応用複素関数 第1回

～ ガイダンス, 留数定理の応用 (1) 定積分計算 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2024年4月16日

目次

1. ガイダンス

2. 続 留数定理の応用
   - はじめに
   - 留数定理と極における留数の計算
   - 定積分計算への留数の応用
     - 「複素関数」の復習
     - Dirichlet 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (難しさを語る)

0 ガイダンス　どういう科目か、履修上の注意

(複素関数・同演習の履修を前提とするので、自己紹介はカットします。)

どういう科目か「複素関数・同演習」(関数論の定番内容を数学的に講義) の内容を応用する、ではない。

1. 「複素関数・同演習」に続くもの。
   「複素関数・同演習」を履修せずにこちらを履修することは勧めない。複素関数を知らないと「お経」になってしまうところが多い (何より面白さが分からないと思われる)。
   証明等は「複素関数・同演習」ほどきっちりやらない。
2. コンピューター数理に分類される科目。
   厳密性は少し緩め。とにかく計算してみよう、が多い。

履修上の注意

- 「複素関数」以外に「ベクトル解析」を良く使う。
- 1 冊これで OK という教科書はない。参考書をその都度紹介する。講義メモは当日 (あるいは翌日) 晩に WWW で公開するかも。
- この科目はレポートだけで評価する。
- TA はいない。桂田に直接質問にして下さい。
- 講義中に、随時質問して良いが、私語は禁止する。

0 ガイダンス　「複素関数」に続くもの (1)

“標準的な関数論” (「複素関数」) に続くものがとてもとても幅広い。
キーワードをいくつか紹介しておく。

- **楕円関数** (これは授業で解説しない)
  楕円積分 $\displaystyle\int\sqrt{3,4\text{ 次式}}$ の逆関数。
  実は二重周期関数: $f(z+\omega_1)=f(z)$, $f(z+\omega_2)=f(z)$.
  応用上も頻出して重要。
- **代数関数** (これも解説しない)
  $a_n(z)w^n+a_{n-1}(z)w^{n-1}+\cdots+a_0(z)=0$ $(a_j(z)\in\mathbb{C}[z])$ で定まる $w=f(z)$.
  有理関数は代数関数に含まれる。
  冪根 $\sqrt[k]{\cdot}$ を使って表せる無理関数も代数関数である。
  例えば $w^2+z^2-1=0$ ならば $w=\sqrt{1-z^2}$. $n\geq 5$ のとき、冪根で表せない。
  多価性をどう扱うかが鍵。
- **Riemann 面** (これも解説しない)
  当初は多価関数を扱うために導入された。現代では 1 次元複素多様体と定義される。
  この講義では例として Riemann 球面が出て来るくらい (名前まぎらわしい)。
- **Riemann の写像定理** (これは授業で解説する)
  $\mathbb{C}$ 内の単連結領域 Ω は、単位円盤 $D_1=D(0;1)$ に双正則に写される (双正則な $\varphi\colon\Omega\to D_1$ が存在する)。

0 ガイダンス　「複素関数」に続くもの (2)

- **ポテンシャル問題** (Laplace 方程式 $\triangle u = 0$ の境界値問題 — これは解説する)。
  復習: 正則関数の実部・虚部は調和関数 (Laplace 方程式の解)。
  正則関数を求めるために、ポテンシャル問題を解く、というやり方がある。
  関数論を離れてもポテンシャル問題は非常に重要である (物理への応用が豊富)。
- **特殊関数** (解説しない)
  初等関数 (≒1 年生の微積で習う関数) に含まれない、応用上 (例えば偏微分方程式) 有名な関数がたくさんあり、特殊関数と総称される。
  微分方程式の解として特徴付けられることが多く、関数論で取り扱いできる。
  どれかを使うことになる人は多いだろう。
- **佐藤の超関数** (紹介する予定)
  関数概念を一般化した "超関数" の 1 つ。佐藤幹夫 (1928–2023) の創案。
  (超関数の必要性は高い。L. Schwartz の超関数が有名。)。
  例えば Dirac の δ 関数 (任意の φ に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0)$ を満たす)
  は、$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\varphi(z)}{z}dz = \varphi(0)$ (Cauchy の積分公式で分かる) と結びつけられる。
- **多変数複素関数論** (解説しない)
  岡潔 (1901–1978) の業績が有名。

1 つ 1 つに分厚いテキストが必要になる。

ガイダンス (1) 講義内容

(授業では時間が足りなくなったので、このスライドの内容は飛ばした。どうせシラバスに書いてあるから、という言い訳。)

- 内容は二本立て。複素関数論の基礎 (「複素関数」の続き) と、応用トピックの紹介
- 複素関数論の基礎的事項 (テキストに載っていること多い)
  - 留数定理の応用 続き (定積分、無限級数の和の計算)
  - 無限遠点 ∞ の導入, リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 1 次分数変換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$
  - 等角写像, Riemann の写像定理, ポテンシャル問題
  - 解析接続 (時間なくなって省略となりそうな予感がする…)

  (以上はペーパーテスト向きだが、定期試験は行わずレポートで評価するつもり。)
- 応用トピックの紹介
  (a) 流体力学への応用 (2 次元ポテンシャル流など)
  (b) 数値積分公式の誤差解析, 特に台形公式の最適性と二重指数関数型積分公式
  (c) ポテンシャル問題の数値解法 (有限要素法 FreeFem++, 基本解の方法)
  (d) 佐藤超関数

  (コンピューターを使う場面が多い。(a)–(c) でレポート課題を出す。)
- これらの項目は、完全に独立しているわけでなく、色々関係がある。

まず軽く留数定理と、極における留数の計算法を復習する。それから、

- 有名な $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ の説明 (「複素関数」で説明しそびれた (る) ので。) (積分路上に 1 位の極があるとき、どうなるかは学ぶに価する。)
- 無限和 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ の計算の話も知っておくと良い。 (登場する $\pi\,\mathrm{cosec}\,\pi z = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$, $\pi \cot \pi z = \dfrac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$ が意外と頻出する)
- 有限区間の積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の計算への留数定理の応用は、数値積分公式の誤差解析や、佐藤超関数に通じるところがある。— これは時間がなければカットするかも (後になってから話しても良いので)。

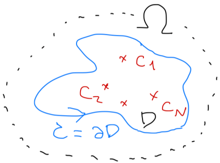
1.2 留数定理と極における留数の計算 (1)

この 1.2 は復習なので、超特急で進めます。使いそうなものを列挙しました。(うろ覚えならば「複素関数」復習してください。)

命題 1.1 (留数定理)

D は $\mathbb{C}$ 内の有界領域で、その境界 ∂D は区分的 C^1 級正則単純閉曲線とする (向きはいわゆる正の向きとする)。また $c_1, c_2, \cdots, c_N$ は D 内の相異なる点であり、Ω は $\overline{D} \subset \Omega$ を満たす $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \setminus \{c_1, c_2, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき、

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\,(f; c_j).$$



1.2 留数定理と極における留数の計算 (2)

留数を求める方法はケース・バイ・ケースであるが、極の場合は少し一般的な話ができる (知っておくべき)。

命題 1.2 (極の留数)

$k \in \mathbb{N}$, c が f の高々 k 位の極ならば、

$$\mathrm{Res}(f;c) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z)\right].$$

(次の定理は、この定理に含まれているが、念のため書いておく。)

命題 1.3 (1 位の極の留数)

c が f の高々 1 位の極ならば、

$$\mathrm{Res}(f;c) = \lim_{z \to c} (z-c) f(z). \tag{1}$$

(lim 求めるより、微分を計算する方が簡単なこともある、ということで次も良く使う。)

命題 1.4 (有理関数の分母の 1 位の零点における留数)

$f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z)$ と $Q(z)$ は c の近傍で正則、c は $P(z)$ の 1 位の零点 ($P(c)=0$ かつ $P'(c)\neq 0$ ということ) ならば、c は f の高々 1 位の極で

$$\operatorname{Res}(f;c)=\frac{Q(c)}{P'(c)}. \tag{2}$$

1.2 留数定理と極における留数の計算 (4)

(このスライドは 4 月 16 日の授業ではカットした。)

次の命題は「複素関数」ではやや軽めの扱いだった。後の例では

$$\varphi(z) = \log z, \quad \varphi(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z, \quad \varphi(z) = \pi \cot \pi z$$

として利用することが多い。

命題 1.5 (1 位の極を持つ関数と正則関数の積の留数)

c は f の 1 位の極であり、φ は c の近傍で正則とする。このとき

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \varphi(c) \operatorname{Res}(f; c).$$

証明.

(念のため略証だけでも)

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f\varphi; c) &= \lim_{z\to c}(z-c)(f(z)\varphi(z)) = \left(\lim_{z\to c}(z-c)f(z)\right)\lim_{z\to c}\varphi(z)\\ &= \operatorname{Res}(f; c)\varphi(c).\end{aligned}$$

1.3 定積分計算への留数の応用 1.3.1 「複素関数」の復習

z の複素係数多項式全体を $\mathbb{C}[z]$ で表す。多項式の次数を deg で表す。

命題 1.6 (有理関数の実軸上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0} \mathrm{Res}\,(f; c)\,.$$

命題 1.7 (有理関数の Fourier 変換)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $a > 0$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0} \mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).$$

1.3.1 「複素関数」の復習

上の 2 つの定理 (「複素関数」で学んだ) 以外にも色々ある。

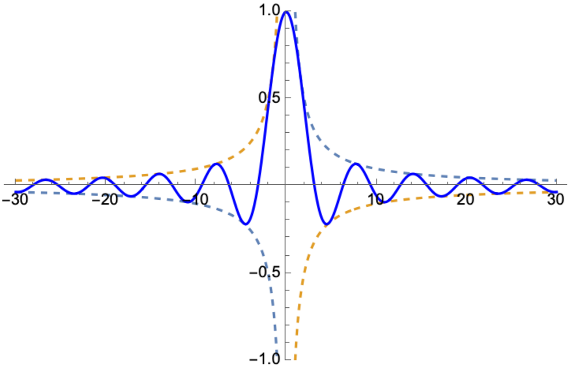
簡単のため、f は有理関数とする。次のような定積分についても、留数定理を応用した計算法がある (どちらも対数関数がらみ)。

- $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ に対して、$\displaystyle\int_0^\infty f(x)(\log x)^n dx$
- $0 < \alpha < 1$ に対して、$\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx$ (Mellin 変換)

次のテキストは、コンパクトだが、面白い例がたくさん載っている。

一松 信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 *(1979)*.

$\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ



$\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ ($x \to \pm\infty$ で減衰, $y = \pm\frac{1}{x}$ のグラフにはさまれる)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ はどうなる？}$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0, R \to +\infty} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \text{ と考えるべき？？}$$

1.3.2 Dirichlet 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ (難しさを語る)

とても有名な定積分である。関数論を使わなくても解けなくはない。

被積分関数は、Fourier 解析を勉強した人にはおなじみの sinc である。

分母が x であり、積分区間の端 $x=0$ で 0 になるので、その意味でも広義積分である。$x\to 0$ のとき $\frac{\sin x}{x}\to 1$ であるので (複素関数論的にも 0 は $\frac{\sin z}{z}$ の除去可能特異点である)、$x=0$ での値を 1 として、連続とみなせる。

$x\to\infty$ のとき、正負交互に現れ、絶対値が小さくなるので、広義積分が収束 (存在) することが分かる。—— これは認めよう。

ただし積分は絶対収束はしない: $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty.$

以上は $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ が収束し、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$ となることと似ている。

1.3.2 Dirichlet 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ 計算のアイディア

$\frac{\sin z}{z}$ は複素関数としては、絶対値が非常に大きくなることもあり、これを使って積分の値を求めるのは難しい。

「複素関数」でも時々出て来た $\sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix}$ という関係を使おう。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{Im}\,\frac{e^{ix}}{x}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx.$$

さっき出て来た定理が使える？

そのままでは使えない! $\frac{e^{ix}}{x}$ は $x = 0$ でマズい状態 (分母 0, 分子 $\neq 0$)。この広義積分は収束しない。

($P(x) = x$ が、さっきの定理の条件「$(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$」を満たさない。)

2024年4月16日の授業はこのあたりで時間切れとなった。次回に続く。

参考文献

[1] 神保道夫, 複素関数入門, 岩波書店 (2003) — 「複素関数」の教科書.

[2] 一松信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979).