応用複素関数 第 7 回
〜 流体力学への応用 (2) 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2023 年 5 月 30 日

目次

本日の内容・連絡事項

- レポート課題 1 を出します。〆切は 7 月 7 日 (金) 22:00。提出は Oh-o! Meiji を用いる。
- 流体力学の方程式を紹介する。講義ノートとして桂田 [1], 参考書として今井 [2] をあげておく。
- しばしばベクトル解析を用いる。ベクトル解析を未修の人は適当な機会に学ぶことを勧めるが、とりあえず桂田 [3], [4] 紹介しておく。

3.2 流体の運動の表現　何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし $\boldsymbol{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ は位置, t は時刻を表す。

- 速度 (velocity) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

  ($\boldsymbol{v}$ の代わりに $\boldsymbol{u}$ という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure) $p(\boldsymbol{x}, t)$
- 密度 (density) $\rho(\boldsymbol{x}, t)$
- 温度 (temperature)　今回は考えない。

問　水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)

解答　水は 1 ml で 1 g とすれば、$\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ である。

空気については、高校の化学の知識で、1 mol は 22.4 ℓ であること、80% が窒素 (分子量 28)、20% が酸素 (分子量 32) であることを用いると、$\rho = 1.3\ \mathrm{kg/m^3}$ となる。

3.2 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

(1)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

3.2 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

(1)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ)　流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

(2)
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial V} \rho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

ただし $\boldsymbol{n}$ は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、$d\sigma$ は面積要素、∂V は V の境界である。

(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [3], [4] を見よ。

3.2 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

(1)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ)　流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

(2)
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial V} \rho \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

ただし $\boldsymbol{n}$ は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、$d\sigma$ は面積要素、∂V は V の境界である。

(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [3], [4] を見よ。

左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} = -\int_V \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v})d\boldsymbol{x}.$$

3.2 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

　質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

(1)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ)　流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

(2)
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial V} \rho \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

ただし $\boldsymbol{n}$ は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、$d\sigma$ は面積要素、∂V は V の境界である。

　(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [3], [4] を見よ。

　左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} = -\int_V \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}.$$

V は任意であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \quad \square$$

3.3 物質微分 (1) 定義

積の微分法から $\mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}\,\rho \cdot \boldsymbol{v} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

(3) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$$

3.3 物質微分 (1) 定義

積の微分法から $\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \boldsymbol{v} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}$ が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{3}$$

物質微分 (material derivative, Lagrange derivative) と呼ばれる作用素 $\frac{D}{Dt}$ を次式で定義する:

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{4}$$

これを使うと (3) は次のように表せる。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{5}$$

3.3 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\boldsymbol{x}(t)$ とする。すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t), t)$$

が成り立つ。

3.3 物質微分 (2) 意味

　流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\boldsymbol{x}(t)$ とする。すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), t) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t), t) x_j'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t), t) v_j(\boldsymbol{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}(t), t)\end{aligned}$$

が成り立つ。

3.3 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\boldsymbol{x}(t)$ とする。すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), t) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t), t)x_j'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t), t)v_j(\boldsymbol{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}(t), t)\end{aligned}$$

が成り立つ。

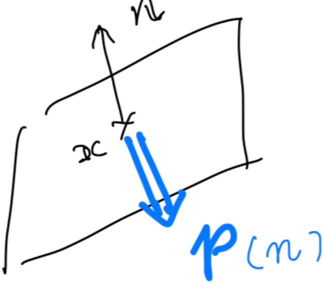
注意　流体粒子の速度は、位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t が分かれば $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ で与えられるが、その加速度は $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ でなく、$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$ である。よく考えてみよう。

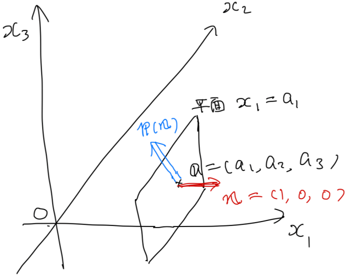
3.4 応力 (1) Cauchy の応力原理, 応力の定義

流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

> 流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置 x, 時刻 t, 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で指定する) で定まる (**Cauchy の応力原理**)。

この面積あたりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。





3.4 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $t=\tau$ と固定し、応力 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{n}$ の関数と考える: $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$.

3.4 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, $t = \tau$ と固定し、応力 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{n}$ の関数と考える: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$.

点 $\boldsymbol{a}$ を通る平面 $x_i = a_i$ を通して、正の側が負の側におよびす力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ とおく。これは $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_i)$ である。

$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ を**応力テンソル** (stress tensor) と呼ぶ。

しばらく、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $t=\tau$ と固定し、応力 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{n}$ の関数と考える: $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$.

点 $\boldsymbol{a}$ を通る平面 $x_i=a_i$ を通して、正の側が負の側におよびす力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ とおく。これは $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_i)$ である。

$P:=(p_{ij})=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ を**応力テンソル** (stress tensor) と呼ぶ。

次のことが成り立つ (証明は省略)。

- P は対称である: $P^\top=P$ つまり $p_{ij}=p_{ji}$.
- $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})=P^\top\boldsymbol{n}$.

次式は覚えておくこと。

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})=P\boldsymbol{n}. \tag{6}$$

3.4 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

3.4 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、$E=0$ のとき $P=-pI$ 等々)。それから

$$P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで I は単位テンソル, E は

$$E = (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{7}$$

で定められ、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor)、変形速度テンソルと呼ばれる。

3.4 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、$E=0$ のとき $P=-pI$ 等々)。それから

$$P=\alpha I+\beta E+\gamma E^2$$

が導かれる。ここで I は単位テンソル, E は

(7)
$$E=(e_{ij}),\quad e_{ij}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

で定められ、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor)、変形速度テンソルと呼ばれる。

さらに **Newton 流体の仮定** (P は E の 1 次式) をおくと、

(8)
$$P=(-p+\lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\,I+2\mu E$$

を得る (岡本・中村 [5])。ここで λ, μ は非負定数、$p=p(x,t)$ はスカラー関数である。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率** (**粘性係数**, **粘度**, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率** (**粘性係数**, **粘度**, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体** (perfect fluid), あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼ぶ。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率** (**粘性係数**, **粘度**, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体** (perfect fluid), あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率** (**粘性係数**, **粘度**, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体** (perfect fluid), あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ。

一方、$\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たす流体を**非圧縮流体**と呼ぶ。一般に連続の方程式 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \quad (\textbf{非圧縮条件の方程式}) \tag{9}$$

($\because$ 連続の方程式のうち $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ という形のものを見れば分かる。)

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率** (**粘性係数**, **粘度**, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体** (perfect fluid), あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ。

一方、$\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たす流体を**非圧縮流体**と呼ぶ。一般に連続の方程式 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

(9) $$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad (\textbf{非圧縮条件の方程式})$$

($\because$ 連続の方程式のうち $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ という形のものを見れば分かる。)

非圧縮条件を満たす Newton 流体の応力テンソルは、次式を満たす。

(10) $$P = -pI + 2\mu E.$$

2023/5/30 の授業はここまで。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ($\boldsymbol{v} = 0$) や、完全流体 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ($\boldsymbol{v} = 0$) や、完全流体 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n} = -p\boldsymbol{n}.$$

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ($\boldsymbol{v} = 0$) や、完全流体 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n} = -p\boldsymbol{n}.$$

応力は面に垂直 ($\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{n}$)、押される向きで (外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と逆向き)、大きさは $p = p(\boldsymbol{x}, t)$ で $\boldsymbol{n}$ にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf (2015〜).

[2] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).

[3] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006〜).

[4] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/vector_analysis.pdf (2021/5/31).

[5] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座現代数学の基礎 (1996〜1999) の分冊を単行本化したもの.