ベクトル解析早見表

桂田 祐史(かつらだ まさし)

2021 年 5 月 31 日, March 20, 2024

入門部分のベクトル解析については、例えば桂田 [1] を見よ。

流体力学で用いる積分定理については、桂田 [2] を見よ。

(1) grad, div, rot, $\triangle$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{curl} \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

$$\triangle f = \nabla^2 f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}, \quad \triangle \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \triangle u_1 \\ \vdots \\ \triangle u_n \end{pmatrix}.$$

(2) 2回作用させると何になる

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \mathbf{0} \quad (\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}),\\
&\operatorname{div}\operatorname{grad} = \triangle \quad (\nabla \cdot \nabla f = \triangle f),\\
&\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0 \quad (\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0),\\
&\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \triangle \quad (\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \triangle \boldsymbol{u}).
\end{aligned}
$$

(3) 線積分の定義

パラメーター曲線 C: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) に対して、$\boldsymbol{\varphi}(\alpha)$ を始点、$\boldsymbol{\varphi}(\beta)$ を終点という。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\varphi}'(t), \quad \frac{ds}{dt} = \left\| \boldsymbol{\varphi}'(t) \right\|.$$

写像としての像 $C^* := \{\boldsymbol{\varphi}(t) \mid t \in [\alpha, \beta\}$ を曲線 C の像または跡と呼ぶ。
$f \colon C^* \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} \colon C^* \to \mathbb{R}^n$ (n は空間次元) とするとき

$$\int_C f \; ds := \int_\alpha^\beta f\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right) \left\| \boldsymbol{\varphi}'(t) \right\| dt,$$

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} := \int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) \; dt.$$

$\displaystyle\int_C 1 \; ds$ は C の長さである。一般に次式が成り立つ。

$$\left\| \int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \right\| \le \int_C \|\boldsymbol{f}\| \; ds.$$

(4) ポテンシャルの存在

命題 0.1 (ポテンシャルの存在定理)

$\mathbb{R}^n$ の単連結領域 Ω におけるベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_i)$ が $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n)$ を満たすならば、$F(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方によらず well-defined であり、$\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす。ただし $C_{\boldsymbol{x}}$ は定点から $\boldsymbol{x}$ に至る Ω 内の曲線である。($\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす F を $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルと呼ぶ。)

特に 3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ を満たす場合、2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$ を満たす場合、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。

理解を深めるための注意を 2 つ

- 1 変数関数の場合の $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ に相当する。
- C^2 級のポテンシャル F が存在する場合、$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ であるから、$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ が成り立つことは明らかである。

(5) grad の意味、流束積分

grad は法線ベクトル　関数 $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ について、方程式 $F(x) = c$ の定める曲線 (曲面) を等高線 (等値面) と呼ぶ。grad F はそれらの法線ベクトルとなる。F の値が最も速く大きくなる方向を表す。

流束積分　単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ である曲面 S (曲線 C) と速度場 $\boldsymbol{v}$ について

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \quad \left(\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds\right)$$

を**流束積分** (flux integral) と呼ぶ。物理的には、単位時間に S (C) を通り抜ける流体の体積 (面積) を表す。ただし、 $\boldsymbol{n}$ の向いている側に出る量を正とする (S が領域 Ω の境界の場合は、Ω の外に流出する量ということになる)

(6) Gauss の発散定理

$$\int_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\; dx = \int_{\partial V} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\; d\sigma \quad \text{(Gauss の発散定理)}.$$

(領域の境界全体での流束積分は、領域での発散の積分に等しい。)

次の形で書かれていることもある (n_j は $\boldsymbol{n}$ の第 j 成分)。

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\; dx = \int_{\partial \Omega} u n_j\; d\sigma \quad (j = 1, 2, 3).$$

法線方向の微分係数　方向微分係数の定義と合成関数の微分法から

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \to -0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{n}) - f(\boldsymbol{x})}{\varepsilon} = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}.$$

Green の積分公式

$$\int_\Omega \triangle u\, v\; dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\; d\sigma - \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\; dx.$$

　流体力学で、有限要素法を使う場合は、この種の公式がもう少し必要である。そのうち書き加えるが、とりあえず桂田 [2] を紹介しておく。

参考文献

[1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006〜).

[2] 桂田祐史：ベクトル値関数版 Green の公式、部分積分 — 流体力学のために — (2009/6/14〜), https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/green-theorem-vector.pdf.