

# 応用複素関数 第9回

## ～ 流体力学への応用 (4) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2023年6月20日 (本来13日にするはずの講義)

# 目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 流体力学への複素関数の応用 (続き)
  - ポテンシャル流 (続き)
    - まとめ
  - 2次元流
    - 渦度, 渦無しの流れ
    - 非圧縮流と流れ関数
  - 2次元非圧縮渦なし流
  - 簡単な関数の表す流れ
    - 一様流
    - 湧き出しと吸い込み
    - 渦糸 (点渦)
    - Mathematica で可視化する
  - 流れの合成
    - 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ
    - 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対
    - 同じ強さ反対向きの渦の対
    - ランキンの卵形 (Rankine body)
    - 2重湧き出し (doublet)
    - 円柱を過ぎる一様流

## ③ 参考文献

# 本日の内容・連絡事項

- 先週は体調不良で、突然休講にしてしまいました。すみません。色々流行っているので皆さんも気をつけて下さい。補講ですが、メディア授業が認められているので、オンデマンドで行うことを考えています。
- 本日から、2次元の流れ、特に渦なし非圧縮流の話を始めます。いよいよ関数論の出番。Mathematica も使い始めます。
  - 「複素関数と流体力学」桂田 [1]…講義ノートのようなもの。
  - 「ベクトル解析早見表」桂田 [2]…定義式や定理。

参考書として、今井 [3], 巽 [4] をあげておく (他にもあるけれど、それらは [1] を見て下さい)。

### 3.11.3 まとめ

3次元で、非圧縮のポテンシャル流は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題を解くことで「解ける」ことが分かった。

2次元の場合も同様のことが成り立つが、実はより便利に、複素関数論が適用できる、という話を以下で紹介する。

(一方、2次元の Laplace 方程式の境界値問題は、複素関数論のあちこちで登場する。直接的に正則関数が登場しないが、複素関数論の項目の一つと考えるべきかもしれない。)

## 3.12 2次元流 3.12.1 渦度, 渦無しの流れ

速度場  $\mathbf{v}$  が  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}$  の形をしているとき、流れは2次元の、**2次元流**であるという(このとき、 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$ ,  $\mathbf{v}$  の  $z$  成分 = 0. 逆は必ずしも真ではない。 )。

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

そこで、2次元ベクトル場  $\mathbf{v}(x, y, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{pmatrix}$  に対して、

$$\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

と定め、これを  $\mathbf{v}$  の**渦度**と呼ぶことがある。この講義でも採用する。

## 3.12.1 渦度, 渦無しの流れ

2次元流についても、3次元流とほぼ同じことが成立する。

### 命題 9.1 (2次元流における渦なし流)

2次元の速度場  $\mathbf{v}$  について

- ①  $\mathbf{v}$  のポテンシャルが存在すれば渦なし ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ )。
- ② 渦なし ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ) ならば、任意の単連結領域で  $\mathbf{v}$  のポテンシャルが存在する。
- ③  $\mathbf{v}$  のポテンシャル  $\phi$  が存在するとき、 $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{v}$ . 特に非圧縮流ならば  $\Delta\phi = 0$ .

ただし  $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  とする。

証明は3次元の場合と同じ。

## 3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

2次元流の速度場  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす  $\psi$  が存在するとき、 $\psi$  を  $\mathbf{v}$  の **流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

### 定義 9.2 (流線)

曲線が速度場  $\mathbf{v}$  の **流線** (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが  $\mathbf{v}$  と平行であることをいう。

**注意** 流れ関数の等高線 ( $\psi = \text{const.}$  で定まる曲線) のことを流線と定義することもあるが、ここでしたように、流線は流れ関数を用いずに定義することもできる。そうしておいて、流れ関数が存在する場合は、その等高線が流線になる、と論じることを選んだ。)

## 3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (2)

### 命題 9.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

### 証明.

$\nabla\psi \cdot \mathbf{v} = \psi_x u + \psi_y v = -vu + uv = 0$  であるから  $\nabla\psi \perp \mathbf{v}$ .  $\nabla\psi$  は流れ関数  $\psi$  の等高線の法線ベクトルであるから、それが  $\mathbf{v}$  と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが  $\mathbf{v}$  と平行であることを意味する。ゆえに流れ関数の等高線は流線である。  $\square$

より具体的に、 $\nabla\psi$  を  $-\frac{\pi}{2}$  回転すると  $\mathbf{v}$  に等しい。実際

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \nabla\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$



## 3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (3)

### 命題 9.4 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場  $\mathbf{v}$  について

- ①  $\mathbf{v}$  の流れ関数が存在すれば非圧縮 ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ )。
- ② 非圧縮 ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) ならば、任意の単連結領域で  $\mathbf{v}$  の流れ関数が存在する。
- ③  $\mathbf{v}$  の流れ関数  $\psi$  が存在するとき、 $\Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v}$ . 特に渦なしならば  $\Delta\psi = 0$ .

ただし  $\operatorname{rot} \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  とする。渦なしと速度ポテンシャルの関係に似てる。

証明 (1)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$ .

(2)  $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(-v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  であるから、任意の単連結領域で  $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$  が well-defined であり、 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$ . ゆえに  $\psi$  は  $\mathbf{v}$  の流れ関数である。

(3)  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Delta\psi$ . □

### 3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (4) 流れ関数の意味

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、飛ばしても良い。)

考えている領域  $\Omega$  内に定点  $\mathbf{a}$  を選び、 $\mathbf{a}$  から  $\mathbf{x} \in \Omega$  に至る  $\Omega$  内の曲線  $C_x$  を取ると、 $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$  が流れ関数となった。弧長パラメータ  $s$  を用いると、 $\mathbf{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$  は単位接線ベクトルとなり

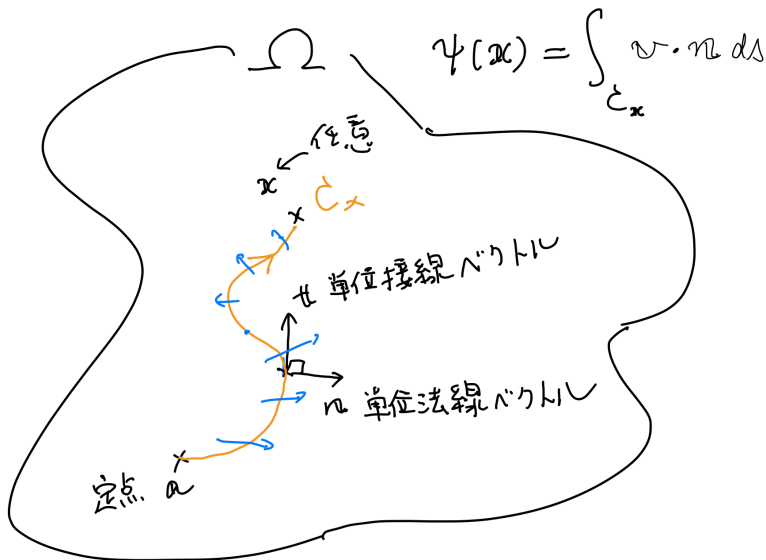
$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} ds = \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

ただし

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

( $\mathbf{n}$  は  $\mathbf{t}$  を  $-\pi/2$  回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\mathbf{x})$  はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、 $C_x$  を横切り、 $\mathbf{n}$  の側に単位時間に流れる流体の量 (2次元なので面積) である。



### 3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (5) 流れ関数の意味(つづき)

複素測度ポテンシャル  $f$  が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

$$(1) \quad \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \text{Im} \int_C f'(z) \, dz.$$

実際、

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = -v \, dx + u \, dy = \psi_x \, dx + \psi_y \, dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z) \, dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i \, dy) \\ &= (\phi_x \, dx - \psi_x \, dy) + i(\psi_x \, dx + \phi_x \, dy) \\ &= (\phi_x \, dx + \phi_y \, dy) + i(\psi_x \, dx + \psi_y \, dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \text{Im} f'(z) \, dz.$$

## 3.13 2次元非圧縮渦なし流 (1)

これまでの議論を振り返る。

### 命題 9.5 (渦なし流と速度ポテンシャル (2次元版))

2次元の速度場  $\mathbf{v}$  について

- ①  $\mathbf{v}$  のポテンシャルが存在すれば渦なし ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ )。
- ② 渦なし ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ) ならば、任意の単連結領域で  $\mathbf{v}$  のポテンシャルが存在する。
- ③  $\mathbf{v}$  のポテンシャル  $\phi$  が存在するとき、 $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{v}$ 。特に非圧縮流ならば  $\Delta\phi = 0$ 。  
ただし  $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  とする。

### 命題 9.6 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場  $\mathbf{v}$  について

- ①  $\mathbf{v}$  の流れ関数が存在すれば非圧縮 ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ )。
- ② 非圧縮 ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ) ならば、任意の単連結領域で  $\mathbf{v}$  の流れ関数が存在する。
- ③  $\mathbf{v}$  の流れ関数  $\psi$  が存在するとき、 $\Delta\psi = -\text{rot } \mathbf{v}$ 。特に渦なしならば  $\Delta\psi = 0$ 。  
ただし  $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  とする。

### 3.13 2次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

渦なし、非圧縮の両方を仮定するとどうなるか。ある  $\phi, \psi$  が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

そして

$$\Delta\phi = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

このとき

$$f(x + iy) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

とおき、 $f$  を  $\mathbf{v}$  の複素速度ポテンシャルと呼ぶ。

実は  $f$  は正則関数である。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、 $f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv$ .

# 複素関数の可視化 (流体の話から離れて)

複素関数  $f$  の実部・虚部をそれぞれ  $u, v$  として、それらが微分可能なとき、 $f$  が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

ゆえに任意の正則関数  $f$  について

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部  $u$ , 虚部  $v$  の等高線は互いに直交している。**

(復習:  $\text{grad } \phi$  は  $\phi$  の等高線 ( $\phi(x, y) = c$ ) の法線ベクトルである。)

複素関数の有名なテキストである Ahlfors [5] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに具体例をあげて説明してある。

(小さな文字で流体の話に戻すと 等ポテンシャル線と流線は直交する、ということ。)

## 3.14 簡単な関数の表す流れ 3.14.1 一様流

1次関数  $f(z) = cz$ ,  $c = p - iq$  (ただし  $p, q \in \mathbb{R}$ ) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$

$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数  $f$  の定める速度場の成分を  $u, v$  とすると、 $f' = u - iv$ .

ゆえに  $f$  を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流** と呼ばれる。

**1次関数は一様流の速度ポテンシャルである。**

このとき、速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = px + qy, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = -qx + py.$$



## 3.14.1 一様流 続き

等ポテンシャル線 ( $\phi = \text{const.}$ ) も、流線 ( $\psi = \text{const.}$ ) も平行直線群であり、それらは互いに直交する。

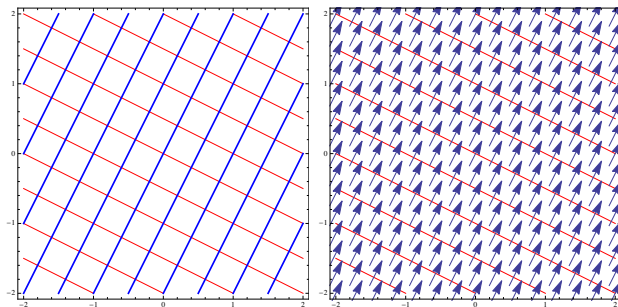


図 1: 一様流の等ポテンシャル線 (赤)、流線 (青) と速度ベクトル

## 3.14.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$ ,  $f(z) = m \log z$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). この  $f$  は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$  ( $r \geq 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ) とすると

$$f(re^{i\theta}) = m(\log r + i\theta) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}(\cos \theta - i \sin \theta).$$

ゆえに  $f$  を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r} \cos \theta \\ \frac{m}{r} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{v}$  の方向は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$  と同じ。  $m > 0$  ならば向きも同じ (湧き出し)、  
 $m < 0$  ならば向きは逆 (吸い込み)。

$\mathbf{v}$  の大きさ  $|\mathbf{v}|$  は  $\frac{|m|}{r}$  で、原点からの距離に反比例している。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = m \log r, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = m\theta.$$

### 3.14.2 湧き出しと吸い込み (続き)

等ポテンシャル線 ( $\phi = m \log r = \text{定数}$ ) は原点を中心とする同心円群、流線 ( $\psi = m\theta = \text{定数}$ ) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

原点を正の向きに一周する閉曲線  $C$  に対し、 $C$  から外に湧き出る流量は

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \text{Im} \int_C f'(z) \, dz = \text{Im} \int_C \frac{m}{z} \, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

この流れは、 $m > 0$  ならば原点においた**湧き出し** (source),  $m < 0$  ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。

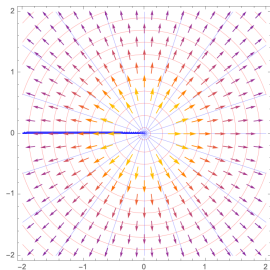


図 2: 湧き出しの等ポテンシャル線, 流線, 速度場

### 3.14.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $f(z) = i\kappa \log z$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ).

$z = re^{i\theta}$  ( $r \geq 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ) とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa(\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\kappa}{r}(\sin\theta + i\cos\theta).$$

ゆえに  $f$  を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{v}$  の方向は  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を  $-\frac{\pi}{2}$  回転した方向である。 $\kappa > 0$  ならば向きも同じ (時計回り)、 $\kappa < 0$  ならば向きは逆 (反時計回り)。

$\mathbf{v}$  の大きさは  $\frac{|\kappa|}{r}$  で、原点からの距離に反比例する。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = -\kappa\theta, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \kappa \log r.$$

### 3.14.3 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 ( $\phi = -\kappa\theta = \text{定数}$ ) は、原点を始点とする半直線で、流線 ( $\psi = \kappa \log r = \text{定数}$ ) は原点を中心とする円である。

この流れは、原点に置かれた うずいと 渦糸 (vortex filament, vortex string) または てんうず 点渦 (point vortex) と呼ばれる。

渦度は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  全体で 0. (渦度が原点に集中して他は渦なし、と考えるべき?)

問  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  を確かめよ ( $f$  は一価正則でなく、普通の説明の範疇には収まらないので、念のため確認)。

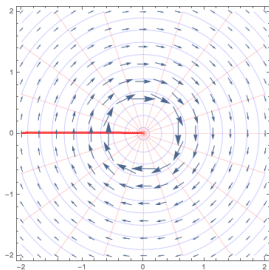


図 3: 点渦の等ポテンシャル線, 流線, 速度場

### 3.14.4 Mathematica で可視化する

以上の単純な場合は、紙とペンでも十分理解可能であるが、この辺で文明の利器を。

コマンドをコピーできると便利なので、この部分の資料は WWW に置く。

「簡単な正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れの可視化」  
[https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/fluid\\_mathematica/](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/fluid_mathematica/)

2023/6/20 の授業は、進んでもこの辺までかと考えています。

## 3.14 流れの合成

2つの2次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , また複素速度ポテンシャルを  $f_1, f_2$  とする。このとき  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  を速度場とする流れは、やはり2次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは  $f_1 + f_2$  である。

実際、

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$$

であれば

$$\operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)' &= f_1' + f_2' = (u_1 - iv_1) + (u_2 - iv_2) \\ &= (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2). \end{aligned}$$

流れを合成するには、複素速度ポテンシャルを足せば良い



### 3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

$U, m > 0$  とする。一様流  $f_1(z) = Uz$  と、湧き出し  $f_2(z) = m \log z$  の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos \theta + m \log r + i(Ur \sin \theta + m\theta). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin \theta + m\theta.$$

$\theta = 0$  とすると  $\psi = 0$ , また  $\theta = \pi$  とすると  $\psi = m\pi$  であるから、これらは  $\psi$  の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

また  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $\theta \neq \pi$  とすると

$$(2) \quad \psi = m\pi \Leftrightarrow Ur \sin \theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \sin \theta} \Leftrightarrow r = \frac{m}{U} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

ただし  $\varphi := \pi - \theta$ .

$\theta \in (0, \pi)$  ( $\varphi \in (0, \pi)$ ) と  $\theta \in (\pi, 2\pi)$  ( $\varphi \in (-\pi, 0)$ ) で分けて考える。

### 3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

これは右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である<sup>1</sup>。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響を受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。

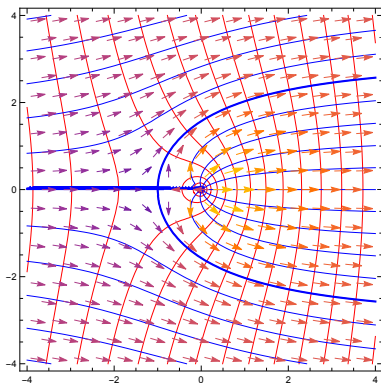


図 4: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は  $\psi = \pm m\pi$ )

### 3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$  に置いた強さ  $m$  の湧き出し、 $z = -a$  に置いた強さ  $m$  の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は  $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$  で一価正則である！)

分子、分母の  $z$  を、それぞれ  $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$  で置き換えると

$$f(z) = m((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im(\theta_1 - \theta_2).$$

等ポテンシャル線の方程式は  $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$ . アポロニウスの円を表す。

流線の方程式は  $\Theta := \theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$ .  $\Theta$  は  $a, -a$  から点  $z$  を見込む角であるので、2点  $\pm a$  を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。

### 3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対 (続き)

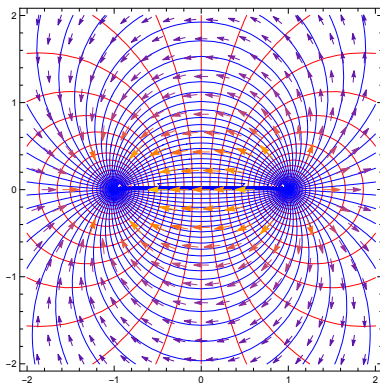


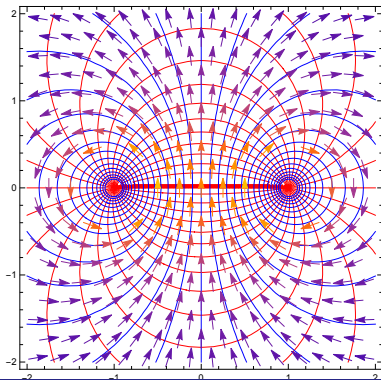
図 5: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

### 3.14.3 同じ強さ反対向きの渦の対

等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦を  $z = a, -a$  に置いて重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) := i\kappa \log \frac{z - a}{z + a}.$$

等ポテンシャル線、流線の方程式はそれぞれ  $\theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$ ,  $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$  で、どちらも円を表す。



### 3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$  とする。一様流  $f_1(z) = Uz$ ,  $-a$  に置いた湧き出し  $f_2(z) = m \log(z + a)$ ,  $a$  に置いた吸い込み  $f_3(z) = -m \log(z - a)$  を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m \log(z + a) - m \log(z - a) = Uz + m \log \frac{z + a}{z - a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

実軸  $y = 0$  では、 $\psi = 0$  であるから、実軸は1つの流線である。また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U} \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine body) と呼ぶ。

### 3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body) 続き

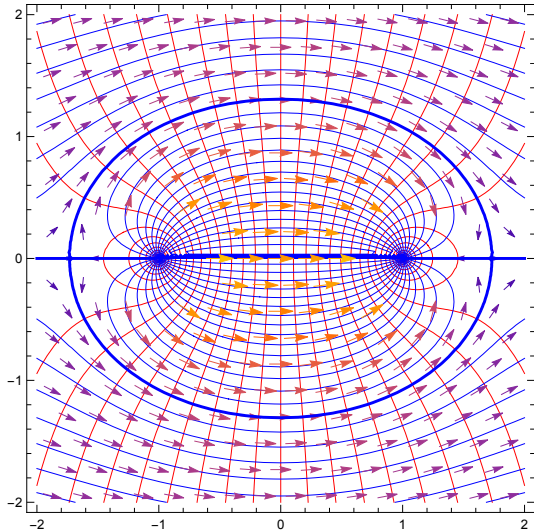


図 7: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

### 3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m \log(z - a) - m \log(z + a).$$

$\mu > 0$  を取り、 $2am = \mu$  という関係式を保ったままで、 $a \rightarrow 0$  とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m \log(z - a) - m \log(z + a) = -\mu \frac{\log(z + a) - \log(z - a)}{2a} \\ &\rightarrow F(z) := -\mu \frac{d}{dz} \log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2 + y^2} + i \frac{\mu y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

$F$  を複素速度ポテンシャルとする流れを**二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。



### 3.14.5 2重湧き出し (doublet) (続き)

$F(z) := -\frac{\mu}{z}$  の定める流れの等ポテンシャル線は、実軸上に中心を持ち原点を通る円、または虚軸 (原点を除く) である。

一方、流線は、虚軸上に中心を持ち原点を通る円または実軸 (原点を除く) である。

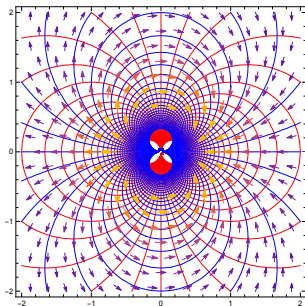


図 8: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

### 3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で  $2am = \mu$  (正定数) として  $a \rightarrow 0$  としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U \left( z + \frac{R^2}{z} \right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U \left( r \cos \theta + i \sin \theta + \frac{R^2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \right)$$

であるから、速度ポテンシャル  $\phi$  と流れ関数  $\psi$  は

$$\phi = U \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = U \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.$$

特に円周  $r = R$  上で  $\psi = 0$  であるから、 $r = R$  は流線である。

### 3.14.6 円柱を過ぎる一様流 (続き)

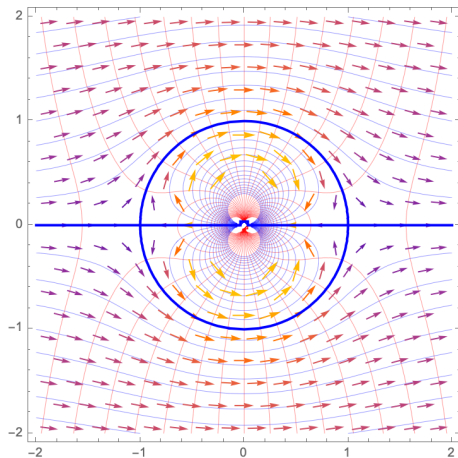


図 9: 円柱を過ぎる一様流

完全流体の一様流の中に円柱を入れると

# 参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数と流体力学,  
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf>  
(2015～).
- [2] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, [https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2023/vector\\_analysis.pdf](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2023/vector_analysis.pdf)  
(2021/5/31～).
- [3] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [4] たつみともまさ 巽 友正：流体力学, 培風館 (1982).
- [5] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).