応用複素関数 第 8 回
～ 流体力学への応用 (3) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2023 年 6 月 6 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 流体力学の話の 3 回目。運動方程式を駆け足で終えて、ポテンシャル流、特に 2 次元非圧縮ポテンシャル流の話をする。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ($\boldsymbol{v} = 0$) や、完全流体 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ($\boldsymbol{v}=0$) や、完全流体 ($\mu=0$) においては ($\mu E=0$ であるので)

$$P=-pI=-\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})=P\boldsymbol{n}=-p\boldsymbol{n}.$$

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ($\boldsymbol{v} = 0$) や、完全流体 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n} = -p\boldsymbol{n}.$$

応力は面に垂直 ($\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{n}$)、押される向きで (外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と逆向き)、大きさは $p = p(\boldsymbol{x}, t)$ で $\boldsymbol{n}$ にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

3.6 流体の運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、一般に次の方程式が成立する。

(1) $$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div} P \quad (\textbf{流体の運動方程式}) .$$

ただし

(2) $$\operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

3.6 流体の運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、一般に次の方程式が成立する。

(1) $$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div} P \quad (\textbf{流体の運動方程式}).$$

ただし

(2) $$\operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明　流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P\mathbf{n}\, d\sigma.$$

3.6 流体の運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、一般に次の方程式が成立する。

(1) $$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div} P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

(2) $$\operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明　流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial V} P\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

右辺のベクトルの第 i 成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V} (p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3) d\sigma = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i\, d\boldsymbol{x}.$$

3.6 流体の運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、一般に次の方程式が成立する。

(1) $$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div} P \quad (\textbf{流体の運動方程式}).$$

ただし

(2) $$\operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明 流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial V} P\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

右辺のベクトルの第 i 成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V} (p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3) d\sigma = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i\, d\boldsymbol{x}.$$

ゆえに $\int_V \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\, d\boldsymbol{x} = \int_V \operatorname{div} P\, d\boldsymbol{x}$. V は任意なので $\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \operatorname{div} P$. □

3.6 流体の運動方程式 (2) $\operatorname{div} P$ を計算する

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。

3.6 流体の運動方程式 (2) $\operatorname{div} P$ を計算する

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v}) I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき $\operatorname{div} P$ を計算すると

(3) $$\operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}).$$

ただし

$$\triangle \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} \triangle v_1 \\ \triangle v_2 \\ \triangle v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad \text{(念のため)}.$$

3.6 流体の運動方程式 (2) $\mathrm{div}\, P$ を計算する

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき $\mathrm{div}\, P$ を計算すると

$$\mathrm{div}\, P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v} + (\lambda + \mu)\, \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}). \tag{3}$$

ただし

$$\triangle \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} \triangle v_1 \\ \triangle v_2 \\ \triangle v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} \quad (\text{念のため}).$$

特に非圧縮流体では ($\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0$ であるから)

$$\mathrm{div}\, P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v}. \tag{4}$$

これで準備はできた！

3.6 流体の運動方程式 (3) Navier-Stokes, Euler 方程式

非圧縮流体の運動方程式は次の形になる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v}. \tag{5}$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な**Navier-Stokes方程式**(ナヴィエ・ストークス)である。

ただし

$$\nu := \frac{\mu}{\rho} \tag{6}$$

とおいた。ν を**動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

3.6 流体の運動方程式 (3) Navier-Stokes, Euler 方程式

非圧縮流体の運動方程式は次の形になる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v}. \tag{5}$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な**Navier-Stokes方程式**(ナヴィエ・ストークス)である。

ただし

$$\nu := \frac{\mu}{\rho} \tag{6}$$

とおいた。ν を**動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

特に完全流体の場合は ($\mu = 0$ であるから)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{7}$$

これが非圧縮完全流体の方程式として有名な**Euler方程式**(オイラー)である。

3.6 流体の運動方程式 (4) Stokes 方程式

流速 ($|\boldsymbol{v}|$) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ を無視して ($\boldsymbol{v}=0$ で線形化する、とも言える)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\triangle\boldsymbol{v}. \tag{8}$$

を得る。これを **Stokes 方程式**と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

3.6 流体の運動方程式 (4) Stokes 方程式

流速 ($|\boldsymbol{v}|$) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ を無視して ($\boldsymbol{v}=0$ で線形化する、とも言える)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\triangle\boldsymbol{v}. \tag{8}$$

を得る。これを **Stokes 方程式**と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

この他にも線形化したもの、圧縮性流体 (最近流行している) の場合など、色々あるが、運動方程式の話はこのくらいにしておく。

3.6 流体の運動方程式 (5) 練習の勧め

今日の授業は、ほとんどが単なるお話になってしまう嫌いがあると思われる。

- (3) を確かめよ (導関数を計算するだけだが、ベクトル解析の記号の良い練習である)。
- Navier-Stokes 方程式ベクトル表記でなく、成分表記せよ ($(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ はどういうものか、一度は計算してみよう)。
- Navier-Stokes 方程式を覚えてみよう。

3.7 流体の境界条件 (1) 粘着境界条件

解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

3.7 流体の境界条件 (1) 粘着境界条件

解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

粘性流体では、固体の壁では

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{wall}} \quad \text{(壁の表面において)} \tag{9}$$

を満たすことが知られている ($\boldsymbol{v}_{\mathrm{wall}}$ は壁の速度)。特に固定壁では

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{(壁の表面において)} \tag{10}$$

を満たす。これを**粘着境界条件**と呼ぶ。

数学的にはいわゆる Dirichlet 境界条件であり、扱いやすい。

3.7 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n} \quad (\text{境界において}) \tag{11}$$

を**すべり境界条件**と呼ぶ。

3.7 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n} \quad \text{(境界において)} \tag{11}$$

を**すべり境界条件**と呼ぶ。速度の垂直成分が 0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が 0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

3.7 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$\text{(11)} \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n} \quad \text{(境界において)}$$

を**すべり境界条件**と呼ぶ。速度の垂直成分が 0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が 0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n}$ は、3 次元では

$$P\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$$

と表せる。また 2 次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$ として、次式で表せる。

$$P\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=0.$$

一方

$$\text{(11)} \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n} \quad \text{(境界において)}$$

を**すべり境界条件**と呼ぶ。速度の垂直成分が 0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が 0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n}$ は、3 次元では

$$P\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$$

と表せる。また 2 次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$ として、次式で表せる。

$$P\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=0.$$

注意　非粘性流体では、流体のしめる領域内で $P\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n}$ が成り立つ。$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ が滑り境界条件である、とみなしている人が多い。

3.7 流体の境界条件 (3) その他

これ以外に、応力を指定する**応力境界条件**というものもあるが、それは必要になったときに説明する。

3.8 おまけ: 静水圧の話 (1) $p = -\rho g z + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

3.8 おまけ: 静水圧の話 (1) $p = -\rho g z + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$$

が運動方程式になる。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$.

3.8 おまけ: 静水圧の話 (1) $p = -\rho g z + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$$

が運動方程式になる。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

3.8 おまけ: 静水圧の話 (1) $p = -\rho g z + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$$

が運動方程式になる。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、$z = 0$ において、$p = p_0 = $ 大気圧 とすると

$$p(\boldsymbol{x}) = -\rho g z + p_0.$$

3.8 おまけ: 静水圧の話 (1) $p = -\rho g z + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$$

が運動方程式になる。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、$z = 0$ において、$p = p_0 =$ 大気圧 とすると

$$p(\boldsymbol{x}) = -\rho g z + p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 1\ \mathrm{m} = 9.8 \times 10^3\ \mathrm{Pa}.$$

3.8 おまけ: 静水圧の話 (1) $p = -\rho g z + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$$

が運動方程式になる。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、$z = 0$ において、$p = p_0 =$ 大気圧 とすると

$$p(\boldsymbol{x}) = -\rho g z + p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 1\ \mathrm{m} = 9.8 \times 10^3\ \mathrm{Pa}.$$

大気圧 $p_0 = 1013\ \mathrm{hPa} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$ であるから、Δp は大気圧 p_0 の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、$\Delta p \fallingdotseq p_0$ となる訳である。

3.8 おまけ: 静水圧の話 (1) $p=-\rho g z+p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\triangle\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}$$

が運動方程式になる。$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g.$$

水面を $z=0$ として、$z=0$ において、$p=p_0=$ 大気圧 とすると

$$p(\boldsymbol{x})=-\rho g z+p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp は

$$\Delta p=-\rho g(-1)=1.0\times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}\times 9.8\ \mathrm{m/s^2}\times 1\ \mathrm{m}=9.8\times 10^3\ \mathrm{Pa}.$$

大気圧 $p_0=1013\ \mathrm{hPa}=1.013\times 10^5\ \mathrm{Pa}$ であるから、Δp は大気圧 p_0 の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、$\Delta p \fallingdotseq p_0$ となる訳である。

この問題は素朴な考え方で「解ける」ので、大げさな解き方のように思えるが、我々は導出した方程式をもとに考えようとしているので、無駄なことではない。

3.8 おまけ: 静水圧の話 (2) アルキメデスの浮力の原理

一様な重力場の下での池あるいは湖 (水が静止している) に物体 Ω を入れたとき、物体の表面は水から応力を受ける。その "合力" を求めよう。

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} P\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = \rho g \int_{\Omega} d\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{e}_3 = \rho\,|\Omega|\,g\boldsymbol{e}_3.$$

ただし

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Omega| = \Omega \text{ の体積}.$$

$\rho\,|\Omega|$ は「物体が押しのける水の質量」で、$\rho\,|\Omega|\,g$ はその重さ (重力) である。つまり向きが上向き ($\boldsymbol{e}_3$) で、大きさが「物体が押しのける水の重さ」である力となる。これが**浮力**である。

3.9 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問　水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

3.9 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問 水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答 水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}. \quad \square$$

3.9 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問　水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答　水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。μ については確かにそうだが、ν については逆転している (水の ρ が 3 桁大きいのが効いている)。

3.9 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問　水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答　水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。μ については確かにそうだが、ν については逆転している (水の ρ が 3 桁大きいのが効いている)。

なお、サラダ油は水の 60 ～ 80 倍程度であるという。

温度が上がると μ は小さくなる。

気体の場合は、μ は圧力にはほとんどよらない。

3.10 渦度　駆け足の説明

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を**渦度**(うずど) (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の “自転” の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

3.10 渦度　駆け足の説明

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega}:=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

を**渦度**（うずど） (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の “自転” の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解　：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を**渦度**(うずど) (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の "自転" の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解　：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは**渦なし**, **非回転** (irrotational), **層状** (lammelar) などという。

3.10 渦度　駆け足の説明

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を**渦度**（うずど） (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の "自転" の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解　：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは**渦なし**, **非回転** (irrotational), **層状** (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である (次のスライドを見よ) という意味で使う場合があるようだ。

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を**渦度**（うずど） (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の “自転” の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解　：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは**渦なし**, **非回転** (irrotational), **層状** (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である (次のスライドを見よ) という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ である。」

3.11 ポテンシャル流　3.11.1 ポテンシャル, 渦無し

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ $(\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi)$ を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ $(\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi)$ を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

$(\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \mathbf{0}.)$

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi$) を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

($\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

($\because$ これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi$) を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

($\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

($\because$ これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

3.11 ポテンシャル流　3.11.1 ポテンシャル, 渦無し

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v}=\nabla\phi$ $(\nabla\phi=\operatorname{grad}\phi)$ を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

($\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad}=\mathbf{0}$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi=\mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

($\because$ これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ ≒ ポテンシャル流

3.11.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

領域 Ω における速度場 $\boldsymbol{v}$ が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \triangle \phi.$$

領域 Ω における速度場 $\boldsymbol{v}$ が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \triangle \phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) と仮定すると

$$\triangle \phi = 0.$$

3.11.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

領域 Ω における速度場 $\boldsymbol{v}$ が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \triangle \phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) と仮定すると

$$\triangle \phi = 0.$$

一方、領域の境界 $\partial\Omega$ 上の点において、

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \nabla \phi \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

(青字で書いたものは一般に成り立つ公式である。)

3.11.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

領域 Ω における速度場 $\boldsymbol{v}$ が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \triangle \phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) と仮定すると

$$\triangle \phi = 0.$$

一方、領域の境界 $\partial\Omega$ 上の点において、

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \nabla \phi \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

(青字で書いたものは一般に成り立つ公式である。)

ゆえに ϕ は、次の **Laplace 方程式の Neumann 境界値問題**の解である。

$$\triangle \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{12}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{13}$$

もしも $\boldsymbol{v}$ の $\partial\Omega$ での値が既知ならば、この問題を解いて ϕ が (ゆえに $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \phi$ も) 求まる。この問題はポピュラーで、数値計算のやり方もよりどりみどりである (後でいくつか紹介する)。

3.11.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{15}$$

の解が存在するためには、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

(必要性: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}\phi\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \triangle\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0$)

3.11.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{15}$$

の解が存在するためには、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

(必要性: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}\phi\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \triangle\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0$)

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。

3.11.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{15}$$

の解が存在するためには、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

(必要性: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}\phi\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega}\triangle\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0$)

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。実際、$g = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ で、非圧縮 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ を仮定しているので、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

$g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{14}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{15}$$

の解が存在するためには、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

(必要性: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}\phi \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \triangle\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0$)

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。実際、$g = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ で、非圧縮 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ を仮定しているので、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

解には定数差の自由度が残る (解 + 定数は解、2 つの解の差は定数)。

3.11.3 まとめ

3 次元で、非圧縮のポテンシャル流は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題を解くことで「解ける」ことが分かった。

2 次元の場合も同様のことが成り立つが、実はより便利に、複素関数論が適用できる、という話を以下で紹介する。

(一方、2 次元の Laplace 方程式の境界値問題は、複素関数論のあちこちで登場する。直接的に正則関数が登場しないが、複素関数論の項目の一つと考えるべきかもしれない。)

速度場 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしているとき、流れは 2 次元的, **2 次元流**であるという (このとき、$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}=0$, $\boldsymbol{v}$ の z 成分 $=0$. 逆は必ずしも真ではない。)。

速度場 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix}u(x,y,t)\\ v(x,y,t)\\ 0\end{pmatrix}$ の形をしているとき、流れは2次元的, **2次元流**であるという (このとき、$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}=0$, $\boldsymbol{v}$ の z 成分 $=0$. 逆は必ずしも真ではない。)。

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

そこで、2次元ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,t)=\begin{pmatrix}u(x,y,t)\\ v(x,y,t)\end{pmatrix}$ に対して、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}:=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

と定め、これを $\boldsymbol{v}$ の**渦度**と呼ぶことがある。この講義でも採用する。

3.12.1 渦度, 渦無しの流れ

2 次元流についても、3 次元流とほぼ同じことが成立する。

命題 8.1 (2 次元流における渦なし流)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし $(\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0)$。
2. 渦なし $(\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0)$ ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ とする。

証明は 3 次元の場合と同じ。

3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

2 次元流の速度場 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす ψ が存在するとき、ψ を $\boldsymbol{v}$ の**流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

2 次元流の速度場 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす ψ が存在するとき、ψ を $\boldsymbol{v}$ の**流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

定義 8.2 (流線)

曲線が速度場 $\boldsymbol{v}$ の**流線** (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることをいう。

3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

2 次元流の速度場 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=u$$

を満たす ψ が存在するとき、ψ を $\boldsymbol{v}$ の**流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

定義 8.2 (流線)

曲線が速度場 $\boldsymbol{v}$ の**流線** (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることをいう。

注意　流れ関数の等高線 ($\psi=\mathrm{const.}$ で定まる曲線) のことを流線と定義することもあるが、ここでしたように、流線は流れ関数を用いずに定義することもできる。そうしておいて、流れ関数が存在する場合は、その等高線が流線になる、と論じることを選んだ。)

命題 8.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

命題 8.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

証明.

$\nabla\psi \cdot \boldsymbol{v} = \psi_x u + \psi_y v = -vu + uv = 0$ であるから $\nabla\psi \perp \boldsymbol{v}$. $\nabla\psi$ は流れ関数 ψ の等高線の法線ベクトルであるから、それが $\boldsymbol{v}$ と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることを意味する。ゆえに流れ関数の等高線は流線である。 $\square$

命題 8.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

証明.

$\nabla\psi \cdot \boldsymbol{v} = \psi_x u + \psi_y v = -vu + uv = 0$ であるから $\nabla\psi \perp \boldsymbol{v}$. $\nabla\psi$ は流れ関数 ψ の等高線の法線ベクトルであるから、それが $\boldsymbol{v}$ と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることを意味する。ゆえに流れ関数の等高線は流線である。 □

より具体的に、$\nabla\psi$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転すると $\boldsymbol{v}$ に等しい。実際

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \nabla\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}.$$

命題 8.4 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.12 2 次元流　非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 8.4 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。　既視感があるね。とにかく証明するけど。

命題 8.4 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$)。
2. 非圧縮 ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi=-\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi=0$.

ただし $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}:=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ とする。　既視感があるね。とにかく証明するけど。

証明　(1) $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0.$

(2) $\operatorname{rot}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial x}(-v)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\boldsymbol{x}):=\displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}\cdot d\boldsymbol{r}$ が well-defined であり、$\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=-v$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=u$. ゆえに ψ は $\boldsymbol{v}$ の流れ関数である。

(3) $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=-\triangle\psi.$ □

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、とりあえず飛ばしても良い。)

考えている領域 Ω 内に定点 $\boldsymbol{a}$ を選び、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取ると、$\psi(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が流れ関数となった。弧長パラメーター s を用いると、$\boldsymbol{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds.$$

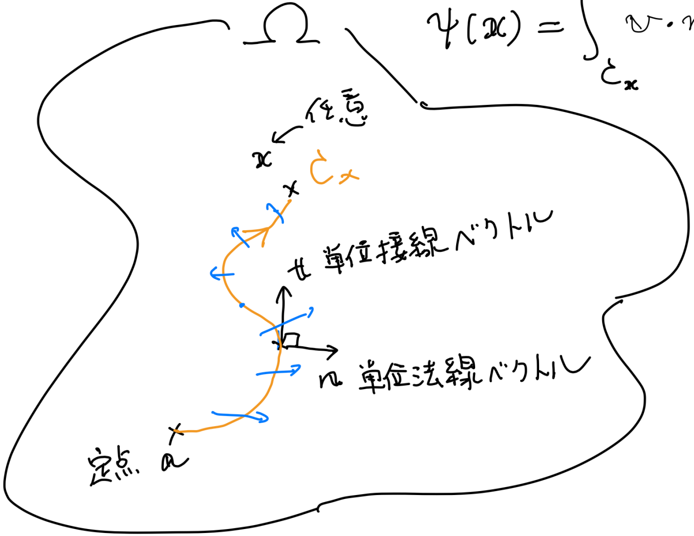
ただし

$$\boldsymbol{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

($\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{t}$ を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\boldsymbol{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、$C_{\boldsymbol{x}}$ を横切り、$\boldsymbol{n}$ の側に単位時間に流れる流体の量 (2 次元なので面積) である。

$$\psi(x) = \int_{C_x} v \cdot n \, ds$$



複素測度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

(16)
$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \operatorname{Im}\int_C f'(z)\,dz.$$

実際、

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = -v\,dx + u\,dy = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z)\,dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i\,dy) \\ &= (\phi_x dx - \psi_x dy) + i(\psi_x dx + \phi_x dy) \\ &= (\phi_x dx + \phi_y dy) + i(\psi_x dx + \psi_y dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \operatorname{Im} f'(z)\,dz.$$

3.12.3 単連結領域における 2 次元非圧縮渦なし流 (1)

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

3.12.3 単連結領域における 2 次元非圧縮渦なし流 (1)

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

命題 8.5 (渦なし流と速度ポテンシャル)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$)。
2. 渦なし ($\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

命題 8.6 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.12 単連結領域における 2 次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

渦なし、非圧縮の両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

そして

$$\triangle\phi = \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \triangle\psi = -\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0.$$

このとき

$$f(x+iy) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

とおき、f を $\boldsymbol{v}$ の**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

3.12 単連結領域における 2 次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

渦なし、非圧縮の両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

そして

$$\triangle\phi = \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \triangle\psi = -\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0.$$

このとき

$$f(x+iy) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

とおき、f を $\boldsymbol{v}$ の**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

実は **f は正則関数である**。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、$f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv$.

3.12 2 次元流　非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 8.7 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.12 2次元流　非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 8.7 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$)。
2. 非圧縮 ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi=-\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi=0$.

ただし $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}:=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$ とする。　渦無しと速度ポテンシャルの関係と似てる。

命題 8.7 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。　渦無しと速度ポテンシャルの関係と似てる。

証明 (1) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$

3.12 2次元流　非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 8.7 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。　渦無しと速度ポテンシャルの関係と似てる。

証明 (1) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$

命題 8.7 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ とする。　渦無しと速度ポテンシャルの関係と似てる。

証明 (1) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$

(2) $\operatorname{rot}\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}(-v) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が well-defined であり、$\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u$.
ゆえに ψ は $\boldsymbol{v}$ の流れ関数である。

命題 8.7 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ とする。　渦無しと速度ポテンシャルの関係と似てる。

証明 (1) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$

(2) $\operatorname{rot}\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}(-v) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が well-defined であり、$\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u$.
ゆえに ψ は $\boldsymbol{v}$ の流れ関数である。

(3) $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = -\triangle\psi.$ □

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、飛ばしても良い。)

考えている領域 Ω 内に定点 $\boldsymbol{a}$ を選び、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取ると、$\psi(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が流れ関数となった。弧長パラメーター s を用いると、$\boldsymbol{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds.$$

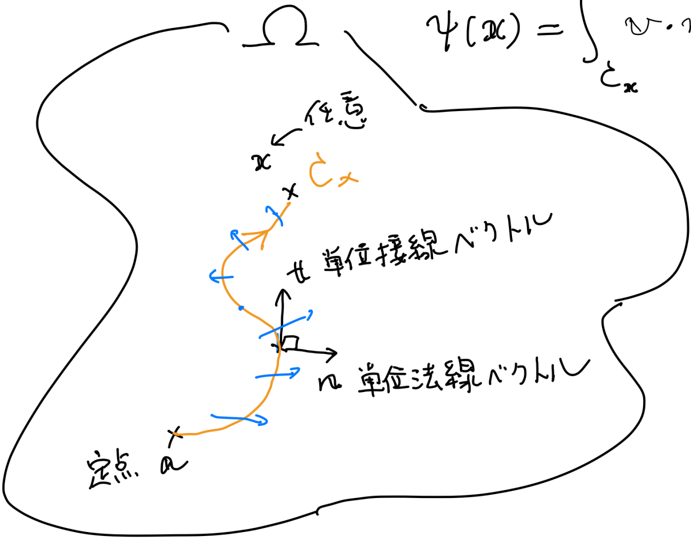
ただし

$$\boldsymbol{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

($\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{t}$ を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\boldsymbol{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、$C_{\boldsymbol{x}}$ を横切り、$\boldsymbol{n}$ の側に単位時間に流れる流体の量 (2 次元なので面積) である。

$$\psi(x) = \int_{C_x} v \cdot n \, ds$$



(フライングになるが、複素速度ポテンシャルが存在する場合について)

複素速度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \mathrm{Im}\int_C f'(z)\,dz. \tag{17}$$

実際、

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = -v\,dx + u\,dy = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z)\,dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i\,dy) \\ &= (\phi_x dx - \psi_x dy) + i(\psi_x dx + \phi_x dy) \\ &= (\phi_x dx + \phi_y dy) + i(\psi_x dx + \psi_y dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \mathrm{Im}\,f'(z)\,dz.$$

3.13 2次元非圧縮渦なし流 (1) 振り返り

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

3.13 2次元非圧縮渦なし流 (1) 振り返り

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

命題 8.8 (渦なし流と速度ポテンシャル)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

命題 8.9 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.13 2次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

2次元で、非圧縮と渦なしの両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

このとき

$$f(x+iy) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

とおき、f を $\boldsymbol{v}$ の**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

3.13 2次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

2次元で、非圧縮と渦なしの両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{pmatrix} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}\psi_y\\ -\psi_x\end{pmatrix}.$$

このとき

$$f(x+iy) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

とおき、f を $\boldsymbol{v}$ の**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

実は f **は正則関数である**。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、$f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv.$

3.13 2 次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

2 次元で、非圧縮と渦なしの両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix}\phi_x \\ \phi_y\end{pmatrix} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}\psi_y \\ -\psi_x\end{pmatrix}.$$

このとき

$$f(x+iy) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

とおき、f を $\boldsymbol{v}$ の**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

実は f **は正則関数である**。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、$f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv$.

ϕ と ψ は調和関数である。正則関数の常識であるが、次の式も見ておこう。

$$\triangle\phi = \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \triangle\psi = -\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0.$$

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

　複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

ゆえに任意の正則関数 f について

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部 u, 虚部 v の等高線は互いに直交している。**

(復習: $\operatorname{grad} \phi$ は ϕ の等高線 ($\phi(x, y) = c$) の法線ベクトルである。)

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

ゆえに任意の正則関数 f について

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部 u, 虚部 v の等高線は互いに直交している。**

(復習: $\operatorname{grad}\phi$ は ϕ の等高線 ($\phi(x, y) = c$) の法線ベクトルである。)

複素関数の有名なテキストである Ahlfors [1] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに具体例をあげて説明してある。

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

　複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

　ゆえに任意の正則関数 f について

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部 u, 虚部 v の等高線は互いに直交している。**

(復習: $\operatorname{grad}\phi$ は ϕ の等高線 ($\phi(x,y)=c$) の法線ベクトルである。)

　複素関数の有名なテキストである Ahlfors [1] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに具体例をあげて説明してある。

(小さな文字で流体の話に戻すと　等ポテンシャル線と流線は直交する、ということ。)

3.14 簡単な関数の表す流れ　3.14.1 一様流

1 次関数 $f(z) = cz,\ c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

3.14 簡単な関数の表す流れ　3.14.1 一様流

1 次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$
$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

1 次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x+yi) = (p-iq)(x+yi) = px + qy + i(-qx+py),$$
$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数 f の定める速度場の成分を u, v とすると、$f' = u - iv$.

1 次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$
$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数 f の定める速度場の成分を u, v とすると、$f' = u - iv$.

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流**と呼ばれる。

1 次関数は一様流の速度ポテンシャルである。

1 次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$
$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数 f の定める速度場の成分を u, v とすると、$f' = u - iv$.

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流**と呼ばれる。

1 次関数は一様流の速度ポテンシャルである。

このとき、速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = px + qy, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = -qx + py.$$

3.14.1 一様流 続き

　等ポテンシャル線 ($\phi = \mathrm{const.}$) も、流線 ($\psi = \mathrm{const.}$) も平行直線群であり、それらは互いに直交する。

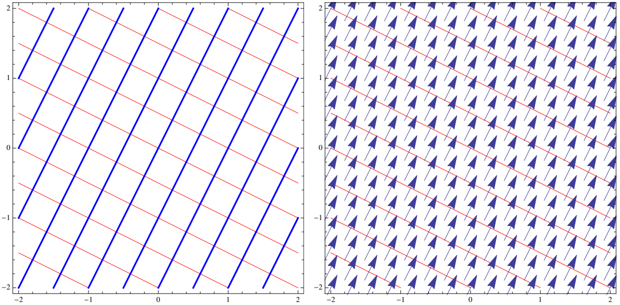


図 1: 一様流の等ポテンシャル線 (赤)、流線 (青) と速度ベクトル

3.14.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.

3.14.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

3.14.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f\left(re^{i\theta}\right) = m\left(\log r + i\theta\right) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right).$$

3.14.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$\begin{aligned} f\left(re^{i\theta}\right) &= m\left(\log r + i\theta\right) = m \log r + im\theta, \\ u - iv = f'(z) &= \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right). \end{aligned}$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r}\cos\theta \\ \frac{m}{r}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

3.14.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f\left(re^{i\theta}\right) = m\left(\log r + i\theta\right) = m \log r + im\theta,$$
$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r}\cos\theta \\ \frac{m}{r}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ と同じ。$m > 0$ ならば向きも同じ (湧き出し)、$m < 0$ ならば向きは逆 (吸い込み)。

$\boldsymbol{v}$ の大きさ $|\boldsymbol{v}|$ は $\frac{|m|}{r}$ で、原点からの距離に反比例している。

3.14.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f\left(re^{i\theta}\right) = m\left(\log r + i\theta\right) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r}\cos\theta \\ \frac{m}{r}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ と同じ。$m > 0$ ならば向きも同じ (湧き出し)、$m < 0$ ならば向きは逆 (吸い込み)。

$\boldsymbol{v}$ の大きさ $|\boldsymbol{v}|$ は $\frac{|m|}{r}$ で、原点からの距離に反比例している。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = m \log r, \quad \psi(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = m\theta.$$

3.14.2 湧き出しと吸い込み (続き)

等ポテンシャル線 ($\phi = m \log r =$ 定数) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi = m\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

　等ポテンシャル線 ($\phi = m \log r =$ 定数) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi = m\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

原点を正の向きに一周する閉曲線 C に対し、C から外に湧き出る流量は

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \mathrm{Im} \int_C f'(z)\, dz = \mathrm{Im} \int_C \frac{m}{z}\, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

3.14.2 湧き出しと吸い込み (続き)

等ポテンシャル線 ($\phi = m \log r =$ 定数) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi = m\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

原点を正の向きに一周する閉曲線 C に対し、C から外に湧き出る流量は

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \mathrm{Im} \int_C f'(z)\, dz = \mathrm{Im} \int_C \frac{m}{z}\, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

この流れは、$m > 0$ ならば原点においた**湧き出し** (source), $m < 0$ ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。

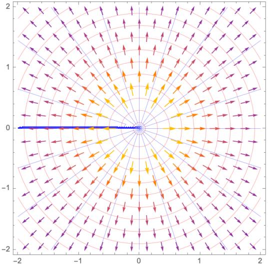


図 2: 湧き出しの等ポテンシャル線, 流線, 速度場

3.14.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z \ (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.

3.14.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa \left(\log r + i\theta\right) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = \frac{\kappa}{r}\left(\sin\theta + i\cos\theta\right).$$

3.14.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa\,(\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\kappa}{r}(\sin\theta + i\cos\theta)\,.$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3.14.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa \left(\log r + i\theta\right) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = \frac{\kappa}{r}\left(\sin\theta + i\cos\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転した方向である。$\kappa > 0$ ならば向きも同じ (時計回り)、$\kappa < 0$ ならば向きは逆 (反時計回り)。
$\boldsymbol{v}$ の大きさは $\frac{|\kappa|}{r}$ で、原点からの距離に反比例する。

3.14.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa\,(\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}\,(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\kappa}{r}\,(\sin\theta + i\cos\theta)\,.$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転した方向である。$\kappa > 0$ ならば向きも同じ (時計回り)、$\kappa < 0$ ならば向きは逆 (反時計回り)。

$\boldsymbol{v}$ の大きさは $\frac{|\kappa|}{r}$ で、原点からの距離に反比例する。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = -\kappa\theta, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \kappa \log r.$$

3.14.3 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = -\kappa\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線で、流線 ($\psi = \kappa \log r =$ 定数) は原点を中心とする円である。

3.14.3 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = -\kappa\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線で、流線 ($\psi = \kappa \log r =$ 定数) は原点を中心とする円である。

この流れは、原点に置かれた**渦糸**(うずいと) (vortex filament, vortex string) または**点渦**(てんうず) (point vortex) と呼ばれる。

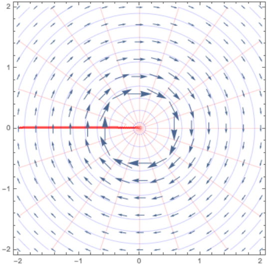
3.14.3 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = -\kappa\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線で、流線 ($\psi = \kappa \log r =$ 定数) は原点を中心とする円である。

この流れは、原点に置かれた**渦糸**(うずいと) (vortex filament, vortex string) または**点渦**(てんうず) (point vortex) と呼ばれる。

渦度は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全体で 0. (渦度が原点に集中していて他は渦なし、と考えるべきかもしれない。)

問 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$ を確かめよ (f は一価正則でなく、前回の説明の範疇には収まらないので、念のため確認)。



3.14.4 Mathematica で可視化する

以上の単純な場合は、紙とペンでも十分理解可能であるが、この辺で文明の利器を。

コマンドをコピペできると便利なので、この部分の資料は WWW に置く。

「簡単な正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れの可視化」
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/fluid_mathematica/

3.14 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。

3.14 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり 2 次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_2 = 0$$

であれば

3.14 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり 2 次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_2 = 0$$

であれば

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = (u_1 - iv_1) + (u_2 - iv_2) \\
&\qquad\qquad = (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2).
\end{aligned}$$

3.14 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり 2 次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_2 = 0$$

であれば

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = (u_1 - iv_1) + (u_2 - iv_2) \\
&\qquad\qquad = (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2).
\end{aligned}$$

流れを合成するには、複素速度ポテンシャルを足せば良い

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos\theta + m \log r + i\left(Ur \sin\theta + m\theta\right). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin\theta + m\theta.$$

3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur\cos\theta + m\log r + i\left(Ur\sin\theta + m\theta\right). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur\sin\theta + m\theta.$$

$\theta = 0$ とすると $\psi = 0$, また $\theta = \pi$ とすると $\psi = m\pi$ であるから、これらは ψ の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m\log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m\log z = Ur\cos\theta + m\log r + i\left(Ur\sin\theta + m\theta\right). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur\sin\theta + m\theta.$$

$\theta = 0$ とすると $\psi = 0$, また $\theta = \pi$ とすると $\psi = m\pi$ であるから、これらは ψ の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

また $\theta \in (0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$ とすると

(18)

$$\psi = m\pi \Leftrightarrow Ur\sin\theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \frac{m\left(\pi - \theta\right)}{U\sin\theta} \Leftrightarrow r = \frac{m}{U}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

ただし $\varphi := \pi - \theta$.

$\theta \in (0, \pi)$ $(\varphi \in (0, \pi))$ と $\theta \in (\pi, 2\pi)$ $(\varphi \in (-\pi, 0))$ で分けて考える。

3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

これは右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である [1]。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響は受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。

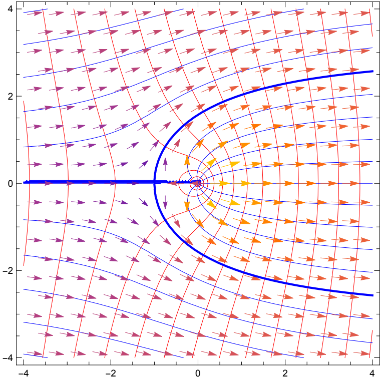


図 4: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は $\psi = \pm m\pi$)

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z = -a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m\log(z-a) - m\log(z+a) = m\log\frac{z-a}{z+a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C}\setminus[-a,a]$ で一価正則である！)

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

　$z = a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z = -a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$ で一価正則である！)
　分子, 分母の z を、それぞれ $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$, $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m \left((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2) \right) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im \left(\theta_1 - \theta_2 \right).$$

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z = -a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m\log(z-a) - m\log(z+a) = m\log\frac{z-a}{z+a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C}\setminus[-a,a]$ で一価正則である！)
分子, 分母の z を、それぞれ $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$, $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m\left((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)\right) = m\log\frac{r_1}{r_2} + im\left(\theta_1 - \theta_2\right).$$

等ポテンシャル線の方程式は $\dfrac{r_1}{r_2} =$ 定数. アポロニウスの円を表す。

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z=a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z=-a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m\log(z-a) - m\log(z+a) = m\log\frac{z-a}{z+a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C}\setminus[-a,a]$ で一価正則である！)

分子, 分母の z を、それぞれ $z=a+r_1e^{i\theta_1}$, $z=-a+r_2e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m\left((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)\right) = m\log\frac{r_1}{r_2} + im\left(\theta_1-\theta_2\right).$$

等ポテンシャル線の方程式は $\dfrac{r_1}{r_2}=$ 定数. アポロニウスの円を表す。

流線の方程式は $\Theta := \theta_1-\theta_2=$ 定数. Θ は a, $-a$ から点 z を見込む角であるので、2 点 $\pm a$ を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対 (続き)

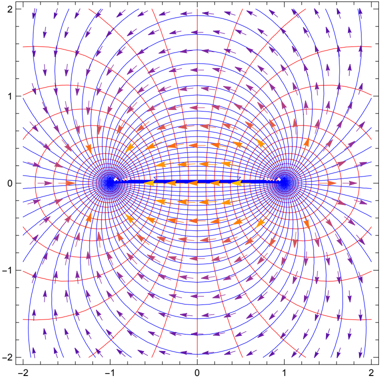


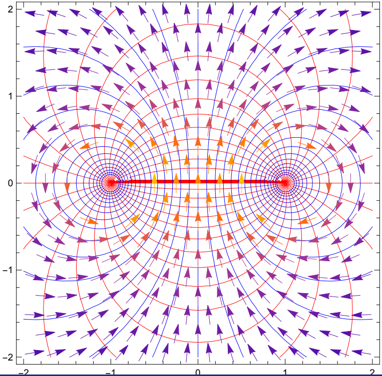
図 5: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

3.14.3 同じ強さ反対向きの渦の対

等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦を $z = a, -a$ に置いて重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) := i\kappa \log \frac{z-a}{z+a}.$$

等ポテンシャル線、流線の方程式はそれぞれ $\theta_1 - \theta_2 =$ 定数, $\frac{r_1}{r_2} =$ 定数で、どちらも円を表す。



3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$, $-a$ に置いた湧き出し $f_2(z) = m\log(z+a)$, a に置いた吸い込み $f_3(z) = -m\log(z-a)$ を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m\log(z+a) - m\log(z-a) = Uz + m\log\frac{z+a}{z-a}.$$

3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$, $-a$ に置いた湧き出し $f_2(z) = m\log(z+a)$, a に置いた吸い込み $f_3(z) = -m\log(z-a)$ を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m\log(z+a) - m\log(z-a) = Uz + m\log\frac{z+a}{z-a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m\tan^{-1}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

実軸 $y=0$ では、$\psi = 0$ であるから、実軸は 1 つの流線である。また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U}\tan^{-1}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine bpdy) と呼ぶ。

3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body) 続き

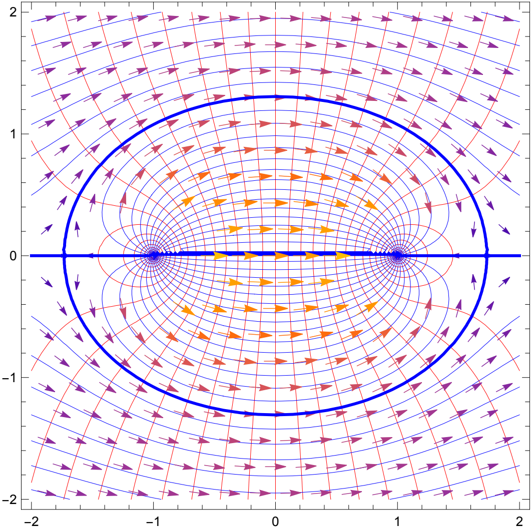


図 7: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

3.14.5 2 重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m \log(z - a) - m \log(z + a).$$

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a) = -\mu\frac{\log(z+a) - \log(z-a)}{2a}$$

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m\log(z-a) - m\log(z+a) = -\mu\frac{\log(z+a)-\log(z-a)}{2a} \\ &\to F(z) := -\mu\frac{d}{dz}\log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2+y^2} + i\frac{\mu y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m\log(z-a) - m\log(z+a) = -\mu\frac{\log(z+a)-\log(z-a)}{2a} \\ &\to F(z) := -\mu\frac{d}{dz}\log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2+y^2} + i\frac{\mu y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

F を複素速度ポテンシャルとする流れを**二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。

$F(z) := -\frac{\mu}{z}$ の定める流れの等ポテンシャル線は、実軸上に中心を持ち原点を通る円、または虚軸 (原点を除く) である。

一方、流線は、虚軸上に中心を持ち原点を通る円または実軸 (原点を除く) である。

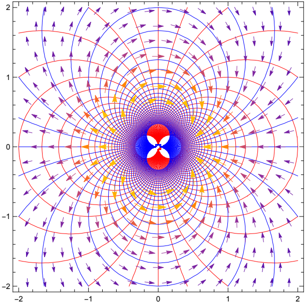


図 8: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U\left(r\cos\theta + i\sin\theta + \frac{R^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\right)$$

であるから、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta.$$

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) としてみて $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U\left(r\cos\theta + i\sin\theta + \frac{R^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\right)$$

であるから、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta.$$

特に円周 $r = R$ 上で $\psi = 0$ であるから、$r = R$ は流線である。

3.14.6 円柱を過ぎる一様流 (続き)

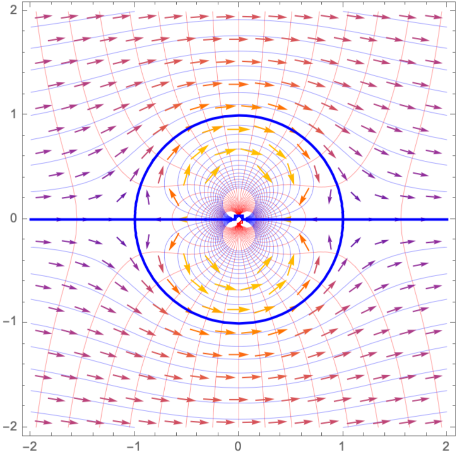


図 9: 円柱を過ぎる一様流

完全流体の一様流の中に円柱を入れると

参考文献

[1] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).