** と呼ぶ。

**注** 以下で、 $\varphi(N) = \infty$  と定めることで、 $\varphi$  を  $S$  から  $\widehat{\mathbb{C}}$  への写像に拡張する。その拡張した写像も**立体射影**と呼ばれる。



$\varphi(N) = \infty$  と拡張すると  
 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$

## 2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (2) 立体射影の式

問  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x + iy = (x, y, 0)$  とするとき、次式を示せ。

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \text{すなわち} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

(ヒント: 2点  $N, P$  を通る直線と、平面  $x_3 = 0$  との交点を求める。)

問  $\forall z \in \mathbb{C}$  に対して、 $z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$  は次のように解けることを示せ。

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}.$$

(ヒント:  $|z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$  を導出した後、 $x_3, x_1, x_2$  の順に求める。)

(逆写像が存在するので)

**立体射影  $\varphi: S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  は全単射である。**

## 2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (3) $S$ と $\hat{\mathbb{C}}$ の同一視

$\lim_{P \rightarrow N} \varphi(P) = \infty$  である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。

そこで北極  $N$  に対して  $\infty$  を対応させることで、球面  $S$  から  $\hat{\mathbb{C}}$  への全単射な拡張が得られる。それを同じ  $\varphi$  で表す:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & ((x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{N\}) \\ \infty & ((x_1, x_2, x_3) = N = (0, 0, 1)). \end{cases}$$

元々は、 $S$  のことを Riemann 球面と呼び、 $\varphi$  によって  $\hat{\mathbb{C}}$  を  $S$  と同一視することで、 $\hat{\mathbb{C}}$  のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

**問** 次のことを確かめよ (幾何学的考察および計算の両方で)。

$$\varphi(\text{北半球}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}, \quad \varphi(\text{南半球}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

$$\varphi(\text{赤道}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

$$\varphi(\text{北極}) = \infty, \quad \varphi(\text{南極}) = 0.$$



## 2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$  への位相の導入方法を2つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

**$\widehat{\mathbb{C}}$  への位相の導入 方法1** 一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。  $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$  に対して

$$d(z_1, z_2) := \|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)\| \quad (\|\cdot\| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、 $d$  は  $\widehat{\mathbb{C}}$  上の距離となる (これは簡単に確認できる)。

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  のとき

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}.$$

図形イメージは鮮明だけれど、式はちょっと面倒 (個人の感想です)。

## 2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

### $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法2 (一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

$X$  は空でない集合とし、 $X$  の各点  $x$  に対して、 $X$  の部分集合族  $\mathcal{B}(x)$  が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

- ①  $(\forall x \in X) \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ . さらに  $(\forall x \in X) (\forall U \in \mathcal{B}(x)) x \in U$ .
- ②  $(\forall x \in X) (\forall U, V \in \mathcal{B}(x)) (\exists W \in \mathcal{B}(x)) W \subset U \cap V$ .
- ③  $(\forall x \in X) (\forall U \in \mathcal{B}(x)) (\exists W \in \mathcal{B}(x)) (\forall y \in W) (\exists U_y \in \mathcal{B}(y)) U_y \subset U$ .

このとき、 $X$  の部分集合  $\Omega$  について

$$\Omega \text{ は開集合} \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x \in \Omega) (\exists U \in \mathcal{B}(x)) U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。

$\mathbb{C}$  においては、各  $a \in \mathbb{C}$  に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a; r) \mid r > 0\}, \quad U(a; r) := D(a; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常 of  $\mathbb{C}$  の位相である。

**新たに  $\mathcal{B}(\infty)$  を定めて**、 $\mathcal{B}(a)$  ( $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ) が基本近傍系の公理を満たすことを確認すれば、 $\widehat{\mathbb{C}}$  の位相が定義できる。

$$\mathcal{B}(\infty) := \{U(\infty; R) \mid R \in (0, +\infty)\}, \quad U(\infty; R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}.$$

## 2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に1次分数変換  $\varphi$  は、 $\widehat{\mathbb{C}}$  から  $\widehat{\mathbb{C}}$  への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  に対して  $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \varphi(a)$  が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$  に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は  $\lim$  はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、 $\varphi$  も  $\varphi^{-1}$  も、 $\widehat{\mathbb{C}}$  から  $\widehat{\mathbb{C}}$  への連続写像である。

一般に写像  $\varphi: X \rightarrow Y$  が全単射であり、 $\varphi$  と  $\varphi^{-1}$  が共に連続であるとき、 $\varphi$  は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、 $X$  と  $Y$  は**同相**であるという。

分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

**1次分数変換は  $\widehat{\mathbb{C}}$  から  $\widehat{\mathbb{C}}$  への同相写像である。**

実は、 $\widehat{\mathbb{C}}$  から  $\widehat{\mathbb{C}}$  への同相写像は1次分数変換に限る。  
→ 1次分数変換の重要性が分かる。

(このことの証明も、期末レポート課題の候補問題とする。)

## 2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に<sup>たようたい</sup>多様体 (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には  $\mathbb{R}^n$  または  $\mathbb{C}^n$  の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に  $\mathbb{C}$  の円盤とみなせるようなもの (1次元の複素多様体) を **Riemann 面** とよぶ。

$\mathbb{C}$  自身や、 $\mathbb{C}$  の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}}$  も Riemann 面である。実際、 $a \in \mathbb{C}$  の近傍  $U(a; r) = D(a; r)$  はそのまま  $\mathbb{C}$  の円盤であるし、 $\infty$  の近傍  $U(\infty; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$  は  $w = \frac{1}{z}$  により  $\mathbb{C}$  の円盤  $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$  に写る。

この座標変換  $w = 1/z$  により、 $z = \infty$  においても、関数の微分可能性や留数を考えたりできる。(  $F(w) = f(1/w)$  が  $w = 0$  で微分できるとき、 $f$  は  $\infty$  で微分可能という等。 ) **これは実はよく使われる。**

## 2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\hat{\mathbb{C}}$  の円は1次分数変換で  $\hat{\mathbb{C}}$  の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

### 定義 4.8 (円に関して鏡像の位置)

$C$  は  $\hat{\mathbb{C}}$  の円であり、 $z, z' \in \hat{\mathbb{C}}$  とする。 $z$  と  $z'$  が  $C$  に関して互いに**鏡像の位置**にある ( $z$  と  $z'$  が  $C$  に関して対称である) とは、次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

- Ⓐ  $C$  が  $\mathbb{C}$  の直線であり、 $z$  と  $z'$  が  $C$  に関して対称の位置にある。
- Ⓑ  $C$  が  $\mathbb{C}$  の円であり、 $z$  と  $z'$  が円  $C$  の中心  $c$  から発する一本の半直線上にあって、しかも  $|z - c||z' - c| = r^2$  ( $r$  は円  $C$  の半径) を満たす。円の中心  $c$  と  $\infty$  とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

## 2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

### 命題 4.9 (1次分数変換の鏡像の原理)

$C$  は  $\hat{C}$  の円、 $z$  と  $z'$  は  $C$  に関して互いに鏡像の位置にある2点、 $f$  は1次分数変換とすると、 $f(z)$  と  $f(z')$  は  $f(C)$  に関して互いに鏡像の位置にある。

#### 証明のあらすじ

色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。 $f$  が平行移動  $T_d(z) = z+d$ , 定数倍  $M_a(z) = az$  ( $a \neq 0$ ), 反転  $R(z) = \frac{1}{z}$  について確かめれば良い (任意の1次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

反転  $R(z) = \frac{1}{z}$  のときは、少々計算が必要であるが、次のことを使うと見通しが良い。

**ヒント**  $z, z'$  が  $c$  から発する一本の半直線上にあり、かつ  $|z-c||z'-c| = r^2$  を満たすためには、 $(z-c)(\overline{z'}-\bar{c}) = r^2$  を満たすことが必要十分である。

以下各自に任せる。

**領域の等角写像**という概念を紹介する。これについては後で詳しく説明するが、有名かつ重要な話を3つ“先行上映”する。

- ① Riemann の写像定理
- ② 単位円盤の等角写像
- ③ 上半平面の等角写像

(ii), (iii) が1次分数変換となることが、1次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1次分数変換は基本的ツールとして使われる。

## 2.11 1次分数変換による領域の等角写像 写像定理

単位円盤を  $D_1$  とおく:  $D_1 := D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

正則関数が正則な逆写像を持つとき、<sup>そうせいそく</sup> **双正則** という。

$\hat{\mathbb{C}}$  の領域  $\Omega$  に対して、 $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  が双正則であるとき、 $\varphi$  を  $\Omega$  の**等角写像**あるいは **$\Omega$  の写像関数**とよぶ。

### 定理 4.10 (Riemann の写像定理)

$\hat{\mathbb{C}}$  の領域  $\Omega$  が単連結で、 $\Omega \neq \mathbb{C}$ ,  $\Omega \neq \hat{\mathbb{C}}$  ならば、 $\Omega$  の等角写像が存在する。

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の領域,  $z_0 \in \Omega$  とするとき、 $\Omega$  の等角写像で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

$$(3) \quad \varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0.$$

“簡単な” 領域の等角写像が1次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が1次分数変換そのものでなくても、その構成に1次分数変換が使われるものはとても多い)。



次は非常に有名な定理である。

### 定理 4.11 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$ ,  $z_0 \in \Omega$  とする。双正則な  $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  で、 $\varphi(z_0) = 0$  を満たすものは

$$(4) \quad \varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

( $\varepsilon = e^{i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)  $\varphi'(z_0) > 0$  という条件を課すと、 $\varepsilon = 1$  と定まる。

この事実の証明を期末レポート課題候補にする。(4) の  $\varphi$  が条件を満たすこと、条件を満たす1次分数変換が(4)に限られることは初等的に導ける。

双正則という仮定から、 $\varphi$  が1次分数変換に限られる、というところに **Schwarzの補題** という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。

## 例 4.12 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

$$(5) \quad \varphi(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

は  $H$  の等角写像である。

**略証** 1次分数変換は一般に双正則であるから、 $\varphi(H) = D_1$  を確かめれば良い。それは、計算で得られる  $1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{4 \operatorname{Im} z}{|z + i|^2}$  から分かる。  $\square$

この  $\varphi$  は <sup>ケーリー</sup>**Cayley変換**とよばれる。

$\varphi$  は実軸  $\mathbb{R}$  ( $H$  の境界) を単位円周  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  ( $D_1$  の境界) に写す。

Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

# 落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$  の相異なる 3 点  $\alpha, \beta, \gamma$  に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、 $z, \alpha, \beta, \gamma$  の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、 $\alpha, \beta, \gamma$  をそれぞれ  $1, 0, \infty$  に写す一次分数変換による  $z$  の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換  $f$  に対して

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。

(証明)  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$  を  $1, 0, \infty$  に写す 1 次分数変換を  $\varphi$  とすると、

$$\varphi(w) = (w, f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) \quad (w \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi \circ f$  は  $\alpha, \beta, \gamma$  を  $1, 0, \infty$  に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi \circ f(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z), f(\alpha), f(\beta), g(\gamma)) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}). \quad \square$$

上半平面を単位円板に写す 1 次分数変換の一般形は

$$(6) \quad w = \alpha \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \text{Im } \beta > 0.$$

$\beta = i, \alpha = 1$  のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

実直線  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  を自分自身に写す 1 次分数変換は？

- [1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf> (2015～).
- [2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843> でアクセスできる。この eBook まともな目次を付けてほしい。