応用複素関数 第4回

～ 正則関数の色々な表現法 (2), Riemann 球面と 1 次分数変換 (1) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2024 年 5 月 7 日

目次

連絡事項

- 前回の続き。
- 複素関数論の基本的なツールである 1 次分数変換を紹介する (桂田 [1] の §3 の内容, ただしあまり対応は良くない)。そのために、それ自身重要な無限遠点 ∞, Riemann 球面も紹介する。
(実関数の世界では、1 次関数 $y = ax + b$ が基本であったが、複素関数の世界では 1 次分数関数が基本である。我ながら強引だけど。)
- トポロジーについての予備知識がないと分かりにくい (かもしれない) ところがあるが、あえて紹介しました。その部分は「そういうものか」くらいに流してもらって結構です。
- これが終わった後は、しばらく関数論の流体力学への応用の話をする予定です (資料は [1] とは別のものを提供します)。Mathematica を使うので、起動するかどうかチェックしておいて下さい。もし起動できなくなっている場合、アクティベーション・キーの再発行が必要かもしれません。そのような状況になった場合、気軽に相談して下さい。

前回の講義内容を復習するため、資料の一部 (5 枚) を提示します。

広義一様収束の定義と、Weierstrass の二重級数定理「$\{f_n\}$ が広義一様収束するならば、$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ (広義一様収束)」が重要。その証明について前回は何も言わなかったので、証明のあらすじを述べました。

現れる関数列について、広義一様収束さえ確認出来れば、計算の自由度がとても高くなる、とまとめられます。

2.2 広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理

定義 4.1 (広義一様収束)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、$\{f_n\}$ が f に Ω で **広義一様収束**するとは、Ω に含まれるすべての compact 集合 K 上で $\{f_n\}$ が f に一様収束すること、すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f(z) - f_n(z)| = 0$$

が成り立つことをいう。

compact というのは位相空間論の用語で、現象数理学科では「トポロジー」などの科目で説明されているはず。

compact 集合とは何か。$\mathbb{C}$ の部分集合については次が手取り早い。

定理 4.2 ($\mathbb{C}$ の部分集合の compact 性の判定)

$\mathbb{C}$ の部分集合 K について、K が compact $\Leftrightarrow$ K が有界閉集合。

2.2 広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理

実は、冪級数, Laurent 級数についても、広義一様収束が成り立つ。
(「複素関数」ではその言葉を出さなかっただけである。)

例 4.3 (冪級数と Laurent 級数の場合 — 実は広義一様収束である)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は、収束円 $D(c;\rho)$ で広義一様収束する。
(「複素関数」では、収束円内の任意の閉円盤 $\overline{D}(c;R)$ $(0<R<\rho)$ で一様収束する、と説明してあるが、それは実は広義一様収束ということである。)

円環領域 $A(c;\rho_1,\rho_2)$ で正則な関数の Laurent 級数展開

$f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は、$A(c;\rho_1,\rho_2)$ で広義一様収束する。これも「複素関数」では、$\rho_1<R_1<R_2<\rho_2$ を満たす任意の R_1, R_2 について $\overline{A}(c;R_1,R_2)=\{z\in\mathbb{C}\mid R_1\le|z-c|\le R_2\}$ で一様収束と説明しておいた。 $\square$

2.2 広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理

「複素関数」で一様収束する関数列は良い性質を持つと説明してあるが (定理を証明付きで述べた)、広義一様収束でもほぼ同様のことが成り立つ。

定理 4.4 (広義一様収束する関数列の性質 (まとめ))

1. 広義一様収束する連続関数列の極限関数は連続である。
(∵ 連続性は局所的性質だから、一様収束の場合と変わらない。)
2. 広義一様収束する連続関数列について項別積分ができる。
(∵ 曲線の像 $\{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ は、連続写像 φ による compact 集合 $[\alpha, \beta]$ の像であるから compact である。ゆえに一様収束する。)

次は本項のハイライト。

定理 4.5 (Weierstrass の二重級数定理)

Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{f_n\}$ は Ω で定義された正則関数列、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ は Ω で広義一様に f に収束するならば、f は Ω で正則で、すべての自然数 k に対して

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (\Omega \text{ で広義一様}).$$

Weierstrass の二重級数定理の証明のあらすじ　証明はそんなに難しくはないけれど省略して (講義ノートには書いてあります)、証明のあらすじだけを説明します。

f_n は正則なので、Cauchy の積分公式

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad (|z-c|<r)$$

が成り立つ。$\{f_n\}$ が広義一様収束するので、極限関数 f は連続で、$n\to\infty$ として (項別積分可能なので)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad (|z-c|<r).$$

これから f は何回でも微分できることが分かる ($\dfrac{d}{dz}$ は $\dfrac{1}{\zeta-z}$ が引き受けてくれる)。

$\{f_n'\}$ が f' に広義一様収束することなど、仕事は残っていますが、これでおいとまします。

2.2 広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理

上の定義に現れる「任意の compact 集合上で…」という条件は証明しにくく感じるかもしれないが、次の定理があるので、実は簡単である。

定理 4.6 (広義一様収束の定義の言い換え)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) $\{f_n\}$ は Ω で f に広義一様収束する。

(ii) すべての $a \in \Omega$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、$D(a;\delta) \cap \Omega$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。
(すべての点に対して、一様収束する近傍が存在する。)

証明.

(i)⇒(ii) $a \in \Omega$ とすると、ある $\delta > 0$ が存在して、$D(a;2\delta) \subset \Omega$. $K := \overline{D}(a;\delta)$ は、Ω に含まれる compact 集合であるから、K で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。

(ii) ⇒ (i) K を Ω に含まれる compact 集合とする。K の各点 a に対して、$\delta_a > 0$ が存在して $D(a;\delta_a) \cap K$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。K の compact 性から、ある a_1, $\cdots$, $a_n \in K$ が存在して、$K \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} D(a_j;\delta_{a_j})$. ゆえに K で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。 □

例 4.7 ($\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$, $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開)

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right)\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

が既に得られている。(中辺を項別積分した級数は収束しないが) 右辺を項別積分した

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様収束する (次頁)。Weierstrass の二重級数定理を適用すると、和

$$f(z):=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

は正則関数で、その導関数は項別微分で計算できる:

$$f'(z)=-\frac{1}{z^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right)\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

$\dfrac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2z}{z^2-n^2}$ の収束証明 … 細かいので読み飛ばしても良いです

(気分の説明) $\sum \frac{1}{n}$ は発散するけれど、$\sum \frac{1}{n^2}$ は収束する。compact 集合は有界なので、z は定数のようなものだから、$\frac{1}{z-n} \sim -\frac{1}{n}$ の和は収束せず、$\frac{1}{(z-n)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ の和は収束する。

K を $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の任意の compact 集合とする。有界であるから、ある $R \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$(\forall z \in K) \quad |z| \le R.$$

$N \ge 2R$ を満たす N を取ると、

$$(\forall z \in K)(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N) \quad \left|1-\frac{z^2}{n^2}\right| \ge 1-\frac{|z|^2}{n^2} \ge 1-\frac{R^2}{N^2} \ge 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

$$\left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right| = \frac{1}{n^2}\frac{2|z|}{|1-z^2/n^2|} \le \frac{2|z|}{n^2(1-|z|^2/n^2)} \le \frac{2R}{3/4\cdot n^2} = \frac{8R}{3}\frac{1}{n^2}.$$

これから K での一様収束が分かる。実際 $S_n(z) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2z}{z^2-k^2}$ とおくとき

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \ge n)\,|S_m(z)-S_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{2z}{z^2-k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{m}\frac{8R}{3k^2}.$$

ゆえに任意の $z \in K$ に対して $\{S_n(z)\}$ は Cauchy 列なので収束する。

その極限を $S(z)$ とすると

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |S(z) - S_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{8R}{3k^2}$$

が成り立つ。ゆえに

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{z \in K} |S(z) - S_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{8R}{3k^2}.$$

ゆえに級数 $\displaystyle\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ は K で一様収束する。 □

次のスライドで本線に戻る。

例 4.7 ($\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$, $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き))

ゆえに

$$f'(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

これを積分して ($(\cot)' = -\dfrac{1}{\sin^2}$ に注意する …Cf. $(\tan)' = \dfrac{1}{\cos^2}$)

$$f(z) = \pi\cot(\pi z) + C = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

f は奇関数であるから $C = 0$. ゆえに $f(z) = \pi\cot(\pi z)$. すなわち

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

これは **cot の部分分数展開**と呼ばれる式で、色々な場面で応用される。

$\pi\cot(\pi z)$ のすべての極における Laurent 展開の主部 $\frac{1}{z-n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ を寄せ集めると、ぴったり元の関数 $\pi\cot(\pi z)$ になるという式で、私にはとても不思議な感じがする。 □

例 4.8 (Euler による sin の無限積展開)

(無限乗積の収束・発散の定義、性質の証明は省略する。講義ノートにはある。)

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

は、$\mathbb{C}$ で広義一様収束することが分かる。ゆえに f は $\mathbb{C}$ で正則である。その対数微分を計算すると (これが出来ることも本当は証明すべき…)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

この右辺は $\pi\cot(\pi z)$ に他ならないので (1 つ前の例)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi\cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin \pi z}.$$

これから $f(z) = \sin \pi z$ を導くことが出来る。ゆえに

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \quad (z\in\mathbb{C}). \tag{1}$$

2.3 既出の例の再検討

この $\sin\pi z$ の因数分解のような式を発見したのは Euler である。
(以上の話の詳細は講義ノート [1] §2.5 を見よ (例 2.32 ⋯ 番号がずれているかもしれない)。)
余談: Euler は

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots \quad (\text{Maclaurin 展開}) \\ &= \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

の右辺を展開して、x^2 の項の係数を比較することで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を初めて証明した (1748 年)。

実はゼータ関数の正の偶数での値は cot の冪級数展開の係数と関係があるが、それは省略する。

Euler による証明は、現代の観点からは簡単には正当化できないものが多い (収束の定義は 19 世紀に入ってからだからやむを得ないと言える)。話 (証明) の順序も変えられたものが多い。

最初に問: ∞ は数か？ (Cf. 実数で考えるときの $+\infty$, $-\infty$)

答: ∞ は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

∞ をモノに格上げし、$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考え、距離空間とする。

$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ において $f(z)$ が ∞ に収束する、とする。

$\widehat{\mathbb{C}}$ はもう体ではない。∞ は数ではないが、それに準ずるもの。

$\widehat{\mathbb{C}}$ を **Riemann 球面**とよぶ。

$\widehat{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ とも表す (1 次元複素射影空間と呼ばれる)。**Riemann 面** (説明は略) の典型例である。

こうお膳立てすると、$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ という関数は非常に基本的となる。これを **1 次分数変換**とよぶ。

2.0 イントロ　∞ と四則

$\widehat{\mathbb{C}}$ において、lim と「合う」ように次のように定めることもある。

1. $(\forall a \in \mathbb{C}) \quad a + \infty = \infty + a = \infty.$
2. $(\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$
3. $\infty \cdot \infty = \infty.$
4. $(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad \frac{a}{0} = \infty.$
5. $(\forall b \in \mathbb{C}) \quad \frac{b}{\infty} = 0.$

(1) は「$\lim_{z \to c} f(z) = a,\ \lim_{z \to c} g(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \to c} (f(z) + g(z)) = \infty$」と解釈可能。

しかし、$\infty + \infty$ や $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ は定義しない (つじつまが合うように定義出来ない)。

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は体ではなく、移項や消去などは気軽に出来ない。

実数の世界の ∞ と複素数の世界の ∞ は、(ふつう) 記号で見分けがつかないが違うものである。ここでは実数世界の ∞ は $+\infty$ と書く。

$I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ とする。$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ とは

$$(\forall R \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta)\ f(x) > R.$$

実数の世界には、$-\infty$ もあって、これは $+\infty$ とは違うものである。数直線で言うと、$+\infty$ は右の果て、$-\infty$ は左の果てである。

複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点 ∞ が 1 個あるだけ。

$$+\infty \neq -\infty = (-1)\cdot(+\infty),$$

$$(-1)\cdot\infty = \infty$$

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を作るように、$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を作れる (例えば杉浦 [2])。

2.1 1次分数変換の定義 (1) 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とするとき $\dfrac{az+b}{cz+d}$ を考える。

(i) $c \neq 0$ のとき、$\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ で連続で

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

(ii) $c = 0$ のとき、$\mathbb{C}$ で連続で

$$\lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

(注: $ad - bc \neq 0$ より、$a \neq 0$ かつ $d \neq 0$ である。$-d/c$ と a/c が ∞ になる、と考えると分かりやすいかも。)

念のため復習　$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{C}$ とする。

- $\displaystyle\lim_{z \to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow (\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega\colon |z - a| < \delta)\ |f(z)| > R.$
- $\displaystyle\lim_{z \to \infty} f(z) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \Omega\colon |z| > R)\ |f(z) - A| < \varepsilon.$

  (細かい注意: Ω 内の点列 $\{z_n\}$ で $\lim |z_n| = +\infty$ となるものが存在すると仮定しておく。)

2.1 1次分数変換の定義 (2) 定義

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とする。

(i) $c \neq 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq -d/c, \infty) \\ \infty & (z = -d/c) \\ \dfrac{a}{c} & (z = \infty) \end{cases}$$

(ii) $c = 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{d} & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$$

で定められる $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を**1次分数変換**と呼ぶ。

以下、単に $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ と表す。(ふつうは、この分数式に $z = -d/c$, $z = \infty$ は代入できない訳だけど、) $\varphi(-d/c) = \infty$, $\varphi(\infty) = a/c$ と約束する。

2.2 1次分数変換の性質 (1)

命題 4.9 (実はフライング)

任意の 1 次分数変換 $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は連続である。

証明.

我々はまだ $\widehat{\mathbb{C}}$ に距離も位相も導入していない (それで連続性を議論するのは反則！)。しかし、任意の $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ が成り立つように色々なことを後で定義する (約束)。その約束が果たされれば連続と分かる。 $\square$

2.2 1次分数変換の性質 (2) 行列と対応させる

複素数成分の、2 次の正則行列の全体 (一般線型群) を $GL(2;\mathbb{C})$ と表す。

$$GL(2;\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{C})$ に対して、1 次分数変換 φ_A を次式で定める。

$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

次が基本的である。

命題 4.10

1. $A, B \in GL(2;\mathbb{C})$ とするとき $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.
2. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$\varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ ($\widehat{\mathbb{C}}$ 上の恒等写像).
3. $A \in GL(2;\mathbb{C})$ ならば $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$.

2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}$, $rz + s \neq 0$, $c\varphi_B(z) + d \neq 0$ とすると

$$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d}$$

$$= \cdots \text{中略} \cdots = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + cq + ds} = \varphi_{AB}(z).$$

ゆえに有限個の点を除いて、$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は一致する。

$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は $\widehat{\mathbb{C}}$ で連続であるから、$\widehat{\mathbb{C}}$ 全体で一致する。(実際、z^* を除外した点とするとき、$rz_n + s \neq 0$, $c\varphi_B(z_n) + d \neq 0$ を満たす $\{z_n\}$ で $z_n \to z^*$ となるものが取れるので、
$\varphi_A \circ \varphi_B(z_n) = \varphi_{AB}(z_n)$ の極限を取って $\varphi_A \circ \varphi_B(z^*) = \varphi_{AB}(z^*)$.)

2. $c = 0$ の場合に相当する。定義より $\varphi_I(z) = \begin{cases} z & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$. これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の恒等写像である。
3. $A \in GL(2;\widehat{\mathbb{C}})$ のとき、A^{-1} が存在して、$A^{-1} \in GL(2;\mathbb{C})$. (1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

同様にして $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$. ゆえに $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$. □

系 4.11

任意の 1 次分数変換は全単射である。

(上の定理の (3) により、逆写像が存在することが分かるから。)

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

1. 平行移動 $b \in \mathbb{C}$ とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

2. 定数倍 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

$a = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると、M_a は、$z \mapsto rz$ (拡大または縮小) と $z \mapsto e^{i\theta}z$ (回転) の 2 つに分解できる。

3. **反転**

$$R(z) := \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}.$$

以上から、平行移動、定数倍、反転が 1 次分数変換であることが分かった。

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (2)

命題 4.12

任意の 1 次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成として表せる。

(どうやって証明する？)

証明.

(a) $c \neq 0$ の場合、部分分数分解により

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = -\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c} + \frac{a}{c}.$$

これは $T_{d/c}$, R, $M_{-\frac{ad-bc}{c^2}}$, $T_{a/c}$ を合成したものである。

(b) $c = 0$ の場合、

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

これは $M_{a/d}$, $T_{b/d}$ を合成したものである。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、普通の円と直線 (∞ を通る半径無限大の円と考える) の総称である。

$|\beta|^2 - ac \geq 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$a z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + c = 0 \tag{2}$$

の形に表せるもの全体である。

気になる人には自分で確かめてもらおう。

問 複素平面内の任意の直線は、ある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a\overline{z} + \overline{a}z + \beta = 0$$

と表せる (直線の方程式)。

問 複素平面内の任意の円は、ある $c \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \leq |c|^2$ を用いて、

$$z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z + \beta = 0$$

と表せる (円の方程式)。

ヒント　xy 平面での直線の方程式

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad ((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$$

に $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ を代入して整理する。

複素平面での円の方程式 $|z - c| = r$ は、$|z - c|^2 = r^2$, つまり $(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = r^2$ と同値である。

2.4 $\hat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\hat{\mathbb{C}}$ の円を $\hat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 4.13 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、$\hat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\hat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

証明.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。
定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。
反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ でどうなるか調べる。$\hat{\mathbb{C}}$ の円の方程式 (2) に、$z=R^{-1}(w)=\frac{1}{w}$ を代入すると

$$a\frac{1}{w}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\beta\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\overline{\beta}\left(\frac{1}{w}\right)+c=0.$$

これは次式と同値である。

$$a+\beta w+\overline{\beta}\overline{w}+cw\overline{w}=0$$

$a':=c$, $\beta':=\overline{\beta}$, $c':=a$ とおくと

$$a'w\overline{w}+\beta'\overline{w}+\overline{\beta'}w+c'=0.$$

$|\beta'|^2-a'c'=|\beta|^2-ac\geq 0$ であるから、これは $\hat{\mathbb{C}}$ の円を表している。 □

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (1)

補題 4.14 (相異なる 3 点を 1,0,∞ に写す 1 次分数変換)

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす 1 次分数変換が一意的に存在する。

証明　(存在) α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ (3 つとも有限) の場合は

$$\varphi(z) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} \cdot \frac{z-\beta}{z-\gamma}. \tag{3}$$

これが条件を満たすことは目視で確認できる。

$\beta = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{\alpha-\gamma}{z-\gamma}$, $\gamma = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z-\beta}{\alpha-\beta}$, $\alpha = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z-\beta}{z-\gamma}$ とすればよい。

注 (証明の途中だけれど)　(3) は自分で書けるようにしておくべき公式である。(β で 0 より赤、γ で ∞ より青、最後に α で 1 となるように調節するオレンジ)

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (2)

(一意性) φ_1 φ_2 が条件を満たすならば、$\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ も 1 次分数変換で

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

$\varphi(\infty) = \infty$ より、ある a, b が存在して $\varphi(z) = az + b$.

$\varphi(0) = 0$ より、$b = 0$.

$\varphi(1) = 1$ より、$a = 1$.

ゆえに $\varphi(z) = z = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)$. すなわち $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$.

φ_1 を右からかけて $\varphi_1 = \varphi_2$. □

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (3)

命題 4.15 (任意の 3 点を任意の 3 点に写せる)

$\alpha, \beta, \gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ が相異なり、$\alpha', \beta', \gamma' \in \hat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば、ある 1 次分数変換 φ が存在して

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'.$$

証明.

一般に α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ と表すことにすると、

$$\varphi := \varphi_{\alpha',\beta',\gamma'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$$

とすればよい。 □

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (4)

例題　1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。

(解答)　命題 4.15 の証明を実行する、というイメージの解答である。
1, 2, 3 を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z)=\frac{1-3}{1-2}\cdot\frac{z-2}{z-3}=\frac{2z-4}{z-3}.\quad \text{対応する行列は}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

2, 3, 1 を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z)=\frac{2-1}{2-3}\cdot\frac{z-3}{z-1}=\frac{-z+3}{z-1}.\quad \text{対応する行列は}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

求める 1 次分数変換に対応する行列は

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & -13\\ 3 & -7\end{pmatrix}.$$

ゆえに $\varphi(z)=\dfrac{5z-13}{3z-7}$. □

2024 年 5 月 7 日の授業はここまでです。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。 $\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

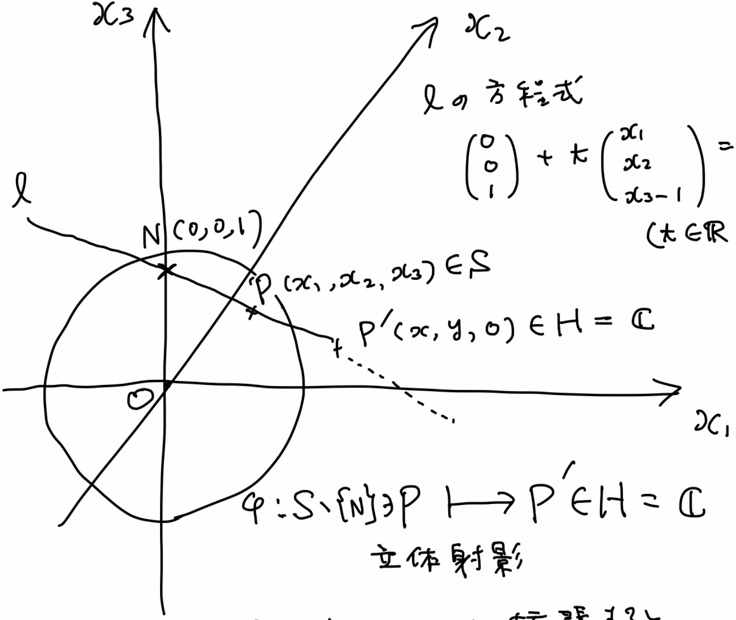
とおく。また x_1x_2 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

任意の $P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像

$$\varphi\colon S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、N からの**立体射影** (**stereographic projection**) と呼ぶ。

注 以下で、$\varphi(N) = \infty$ と定めることで、φ を S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像に拡張する。その拡張した写像も**立体射影**と呼ばれる。



lの方程式

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(t \in \mathbb{R})$

$$\varphi : S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

立体射影

$\varphi(N) = \infty$ と拡張すると

$$\varphi : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$$

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (2) 立体射影の式

問　$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x + iy = (x, y, 0)$ とするとき、次式を示せ。

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \text{すなわち} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

(ヒント: 2 点 N, P を通る直線と、平面 $x_3 = 0$ との交点を求める。)

問　$\forall z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ は次のように解けることを示せ。

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}.$$

(ヒント: $|z|^2 = \dfrac{1 + x_3}{1 - x_3}$ を導出した後、x_3, x_1, x_2 の順に求める。)

(逆写像が存在するので)

立体射影 $\varphi\colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ は全単射である。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (3) S と $\hat{\mathbb{C}}$ の同一視

$\displaystyle\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。
そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\hat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3} & ((x_1,x_2,x_3)\in S\setminus\{N\})\\ \infty & ((x_1,x_2,x_3)=N=(0,0,1)).\end{cases}$$

元々は、S のことを Riemann 球面と呼び、φ によって $\hat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、$\hat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

問　次のことを確かめよ (幾何学的考察および計算の両方で)。

$$\varphi(\text{北半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>1\},\quad \varphi(\text{南半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\},$$
$$\varphi(\text{赤道})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\},$$
$$\varphi(\text{北極})=\infty,\quad \varphi(\text{南極})=0.$$

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 1 一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。$z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \left\|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)\right\| \quad (\|\ \| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる (これは簡単に確認できる)。

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき

$$d(z_1, z_2) = \frac{2\,|z_1 - z_2|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}.$$

図形イメージは鮮明だけれど、式はちょっと面倒 (個人の感想です)。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法2　(一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.
2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.
3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))\ U_y \subset U$.

このとき、X の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x)) \quad U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。

$\mathbb{C}$ においては、各 $a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a; r) \mid r > 0\}, \quad U(a; r) := D(a; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。

新たに $\mathcal{B}(\infty)$ を定めて、$\mathcal{B}(a)$ $(a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ が基本近傍系の公理を満たすことを確認すれば、$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相が定義できる。

$$\mathcal{B}(\infty) := \{U(\infty; R) \mid R \in (0, +\infty)\}, \quad U(\infty; R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}.$$

2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi\colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

実は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像は1次分数変換に限る。
→ 1次分数変換の重要性が分かる。

(このことの証明も、期末レポート課題の候補問題とする。)

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

$\mathbb{C}$ 自身や、$\mathbb{C}$ の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ も Riemann 面である。実際、$a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a;r) = D(a;r)$ はそのまま $\mathbb{C}$ の円盤であるし、∞ の近傍 $U(\infty;R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \frac{1}{z}$ により $\mathbb{C}$ の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。

この座標変換 $w = 1/z$ により、$z = \infty$ においても、関数の微分可能性や留数を考えたりできる。($F(w) = f(1/w)$ が $w = 0$ で微分できるとき、f は ∞ で微分可能という等。) これは実はよく使われる。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 4.16 (円に関して鏡像の位置)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

- (a) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。
- (b) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z-c||z'-c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

命題 4.17 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ

色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z) = z+d$, 定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \neq 0)$, 反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ のときは、少々計算が必要であるが、次のことを使うと見通しが良い。

ヒント　z, z' が c から発する一本の半直線上にあり、かつ $|z-c||z'-c'| = r^2$ を満たすためには、 $(z-c)(\overline{z'}-\overline{c}) = r^2$ を満たすことが必要十分である。

以下各自に任せる。

領域の等角写像という概念を紹介する。これについては後で詳しく説明するが、有名かつ重要な話を 3 つ “先行上映” する。

(i) Riemann の写像定理
(ii) 単位円盤の等角写像
(iii) 上半平面の等角写像

(ii), (iii) が 1 次分数変換となることが、1 次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1 次分数変換は基本的ツールとして使われる。

単位円盤を D_1 とおく: $D_1 := D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

正則関数が正則な逆写像を持つとき、**双正則**(そうせいそく)という。

$\hat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω に対して、$\varphi\colon \Omega \to D_1$ が双正則であるとき、φ を **Ω の等角写像**あるいは **Ω の写像関数**とよぶ。

定理 4.18 (Riemann の写像定理)

$\hat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω が単連結で、$\Omega \ne \mathbb{C}$, $\Omega \ne \hat{\mathbb{C}}$ ならば、Ω の等角写像が存在する。

Ω は $\mathbb{C}$ の領域, $z_0 \in \Omega$ とするとき、Ω の等角写像で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0. \tag{4}$$

“簡単な” 領域の等角写像が 1 次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が 1 次分数変換そのものでなくても、その構成に 1 次分数変換が使われるものはとても多い)。

次は非常に有名な定理である。

定理 4.19 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{5}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)

$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

この事実の証明を期末レポート課題候補にする。(5) の φ が条件を満たすこと、条件を満たす 1 次分数変換が (5) に限られることは初等的に導ける。

双正則という仮定から、φ が 1 次分数変換に限られる、というところに **Schwarz の補題**という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。

例 4.20 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

(6)
$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

は H の等角写像である。

略証　1次分数変換は一般に双正則であるから、$\varphi(H) = D_1$ を確かめれば良い。それは、計算で得られる $1 - |\varphi(z)|^2 = \dfrac{4\operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ から分かる。 □

この φ は**Cayley**(ケーリー)**変換**とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。
(証明) $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を φ とすると、

$$\varphi(w) = (w, f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) \quad (w\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi\circ f$ は α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi\circ f(z) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z), f(\alpha), f(\beta), g(\gamma)) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}). \quad \square$$

落穂拾い (2)

上半平面を単位円板に写す 1 次分数変換の一般形は

$$w = \alpha \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \operatorname{Im} \beta > 0. \tag{7}$$

$\beta = i$, $\alpha = 1$ のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

実直線 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を自分自身に写す 1 次分数変換は？

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).

[2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる． この eBook まともな目次を付けてほしい.