応用複素関数 第 5 回

〜 Riemann 球面と 1 次分数変換 (2) 〜

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2023 年 5 月 16 日

目次

連絡事項&本日の内容

- 今回は、Riemann 球面と 1 次分数変換 (桂田 [1] の §3, §5 の内容) の 2 回目です。

  トポロジーについての予備知識がないと分かりにくい (かもしれない) ところがありますが、あえて紹介しました。その部分は「そういうものか」くらいに流してもらって結構です。

連絡事項＆本日の内容

- 今回は、Riemann 球面と 1 次分数変換 (桂田 [1] の §3, §5 の内容) の 2 回目です。

  トポロジーについての予備知識がないと分かりにくい (かもしれない) ところがありますが、あえて紹介しました。その部分は「そういうものか」くらいに流してもらって結構です。

- 次回からは、しばらく関数論の流体力学への応用の話をする予定です (資料は [1] とは別のものを提供します)。Mathematica を使うので、起動するかどうかチェックしておいて下さい。もし起動できなくなっている場合、アクティベーション・キーの再発行が必要かもしれません。そのような状況になった場合、気軽に相談して下さい。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式 (要訂正)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、普通の円と直線 (∞ を通る半径無限大の円と考える) の総称である。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式 (要訂正)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、普通の円と直線 (∞ を通る半径無限大の円と考える) の総称である。

$|\beta|^2 - ac \geq 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + c = 0 \tag{1}$$

の形に表せるもの全体である。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式 (要訂正)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、普通の円と直線 (∞ を通る半径無限大の円と考える) の総称である。

$|\beta|^2 - ac \geq 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + c = 0 \tag{1}$$

の形に表せるもの全体である。

気になる人には自分で確かめてもらおう。

問　複素平面内の任意の直線は、ある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a\overline{z} + \overline{a}z + \beta = 0$$

と表せる (直線の方程式)。

問　複素平面内の任意の円は、ある $c \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \leq |c|^2$ を用いて、

$$z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z + \beta = 0$$

と表せる (円の方程式)。

補題 5.1 (相異なる 3 点を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換)

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす 1 次分数変換が一意的に存在する。

補題 5.1 (相異なる 3 点を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換)

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす 1 次分数変換が一意的に存在する。

証明 (続き)　存在証明は済んでいる。

(一意性) φ_1 φ_2 が条件を満たすならば、$\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ も 1 次分数変換で

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

$\varphi(\infty) = \infty$ より、ある a, b が存在して $\varphi(z) = az + b$.

$\varphi(0) = 0$ より、$b = 0$. $\varphi(1) = 1$ より、$a = 1$.

ゆえに $\varphi(z) = z = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)$. すなわち $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$.

φ_1 を右からかけて $\varphi_1 = \varphi_2$. □

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (2)

命題 5.2 (任意の 3 点を任意の 3 点に写す 1 次分数変換)

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なり、$\alpha', \beta', \gamma' \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば、ある 1 次分数変換 φ が存在して

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'.$$

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (2)

命題 5.2 (任意の 3 点を任意の 3 点に写す 1 次分数変換)

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なり、$\alpha', \beta', \gamma' \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば、ある 1 次分数変換 φ が存在して

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'.$$

証明.

一般に α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ と表すことにする。

$$\varphi := \varphi_{\alpha',\beta',\gamma'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$$

とおけば、φ は 1 次分数変換で、α, β, γ をそれぞれ α', β', γ' にうつす。 □

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (3)

例題　1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (3)

例題　1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。

(解答)　命題 5.2 の証明を実行する、というイメージの解答である。
$1, 2, 3$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z) = \frac{1-3}{1-2}\cdot\frac{z-2}{z-3} = \frac{2z-4}{z-3}.\quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$2, 3, 1$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z) = \frac{2-1}{2-3}\cdot\frac{z-3}{z-1} = \frac{-z+3}{z-1}.\quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (3)

例題　1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。

(解答)　命題 5.2 の証明を実行する、というイメージの解答である。
1, 2, 3 を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z)=\frac{1-3}{1-2}\cdot\frac{z-2}{z-3}=\frac{2z-4}{z-3}.\quad \text{対応する行列は}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

2, 3, 1 を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z)=\frac{2-1}{2-3}\cdot\frac{z-3}{z-1}=\frac{-z+3}{z-1}.\quad \text{対応する行列は}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

求める 1 次分数変換に対応する行列は

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & -13\\ 3 & -7\end{pmatrix}.$$

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (3)

例題　1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。

(解答)　命題 5.2 の証明を実行する、というイメージの解答である。
$1, 2, 3$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z) = \frac{1-3}{1-2}\cdot\frac{z-2}{z-3} = \frac{2z-4}{z-3}.\quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$2, 3, 1$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z) = \frac{2-1}{2-3}\cdot\frac{z-3}{z-1} = \frac{-z+3}{z-1}.\quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求める 1 次分数変換に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $\varphi(z) = \dfrac{5z-13}{3z-7}$.　□

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。　$\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。 $\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

とおく。また x_1x_2 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。 $\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

とおく。また x_1x_2 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

任意の $P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像

$$\varphi\colon S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、N からの**立体射影 (stereographic projection)** と呼ぶ。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。 $\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

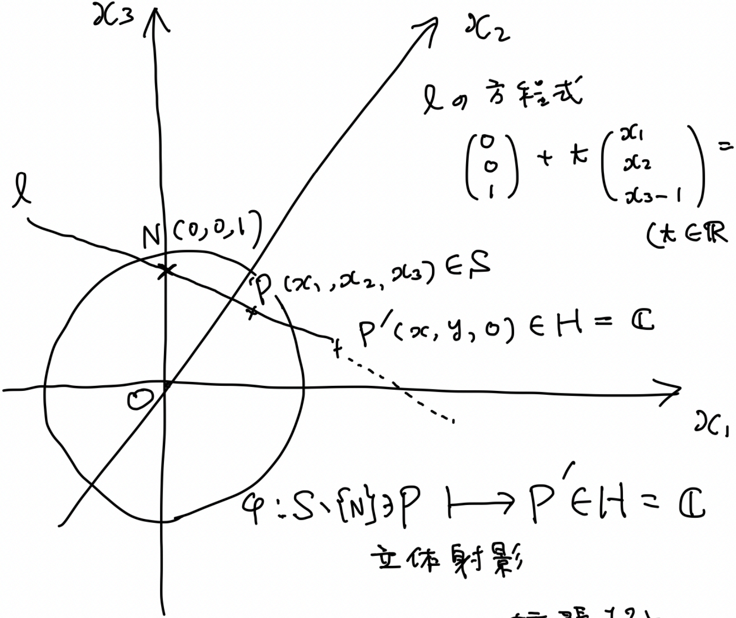
とおく。また $x_1 x_2$ 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

任意の $P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像

$$\varphi \colon S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、N からの**立体射影** (**stereographic projection**) と呼ぶ。

注 以下で、$\varphi(N) = \infty$ と定めることで、φ を S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像に拡張する。その拡張した写像も**立体射影**と呼ばれる。



lの方程式

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(t \in \mathbb{R})$

$$\varphi : S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

立体射影

$\varphi(N) = \infty$ と拡張すると

$$\varphi : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$$

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (2) 立体射影の式

問　$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x + iy = (x, y, 0)$ とするとき、次式を示せ。

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \text{すなわち} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

(ヒント: 2 点 N, P を通る直線と、平面 $x_3 = 0$ との交点を求める。)

問　$\forall z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ は次のように解けることを示せ。

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}.$$

(ヒント: $|z|^2 = \dfrac{1 + x_3}{1 - x_3}$ を導出した後、x_3, x_1, x_2 の順に求める。)

(逆写像が存在するので)

立体射影 $\varphi\colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ は全単射である。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (3) S と $\widehat{\mathbb{C}}$ の同一視

$\displaystyle\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (3) S と $\hat{\mathbb{C}}$ の同一視

$\displaystyle\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。
そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\hat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3} & ((x_1,x_2,x_3)\in S\setminus\{N\})\\ \infty & ((x_1,x_2,x_3)=N=(0,0,1)).\end{cases}$$

元々は、S のことを Riemann 球面と呼び、φ によって $\hat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、$\hat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

$\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\hat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3} & ((x_1,x_2,x_3)\in S\setminus\{N\})\\ \infty & ((x_1,x_2,x_3)=N=(0,0,1)).\end{cases}$$

元々は、S のことを Riemann 球面と呼び、φ によって $\hat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、$\hat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

問 次のことを確かめよ (幾何学的考察および計算の両方で)。

$$\varphi(\text{北半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>1\},\quad \varphi(\text{南半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\},$$
$$\varphi(\text{赤道})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\},$$
$$\varphi(\text{北極})=\infty,\quad \varphi(\text{南極})=0.$$

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 1　一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。$z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \left\| \varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2) \right\| \quad (\| \ \| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる (これは簡単に確認できる)。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 1　一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。$z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \left\| \varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2) \right\| \quad (\| \ \| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる (これは簡単に確認できる)。
$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき

$$d(z_1, z_2) = \frac{2 \left| z_1 - z_2 \right|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}.$$

図形イメージは鮮明だけれど、式はちょっと面倒 (個人の感想です)。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2　(一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2　(一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

定義 5.3 (近傍, 近傍系, 基本近傍系)

X を位相空間, $x \in X$ とする。

1. $A \subset X$ とする。A が x の**近傍**であるとは、ある開集合 U が存在して、$x \in U \subset A$ が成り立つことをいう。
2. x のすべての近傍からなる集合族を、x の**近傍系**と呼ぶ。
3. $\mathcal{U}$ は x の近傍からなる集合族とする。$\mathcal{U}$ が x の**基本近傍系**であるとは、
$$(\forall V : V \text{ は } x \text{ の近傍})(\exists U \in \mathcal{U}) \quad U \subset V$$
が成り立つことをいう。

x の近傍系は 1 つしかない。x の基本近傍系はしばしばたくさんある。

例 5.4 (距離空間の点の基本近傍系)

(X,d) を距離空間とする。

$x\in X$, $r>0$ に対して、$U(x;r)=\{y\in X\mid d(x,y)<r\}$ とおき、x の r 近傍と呼ぶ (x を中心とする半径 r の開球である)。

X の部分集合 Ω が開集合であるとは

$$(\forall x\in\Omega)(\exists\varepsilon>0)\quad U(x;\varepsilon)\subset\Omega$$

が成り立つことをいう。

$x\in X$ に対して、$\mathcal{U}:=\{U(x;\varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$ とおくと、$\mathcal{U}$ は x の基本近傍系である。(実際、まず $\mathcal{U}$ の任意の要素 $U(x;\varepsilon)$ は、x を含む開集合であるから、x の近傍である。また、V を x の任意の近傍とすると、$x\in\Omega\subset V$ を満たす開集合 Ω が存在する。ゆえにある $\varepsilon>0$ が存在して、$U(x;\varepsilon)\subset\Omega$. $U:=U(x;\varepsilon)$ とおくと、$U\subset V$.)

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.
2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.
3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))$ $U_y \subset U$.

このとき、X の部分集合からなる集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} := \{\Omega \subset X \mid (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x))\ U \subset \Omega\}$$

で定義すると、$\mathcal{O}$ は**位相の公理**を満たす。また、$\mathcal{B}(x)$ は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における x の基本近傍系である。

より詳しくは、例えば MATHPEDIA [2] を見よ (特に命題 2.11)。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

$\mathbb{C}$ においては、各 $a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a;r) \mid r > 0\}, \quad U(a;r) := D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

$\mathbb{C}$ においては、各 $a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a;r) \mid r > 0\}, \quad U(a;r) := D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。

新たに $\mathcal{B}(\infty)$ を定めて、$\mathcal{B}(a)$ $(a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ が基本近傍系の公理を満たすことを確認すれば、$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相が定義できる。

$$\mathcal{B}(\infty) := \{U(\infty;R) \mid R \in (0,+\infty)\}, \quad U(\infty;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}.$$

2.8 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に 1 次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も 1 次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\displaystyle\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

2.8 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に 1 次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も 1 次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に 1 次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も 1 次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi\colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\displaystyle\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi \colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi \colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

実は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像は1次分数変換に限る。
$\to$ 1次分数変換の重要性が分かる。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

$\mathbb{C}$ 自身や、$\mathbb{C}$ の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ も Riemann 面である。実際、$a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a; r) = D(a; r)$ はそのまま $\mathbb{C}$ の円盤であるし、∞ の近傍 $U(\infty; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \frac{1}{z}$ により $\mathbb{C}$ の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

$\mathbb{C}$ 自身や、$\mathbb{C}$ の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ も Riemann 面である。実際、$a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a;r) = D(a;r)$ はそのまま $\mathbb{C}$ の円盤であるし、∞ の近傍 $U(\infty;R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \frac{1}{z}$ により $\mathbb{C}$ の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。

この座標変換 $w = 1/z$ により、$z = \infty$ においても、関数の微分可能性や留数を考えたりできる。($F(w) = f(1/w)$ が $w = 0$ で微分できるとき、f は ∞ で微分可能という等。) これは実はよく使われる。

2023/5/16 の授業はここまでです。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 5.5 (円に関して鏡像の位置)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

- (a) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。
- (b) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z - c||z' - c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 5.5 (円に関して鏡像の位置)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

- (a) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。
- (b) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z-c||z'-c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 5.6 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

命題 5.6 (1次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ

色々な方法があるが､素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z) = z+d$, 定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \neq 0)$, 反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 5.6 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ

色々な方法があるが､素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z) = z+d$, 定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \neq 0)$, 反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 5.6 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ

色々な方法があるが､素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z)=z+d$, 定数倍 $M_a(z)=az$ $(a\neq 0)$, 反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。
反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ のときは、少々計算が必要であるが、次のことを使うと見通しが良い。

ヒント z, z' が c から発する一本の半直線上にあり、かつ $|z-c||z'-c'|=r^2$ を満たすためには、 $(z-c)(\overline{z'}-\overline{c})=r^2$ を満たすことが必要十分である。

以下各自に任せる。

領域の等角写像という概念を紹介する。これについては後で詳しく説明するが、有名かつ重要な話を 3 つ “先行上映” する。

1. Riemann の写像定理
2. 単位円盤の等角写像
3. 上半平面の等角写像

(ii), (iii) が 1 次分数変換となることが、1 次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1 次分数変換は基本的ツールとして使われる。

単位円盤を D_1 とおく: $D_1 := D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

正則関数が正則な逆写像を持つとき、**双正則**(そうせいそく)という。

$\hat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω に対して、$\varphi\colon \Omega \to D_1$ が双正則であるとき、φ を **Ω の等角写像**あるいは **Ω の写像関数**とよぶ。

定理 5.7 (Riemann の写像定理)

$\hat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω が単連結で、$\Omega \neq \mathbb{C}$, $\Omega \neq \hat{\mathbb{C}}$ ならば、Ω の等角写像が存在する。

Ω は $\mathbb{C}$ の領域, $z_0 \in \Omega$ とするとき、Ω の等角写像で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0. \tag{2}$$

"簡単な" 領域の等角写像が 1 次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が 1 次分数変換そのものでなくても、その構成に 1 次分数変換が使われるものはとても多い)。

次は非常に有名な定理である。

定理 5.8 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

(3) $$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)

$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

次は非常に有名な定理である。

定理 5.8 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{3}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)

$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

この事実の証明を期末レポート課題候補にする。(3) の φ が条件を満たすこと、条件を満たす 1 次分数変換が (3) に限られることは初等的に導ける。

双正則という仮定から、φ が 1 次分数変換に限られる、というところに **Schwarz の補題**という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。

例 5.9 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i} \tag{4}$$

は H の等角写像である。

略証　1 次分数変換は一般に双正則であるから、$\varphi(H) = D_1$ を確かめれば良い。それは、計算で得られる $1 - |\varphi(z)|^2 = \dfrac{4 \operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ から分かる。 $\square$

この φ は**Cayley変換**(ケーリー)とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

2.11 1次分数変換による領域の等角写像　上半平面の場合

例 5.9 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

(4)
$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

は H の等角写像である。

略証　1次分数変換は一般に双正則であるから、$\varphi(H) = D_1$ を確かめれば良い。それは、計算で得られる $1 - |\varphi(z)|^2 = \dfrac{4 \operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ から分かる。 $\square$

この φ は**Cayley(ケーリー)変換**とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。
(証明) $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を φ とすると、

$$\varphi(w) = (w, f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) \quad (w \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi \circ f$ は α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi \circ f(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z), f(\alpha), f(\beta), g(\gamma)) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}). \quad \square$$

落穂拾い (2)

上半平面を単位円板に写す 1 次分数変換の一般形は

$$w = \alpha \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \mathrm{Im}\,\beta > 0. \tag{5}$$

$\beta = i$, $\alpha = 1$ のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

実直線 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を自分自身に写す 1 次分数変換は？

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).

[2] MATHPEDIA, : 近傍と基本近傍系, https://math.jp/wiki/%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E7%A9%BA%E9%96%93%E8%AB%962%EF%BC%9A%E8%BF%91%E5%82%8D%E3%81%A8%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E8%BF%91%E5%82%8D%E7%B3%BB.