応用複素関数 第 11 回

～ ポテンシャル問題 (2) ～

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2023 年 7 月 4 日 (本来 6 月 27 日にするはずの講義)

目次

本日の内容・連絡事項

1. ポテンシャル問題 (Laplace 方程式の境界値問題) の解の存在と一意性は重要な問題であるが、それに関連して次の 2 つを述べる。
   a. ポテンシャル問題を考える大きなきっかけとなった、Riemann の写像定理について述べる。これは 1 次分数変換のときに既出であるが、Jordan 領域の写像関数を求めるために Laplace 方程式の境界値問題が現れることを見る。
   b. Laplace 方程式の境界値問題の解の存在を示すため、Riemann は変分法の議論を用いた (Dirichlet の原理)。
2. ポテンシャル問題の数値解法として、有限要素法を紹介する。
3. 有限要素法による偏微分方程式のソルバーである FreeFem++ を紹介する。

なるべく早く (3) をした方が良い、と考えるので、(3) から始める。今日 Mac を持っている人は、FreeFem++ のインストールとサンプル・プログラムの実行まで試すこと。インストールが出来ない場合は早めに質問・相談すること。

4.3 Riemann の写像定理 (復習)

関数論で基本的な Riemann の写像定理を説明する (1 次分数変換のとき、一瞬顔を出した)。

4.3 Riemann の写像定理 (復習)

関数論で基本的な Riemann の写像定理を説明する (1 次分数変換のとき、一瞬顔を出した)。

定義 11.1 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が**双正則**であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。双正則写像は関数論としての同型写像と言える。

4.3 Riemann の写像定理 (復習)

関数論で基本的な Riemann の写像定理を説明する (1 次分数変換のとき、一瞬顔を出した)。

定義 11.1 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が**双正則**であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。双正則写像は関数論としての同型写像と言える。

定理 11.2 (Riemann の写像定理, 1851 年)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

証明は省略する (例えば Ahlfors [1], 高橋 [2] を見よ)。

4.3 Riemann の写像定理 (復習)

関数論で基本的な Riemann の写像定理を説明する (1 次分数変換のとき、一瞬顔を出した)。

定義 11.1 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が**双正則**であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。双正則写像は関数論としての同型写像と言える。

定理 11.2 (Riemann の写像定理, 1851 年)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

証明は省略する (例えば Ahlfors [1], 高橋 [2] を見よ)。

φ のことを、**領域 Ω の等角写像**、あるいは**領域 Ω の写像関数**と呼ぶ。

いくつか簡単な形の領域の写像関数を、1 次分数変換で具体的に求めることができる (簡単なものしか紹介していない)。

4.3 Riemann の写像定理　正規化条件

$\mathbb{C}$ の単連結領域で $\mathbb{C}$ と異なるものは、関数論的には円盤領域と同型である、ということになる。

系 11.3

$\mathbb{C}$ 内の単連結領域で $\mathbb{C}$ とは異なるものは互いに同相 (位相同型) である。

証明　Ω_1, Ω_2 が $\mathbb{C}$ とは異なる $\mathbb{C}$ の単連結領域とすると、双正則写像 $\varphi_1 \colon \Omega_1 \to D(0;1)$, $\varphi_2 \colon \Omega_2 \to D(0;1)$ が存在する。このとき $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ は双正則である。特に同相写像であるので、Ω_1 と Ω_2 は同相である。 □

4.3 Riemann の写像定理　正規化条件

単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ が与えられたとき、Ω の写像関数は一意的には定まらない。定めるためには追加の条件が必要だが、次のものが有名である。

4.3 Riemann の写像定理　正規化条件

単連結領域 $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ が与えられたとき、Ω の写像関数は一意的には定まらない。定めるためには追加の条件が必要だが、次のものが有名である。

命題 11.4 (写像関数の決定)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ とする。このとき、双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0 \tag{1}$$

を満たすものは一意的である。

(1) を**正規化条件**と呼ぶ。

証明は、円盤に帰着して、1 次分数変換の議論をする。

4.4 Jordan 領域の写像関数　Jordan 曲線定理

平面内の単連結領域の重要な例として、以下に紹介する Jordan 領域がある。Jordan 領域の写像関数はポテンシャル問題を解いて求まる (すぐ後)。

4.4 Jordan 領域の写像関数　Jordan 曲線定理

平面内の単連結領域の重要な例として、以下に紹介する Jordan 領域がある。Jordan 領域の写像関数はポテンシャル問題を解いて求まる (すぐ後)。

定理 11.5 (Jordan 曲線定理 (Jordan-Schöflies))

平面内の任意の単純閉曲線 C に対して、ある領域 U_1, U_2 が存在して、U_1 は有界、U_2 は非有界、さらに

$$\mathbb{C} = U_1 \cup C^* \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \cap C^* = \emptyset, \quad U_2 \cap C^* = \emptyset.$$

ただし、C^* は C の像とする。さらに C^* は U_1, U_2 の共通の境界である。
さらに U_1 は円盤領域、U_2 は円の外部領域とそれぞれ同相である。

(単純とは、自分自身と交わらないことを意味する。)

単純閉曲線のことを **Jordan 曲線**とも呼ぶ。単純閉曲線 C に対して、定理で存在を保証される U_1 を、C の囲む **Jordan 領域**と呼ぶ。

定理 11.5 は直観的に納得しやすいが、証明はなかなか面倒ということで有名である。ここでは省略する。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

$\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域は単連結であるから、Ω の写像関数が存在する。

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

$\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域は単連結であるから、Ω の写像関数が存在する。

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

定理 11.6 (Jordan 領域の写像関数)

Ω を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域、$z_0 \in \Omega$ とする。u を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{2}$$

$$u(x,y) = -\log|z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega). \tag{3}$$

の解、v を u の共役調和関数で $v(z_0) = 0$ を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0)\exp\left(u(z) + iv(z)\right)$$

は、Ω の写像関数であり、正規化条件を満たす。

$\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域は単連結であるから、Ω の写像関数が存在する。

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

定理 11.6 (Jordan 領域の写像関数)

Ω を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域、$z_0 \in \Omega$ とする。u を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{2}$$

$$u(x, y) = -\log|z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega). \tag{3}$$

の解、v を u の共役調和関数で $v(z_0) = 0$ を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0)\exp\left(u(z) + iv(z)\right)$$

は、Ω の写像関数であり、正規化条件を満たす。

駆け足の証明

後述の Carathéodory の定理により、φ を $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張できることが分かる。それを同じ記号 φ で表す。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の除去可能特異点である。以下 $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ を $\overline{\Omega}$ で連続に拡張した写像を ψ で表す。ψ は Ω では正則である。

実は $\psi(z)\neq 0$ $(z\in\Omega)$ である。(実際、$z\in\Omega\setminus\{z_0\}$ とするとき $\varphi(z)\neq\varphi(z_0)=0$ であるから $\psi(z)\neq 0$. 一方、φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$ が成り立つので、$\psi(z_0)=\varphi'(z_0)\neq 0$.)

Ω は単連結であるから、$\log\psi(z)=\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の Ω で一価正則な分枝が定まる。

駆け足の証明

　後述の Carathéodory の定理により、φ を $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張できることが分かる。それを同じ記号 φ で表す。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の除去可能特異点である。以下 $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ を $\overline{\Omega}$ で連続に拡張した写像を ψ で表す。ψ は Ω では正則である。

　実は $\psi(z)\neq 0$ $(z\in\Omega)$ である。(実際、$z\in\Omega\setminus\{z_0\}$ とするとき $\varphi(z)\neq\varphi(z_0)=0$ であるから $\psi(z)\neq 0$. 一方、φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$ が成り立つので、$\psi(z_0)=\varphi'(z_0)\neq 0$.)

　Ω は単連結であるから、$\log\psi(z)=\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の Ω で一価正則な分枝が定まる。その実部、虚部を u, v とする。

$$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=u(z)+iv(z). \tag{4}$$

　u は調和関数であり、v は u の共役調和関数である。

駆け足の証明

後述の Carathéodory の定理により、φ を $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張できることが分かる。それを同じ記号 φ で表す。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の除去可能特異点である。以下 $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ を $\overline{\Omega}$ で連続に拡張した写像を ψ で表す。ψ は Ω では正則である。

実は $\psi(z)\neq 0$ $(z\in\Omega)$ である。(実際､$z\in\Omega\setminus\{z_0\}$ とするとき $\varphi(z)\neq\varphi(z_0)=0$ であるから $\psi(z)\neq 0$. 一方､φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$ が成り立つので､$\psi(z_0)=\varphi'(z_0)\neq 0$.)

Ω は単連結であるから、$\log\psi(z)=\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の Ω で一価正則な分枝が定まる。その実部、虚部を u, v とする。

$$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=u(z)+iv(z). \tag{4}$$

u は調和関数であり、v は u の共役調和関数である。

$z\in\partial\Omega$ のとき $|\varphi(z)|=1$ であるから

$$u(z)=\log\left|\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\right|=-\log|z-z_0|\quad (z\in\partial\Omega).$$

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

ゆえに u は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解である。

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{5}$$

$$u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega). \tag{6}$$

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、z_0 を始点、$z \in \Omega$ を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x\, dx + v_y\, dy) = \int_{C_z} (-u_y\, dx + u_x\, dy)$$

とすればよい (Ω は単連結であるから、v の値は確定する)。

(4) を φ について解くと

$$\varphi(z) = (z - z_0) \exp(u(z) + iv(z)).$$

これから $\varphi(z_0) = 0$.

ゆえに u は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解である。

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{5}$$

$$u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega). \tag{6}$$

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、z_0 を始点、$z \in \Omega$ を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x\, dx + v_y\, dy) = \int_{C_z} (-u_y\, dx + u_x\, dy)$$

とすればよい (Ω は単連結であるから、v の値は確定する)。

(4) を φ について解くと

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z)).$$

これから $\varphi(z_0) = 0$. また

$$\varphi'(z) = \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z))\exp\left(u(z) + iv(z)\right),$$
$$\varphi'(z_0) = \exp(u(z_0) + iv(z_0)).$$

ゆえに u は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解である。

(5) $$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

(6) $$u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega).$$

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、z_0 を始点、$z \in \Omega$ を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x\,dx + v_y\,dy) = \int_{C_z} (-u_y\,dx + u_x\,dy)$$

とすればよい (Ω は単連結であるから、v の値は確定する)。

(4) を φ について解くと

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z)).$$

これから $\varphi(z_0) = 0$. また

$$\varphi'(z) = \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z))\exp\left(u(z) + iv(z)\right),$$
$$\varphi'(z_0) = \exp(u(z_0) + iv(z_0)).$$

これから、$\varphi'(z_0) > 0 \Leftrightarrow v(z_0) \equiv 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad v(z_0) = 2k\pi$. どの k でも φ は変わらないので $k = 0$. すなわち $v(z_0) = 0$ で v を定めれば良い。 □

定理 11.7 (Carathéodory の定理)

C を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 曲線、Ω を C の囲む Jordan 領域、$\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ を双正則とするとき、φ は同相写像 $\tilde{\varphi}\colon \overline{\Omega} \to \overline{D}(0;1)$ に拡張できる。

有名な定理であるが、証明が載っているテキストが意外と少ない (手持ちのテキストで載っているものを探したのだけれど…有名な Ahlfors [1] も give up している)。私自身はチェックしていないが、Wikipedia Link に証明の情報がある。

2023/7/4 の講義では、この後、次の「Dirichlet の原理」を飛ばして (次回の講義で解説します)、「FreeFem++を体験しよう」に飛んだ。

4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{7a}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{7b}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

(7a) $$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

(7b) $$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (7b) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{ u \;\middle|\; u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\},$$

$$J[u] := \iint_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{7a}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{7b}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (7b) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{ u \;\middle|\; u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\},$$

$$J[u] := \iint_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって J の最小値を与える u は (7a), (7b) の解である。

4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{7a}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{7b}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (7b) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{ u \;\middle|\; u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\},$$

$$J[u] := \iint_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2 \right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって J の最小値を与える u は (7a), (7b) の解である。

Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

4.5 Dirichlet の原理

証明

$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、条件 $v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv = g + t \cdot 0 = g$ (on $\partial\Omega$). ゆえに $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。

4.5 Dirichlet の原理

証明

$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、条件 $v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv = g + t \cdot 0 = g$ (on $\partial\Omega$). ゆえに $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

(8) $$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy = 0.$$

4.5 Dirichlet の原理

証明

$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、条件 $v=0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $u+tv=g+t\cdot 0=g$ (on $\partial\Omega$). ゆえに $u+tv\in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u+tv] \quad (t\in\mathbb{R})$$

は $t=0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)dx\,dy + t^2\iint_\Omega \left(v_x^2+v_y^2\right)dx\,dy$$

は t の 2 次関数であり、$t=0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy = 0. \tag{8}$$

Green の公式 $\left(\iint_\Omega \triangle u v\;dx\,dy = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}v\;d\sigma - \iint_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\;dx\,dy\right)$ より

$$\iint_\Omega \triangle u\, v\;dx\,dy = 0.$$

4.5 Dirichlet の原理

証明

$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、条件 $v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv = g + t \cdot 0 = g$ (on $\partial\Omega$). ゆえに $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy = 0. \tag{8}$$

Green の公式 $\left(\iint_\Omega \triangle uv\ dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ d\sigma - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx\, dy\right)$ より

$$\iint_\Omega \triangle u\, v\ dx\, dy = 0.$$

これが任意の v について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega). \quad \square$$

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

4.5 Dirichlet の原理
反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 ($J[u] \geq 0$) であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

4.5 Dirichlet の原理

反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 ($J[u] \geq 0$) であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。…でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。

整理

以上の話は、少し込み入っていて、初めて聴く人には分かりにくいと思われるので、振り返っておこう。

- Riemann の写像定理という関数論で基本的と考えられている定理がある。それは領域の写像関数の存在に関する定理である。
- Jordan 曲線 (単純閉曲線) で囲まれた領域 [1] の写像関数は、Laplace 方程式のある Dirichlet 境界値問題を解くことで求まる。
- Riemann は、その境界値問題が次のように解けると主張した: 汎関数 $J[u] := \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2)dxdy$ の最小化問題 (変分問題) が解ければ良い ($\because$ Dirichlet の原理)。この J の最小値の存在は明らか。
  → ツッコミが入って、頓挫したが、結局は解決された。

最小性は

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)dx\, dy = 0 \quad (v \text{ は条件 } v = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ を満たす任意の関数})$$

という条件と同値である。この式は**弱形式**と呼ばれる。**有限要素法**という数値解法では、微分方程式の近似解を弱形式の解として求める。

[1] 穴が空いていないということで、最も単純と考えられる。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

1. **弱形式**を用いる。
2. 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

1. **弱形式**を用いる。
2. 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFem++** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

1. **弱形式**を用いる。
2. 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFem++** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。

実は Dirichlet 原理の証明中に現れた (8) は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱形式である。(弱形式については、次回解説を行う。)

今回は「百聞は一見にしかず」で、 まずはプログラム (スライド 1 枚) を紹介する。

2,3 行書き換えるだけで「自分の問題」が解ける。

```
// potential2d-v0.edp ---  2次元非圧縮ポテンシャル流
//  速度ポテンシャル，速度を求め、等ポテンシャル線，速度場を描く
border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
// 次の2行は区分1次多項式を使うという意味
fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v, v1, v2;
// 境界条件の設定
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で，V=(1,2) のとき V・n=x+2y
func Vn2=((x>0&&y>0) || (x<0&&y<0))*(x+2*y); // 右上と左下のみ

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
// ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く（ちょっと雑なやり方)
v1=dx(phi); v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

FreeFem++ を体験しよう　どういうものか

FreeFem++ は、2 次元, 3 次元の偏微分方程式の問題を有限要素法で解くための、一種の PSE (problem solving environment) である。

パリ第 6 大学 J. L. Lions 研究所の Frédéric Hecht, Oliver Pironneau, A. Le Hyaric, 広島国際学院大学の大塚厚二氏らが開発した、

ソースコードとマニュアル (700 ページ超、幸い英文)、主なプラットホーム (Windows, Mac, Linux) 向けの実行形式パッケージがフリーで提供されている。

従来のプログラミング言語では、短くても数百行のプログラムを書く必要があったような問題が、十数行のプログラム (スライド 1 枚に入ったりする) を書くだけで解けてしまったりする。

FreeFem++ を体験しよう　参考となる情報の入手先

1. **FreeFem++ の WWW サイト**
   分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [3] がある。
   パラパラしてみると、どういうことが出来るか分かる。
2. 大塚・高石 [4] という日本語の解説書がある (現在品切だが、明治大学の学生は、図書館あるいは Maruzen eBook で読める)。
3. 色々な WWW サイトがある (その多くは信頼できる)。
   まず自作を紹介しておくと
   - 「FreeFem++の紹介」
   - 「FreeFem++ ノート」

   日本応用数理学会のチュートリアルの資料&サンプル・プログラム
   - 「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング – 中級編 –」(2016/2/11,12)
   - 「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング – 上級編 –」(2016/6/4,5)

FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

現在、メンテナンスをしていた人が交代したためか、インストールが少し難しい。

FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

現在、メンテナンスをしていた人が交代したためか、インストールが少し難しい。

2023/7/4 時点で、version 4.13 が最新版だが、実行形式が用意されていないので、version 4.12 の利用を勧める。

FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

現在、メンテナンスをしていた人が交代したためか、インストールが少し難しい。

2023/7/4 時点で、version 4.13 が最新版だが、実行形式が用意されていないので、version 4.12 の利用を勧める。

インストール手順は、「FreeFem++ 4.12 のインストール」を参考にして下さい。授業で実演するので真似してやってみよう。

FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

現在、メンテナンスをしていた人が交代したためか、インストールが少し難しい。

2023/7/4 時点で、version 4.13 が最新版だが、実行形式が用意されていないので、version 4.12 の利用を勧める。

インストール手順は、「FreeFem++ 4.12 のインストール」を参考にして下さい。授業で実演するので真似してやってみよう。

- macOS Ventura を使っている人は書かれている手順を良く読んで、慎重に作業して下さい。
- Ventura より前、Mojave 以降の macOS を使っている人は比較的簡単にインストールできるはず。
- macOS が 10.11(El Capitan)〜10.13(HighSierra) ならば、FreeFem++ version 4.9 (FreeFem++-4.9-full-MacOS_10.11.pkg) を試してみる。

いずれにせよ、トラブルが生じたら気軽に相談して下さい。

FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

現在、メンテナンスをしていた人が交代したためか、インストールが少し難しい。

2023/7/4 時点で、version 4.13 が最新版だが、実行形式が用意されていないので、version 4.12 の利用を勧める。

インストール手順は、「FreeFem++ 4.12 のインストール」を参考にして下さい。授業で実演するので真似してやってみよう。

- macOS Ventura を使っている人は書かれている手順を良く読んで、慎重に作業して下さい。
- Ventura より前、Mojave 以降の macOS を使っている人は比較的簡単にインストールできるはず。
- macOS が 10.11(El Capitan)〜10.13(HighSierra) ならば、FreeFem++ version 4.9 (FreeFem++-4.9-full-MacOS_10.11.pkg) を試してみる。

いずれにせよ、トラブルが生じたら気軽に相談して下さい。

文法は C 言語に似ているので、見様見真似でプログラムが書けると思われるが、簡単な説明を用意する予定である。

FreeFem++ を体験しよう　サンプル・プログラム

FreeFem++ がインストールできたら、ターミナルを新しく開いて、以下の 4 つのコマンドを順番に実行して下さい。

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/freefem/poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp

curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp
```

FreeFem++ では、`plot()` 実行後に一時停止することがあります (グラフィックスを見てもらうため)。次のプロットへ進むには [Enter]、グラフィックスを閉じるには [esc] を入力します。

FreeFem++ のインストールや、サンプル・プログラムの実行については、気軽に質問して下さい。

レポート課題3について

非圧縮流体のポテンシャル流を、ポテンシャル問題を解くことで数値シミュレーションする、という問題で、課題文は `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/report3.pdf` にあります。

FreeFem++ 用のサンプル・プログラムをたたき台にすれば、プログラム作成の手間は軽くて済む (弱形式はサンプル・プログラムのままで良い)。

やるべきこと (1) 領域 Ω と境界値 $v_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ を選ぶ。

Ω はかなり自由に選べる (大学名にちなみ $\mathbb{M}$ や $\mathbb{E}$ の字の領域にするとか)。

v_n の選び方に注意が必要である。すでに説明したように

$$\int_{\partial\Omega} v_n\,d\sigma = 0 \quad (\text{今は 2 次元なので線積分} \int_{\partial\Omega} v_n\,ds \text{ です})$$

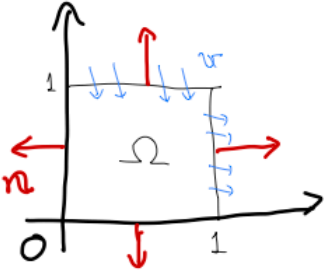
が成り立っていないと解が存在しない。実際 Green の積分公式

$$\int_\Omega \triangle u v\,d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x}$$

の u に ϕ, v に 1 (定数関数) を代入すると ($\triangle\phi = 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial n} = v_n$ に注意して)

$$0 = \int_{\partial\Omega} v_n\,d\sigma - 0$$

が得られるから。



上の辺から水を入れる。
右の辺から水を出す。

$$v_n = v \cdot n = \begin{cases} -1 & (\text{上の辺}) \\ 1 & (\text{右の辺}) \\ 0 & (\text{その他の辺}) \end{cases}$$

$\int_{\partial\Omega} v_n \, d\sigma = 0$ であることが必要

上の v_n では $\int_{\partial\Omega} v_n \, d\sigma = \int_{\text{上の辺}} (-1) d\sigma + \int_{\text{右の辺}} 1 \, d\sigma = 0$

正方形でなく長方形(横2, 縦1)にしたら v_n を変えないとダメ

レポート課題3について

やるべきこと (2) 流線を描くこと

流線を描くにはどうすればよいか。これはサンプル・プログラムには書かれていない。

流線は、接線ベクトルが速度ベクトルと平行であるような曲線 (これが流線の定義) ということから求める方法が考えられる。

あるいは、2 次元流体では、流線は流れ関数 ψ の等高線であるから、ψ を求めてその等高線を描く、という手もある。ψ を求めるには…

参考文献

[1] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).

[2] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された．丸善 eBook では、
`https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441` でアクセスできる．

[3] Hecht, F.: Freefem++,
`https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf`, 以前は
`http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf` にあった。 (??).

[4] 大塚厚二, 高石武史：有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014),
`https://sites.google.com/a/comfos.org/comfos/ffempp` というサポート WWW サイトがある．Maruzen eBook に入っているので、
`https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545` でアクセス出来る．