応用複素関数 第 7 回

～ 流体力学への応用 (2) ～

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2024 年 6 月 4 日

目次

本日の内容・連絡事項

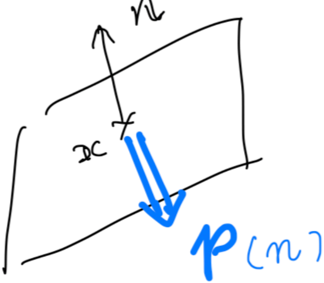
先週はドタキャンのような休講ですみませんでした。

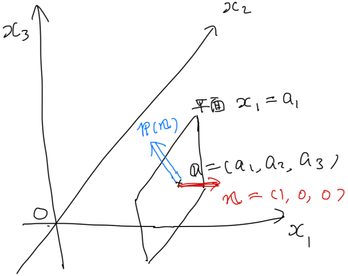
3.5 応力 (1) Cauchy の応力原理, 応力の定義

流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

> 流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置 x, 時刻 t, 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で指定する) で定まる (**Cauchy の応力原理**)。

この面積あたりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。





3.5 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, $t = \tau$ と固定し、応力 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{n}$ の関数と考える: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$.

点 $\boldsymbol{a}$ を通る平面 $x_i = a_i$ を通して、正の側が負の側におよびす力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ とおく。これは $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_i)$ である。

(1) $$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_1)\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_2)\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_3))$$

を**応力テンソル** (stress tensor) と呼ぶ。

次のことが成り立つ (証明は省略)。

- P は対称である: $P^\top = P$ つまり $p_{ij} = p_{ji}$.
- $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P^\top \boldsymbol{n}$.

次式は覚えておくこと。

(2) $$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n}.$$

3.5 応力 (3) 運動方程式の一般形

Cauchy の応力原理と応力テンソルを認めると、一般に次の方程式が成立する。

(3)
$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div} P \quad (\textbf{流体の運動方程式}).$$

ただし

(4)
$$\operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明　流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial V} P\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

右辺のベクトルの第 i 成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V} (p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3) d\sigma = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i\, d\boldsymbol{x}.$$

ゆえに $\int_V \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\, d\boldsymbol{x} = \int_V \operatorname{div} P\, d\boldsymbol{x}$. V は任意なので $\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \operatorname{div} P$. □

3.5 応力 (4) 応力テンソルの具体形

ここから先は応力テンソルの具体形が必要になる。
適当な仮定をおいて、応力テンソルの具体形を定めよう。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して、**Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、$E=0$ のとき $P=-pI$ 等々)。それから

$$P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで I は単位テンソル, E は

$$E = (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

で定められるテンソルで、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor)、変形速度テンソルと呼ばれる。

さらに **Newton 流体の仮定** (P は E の 1 次式) をおくと、

$$P = \left(-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v}\right) I + 2\mu E \tag{6}$$

を得る (岡本・中村 [1])。ここで λ, μ は非負定数、$p = p(x,t)$ はスカラー関数である。

3.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体, 圧縮性流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。粘性のあるなし、圧縮性で分類される。

μ は**粘性率** (**粘性係数**, **粘度**, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体** (perfect fluid), あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ。

一方、$\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たす流体を**非圧縮流体**と呼ぶ。この条件は次の方程式と同値である。

(7) $$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{非圧縮条件の方程式})$$

($\because$ 連続の方程式のうち $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ という形のものを見れば分かる。)

非圧縮条件を満たす Newton 流体の応力テンソルは、次式を満たす。

(8) $$P = -pI + 2\mu E.$$

3.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ($\boldsymbol{v} = 0$) や、完全流体 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n} = -p\boldsymbol{n}.$$

応力は面に垂直 ($\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{n}$)、押される向きで (外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と逆向き)、大きさは $p = p(\boldsymbol{x}, t)$ で $\boldsymbol{n}$ にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

3.7 Newton 流体の運動方程式　(1) $\operatorname{div} P$ の計算

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v}) I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき $\operatorname{div} P$ を計算すると

(9)
$$\operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}).$$

ただし

$$\triangle \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} \triangle v_1 \\ \triangle v_2 \\ \triangle v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad (\text{念のため}).$$

特に非圧縮流体では ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ であるから)

(10)
$$\operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v}.$$

これで準備はできた！

非圧縮 Newton 流体の運動方程式は次の形になる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\triangle\boldsymbol{v}. \tag{11}$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な**Navier-Stokes方程式**(ナヴィエ・ストークス)である。

ただし

$$\nu:=\frac{\mu}{\rho} \tag{12}$$

とおいた。ν を**動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

特に粘性がない場合は ($\nu=0$ であるから)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{13}$$

これが非圧縮完全流体の方程式として有名な**Euler方程式**(オイラー)である。

3.7 Newton 流体の運動方程式　(3) Stokes 方程式

流速 ($|\boldsymbol{v}|$) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ を無視して ($\boldsymbol{v}=0$ で線形化する、とも言える)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\triangle\boldsymbol{v}. \tag{14}$$

を得る。これを **Stokes 方程式**と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。しばしば (特に非有界領域では) パラドックスを起こすことが知られている。

この他にも $\mathbf{0}$ でない定数速度で線形化した Oseen 方程式、圧縮性流体 (最近流行している) の場合など、色々あるが、運動方程式の話はこのくらいにしておく。

3.7 流体力学の方程式 (5) 練習の勧め

今日の授業は、ほとんどが単なるお話になってしまう嫌いがあると思われる。

- (9) を確かめよ (導関数を計算するだけだが、ベクトル解析の記号の良い練習である)。
- Navier-Stokes 方程式ベクトル表記でなく、成分表記せよ ($(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ はどういうものか、一度は計算してみよう)。
- Navier-Stokes 方程式を覚えてみよう。

3.8 流体の境界条件 (1) 粘着境界条件

　解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

　粘性流体では、固体の壁では

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{wall}} \quad (\text{壁の表面において}) \tag{15}$$

を満たすことが知られている ($\boldsymbol{v}_{\mathrm{wall}}$ は壁の速度)。特に固定壁では

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{壁の表面において}) \tag{16}$$

を満たす。これを**粘着境界条件**と呼ぶ。

　数学的にはいわゆる Dirichlet 境界条件であり、扱いやすい。

3.8 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$\text{(17)} \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n} \quad \text{(境界において)}$$

を**すべり境界条件**と呼ぶ。速度の垂直成分が 0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が 0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n}$ は、3 次元では

$$P\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$$

と表せる。また 2 次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$ として、次式で表せる。

$$P\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=0.$$

注意　非粘性流体では、流体のしめる領域内で $P\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n}$ が成り立つ。$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ が滑り境界条件である、とみなしている人が多い。

3.8 流体の境界条件 (3) その他

これ以外に、応力を指定する**応力境界条件**というものもあるが、それは必要になったときに説明する。

3.9 おまけ: 静水圧の話 (1) $p = -\rho g z + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$$

が運動方程式になる。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、$z = 0$ において、$p = p_0 =$ 大気圧 とすると

$$p(\boldsymbol{x}) = -\rho g z + p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 1\ \mathrm{m} = 9.8 \times 10^3\ \mathrm{Pa}.$$

大気圧 $p_0 = 1013\ \mathrm{hPa} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$ であるから、Δp は大気圧 p_0 の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、$\Delta p \fallingdotseq p_0$ となる訳である。

この問題は素朴な考え方で「解ける」ので、大げさな解き方のように思えるが、我々は導出した方程式をもとに考えようとしているので、無駄なことではない。

3.9 おまけ: 静水圧の話 (2) アルキメデスの浮力の原理

一様な重力場の下での池あるいは湖 (水が静止している) に物体 Ω を入れたとき、物体の表面は水から応力を受ける。その “合力” を求めよう。

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}\, P\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = \rho g \int_{\Omega} d\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{e}_3 = \rho\,|\Omega|\, g\boldsymbol{e}_3.$$

ただし

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Omega| = \Omega \text{ の体積}.$$

$\rho\,|\Omega|$ は「物体が押しのける水の質量」で、$\rho\,|\Omega|\,g$ はその重さ (重力) である。つまり向きが上向き ($\boldsymbol{e}_3$) で、大きさが「物体が押しのける水の重さ」である力となる。これが**浮力**である。

3.10 おまけ: 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問　水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答　水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。μ については確かにそうだが、ν については逆転している (水の ρ が 3 桁大きいのが効いている)。

なお、サラダ油は水の 60 ～ 80 倍程度であるという。

温度が上がると μ は小さくなる。

気体の場合は、μ は圧力にはほとんどよらない。

3.11 渦度　駆け足の説明

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を**渦度**(うずど) (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の "自転" の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解　：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ のとき、流れは**渦なし**, **非回転** (irrotational), **層状** (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である (次のスライドを見よ) という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理　「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ である。」

3.12 ポテンシャル流　3.12.1 ポテンシャル, 渦無し

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ $(\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi)$ を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

($\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

($\because$ これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ $\fallingdotseq$ ポテンシャル流

領域 Ω における速度場 $\boldsymbol{v}$ が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \triangle \phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) と仮定すると

$$\triangle \phi = 0.$$

一方、領域の境界 $\partial\Omega$ 上の点において、

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \nabla \phi \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

(青字で書いたものは一般に成り立つ公式である。)

ゆえに ϕ は、次の **Laplace 方程式の Neumann 境界値問題**の解である。

(18)
$$\triangle \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

(19)
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

もしも $\boldsymbol{v}$ の $\partial\Omega$ での値が既知ならば、この問題を解いて ϕ が (ゆえに $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \phi$ も) 求まる。この問題はポピュラーで、数値計算のやり方もよりどりみどりである (後でいくつか紹介する)。

3.12.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{20}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{21}$$

の解が存在するためには、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

(必要性: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}\phi\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \triangle\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0$)

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。実際、$g = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ で、非圧縮 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ を仮定しているので、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

解には定数差の自由度が残る (解 + 定数は解、2 つの解の差は定数)。

3.12.3 まとめ

3 次元で、非圧縮のポテンシャル流は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題を解くことで「解ける」ことが分かった。

2 次元の場合も同様のことが成り立つが、実はより便利に、複素関数論が適用できる、という話を以下で紹介する。

(一方、2 次元の Laplace 方程式の境界値問題は、複素関数論のあちこちで登場する。直接的に正則関数が登場しないが、複素関数論の項目の一つと考えるべきかもしれない。)

参考文献

[1] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座現代数学の基礎 (1996〜1999) の分冊を単行本化したもの.