複素関数・同演習 第 1 回

～ガイダンス, 複素関数の定義と基本的な性質 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 9 月 20 日

目次

1. 自己紹介・ガイダンス
   - 自己紹介
   - ガイダンス
2. (複素) 関数論とは
   - 授業内容
   - 歴史
3. 参考文献

自己紹介

- 桂田 祐史 (かつらだ まさし)
- 専門は数値解析 (数値計算法の数理の関数解析的研究)
- 研究室は高層棟 910 号室 (質問は長時間なら Zoom)
- 質問・相談はメールでも可
  (メールアドレスは katurada あっと meiji どっと ac ドット jp)

ガイダンス

1. 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
   複素変数、複素数値の関数を**複素関数**とよぶ。
   分野の名前としては、(複素) 関数論とか複素解析などが使われる。
   関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (後述)。
   原則として証明を付ける。

ガイダンス

1. 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
   複素変数、複素数値の関数を**複素関数**とよぶ。
   分野の名前としては、(複素) 関数論とか複素解析などが使われる。
   関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (後述)。
   原則として証明を付ける。
2. 質問は次のいずれかで行うこと。
   (a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。

ガイダンス

1. 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
   複素変数、複素数値の関数を**複素関数**とよぶ。
   分野の名前としては、(複素) 関数論とか複素解析などが使われる。
   関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (後述)。
   原則として証明を付ける。
2. 質問は次のいずれかで行うこと。
   (a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。
3. 急ぎの質問・相談はメールで。
   メールアドレスは、Oh-o! Meiji のシラバスの補足に記してある。

ガイダンス

1. 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
複素変数、複素数値の関数を**複素関数**とよぶ。
分野の名前としては、(複素) 関数論とか複素解析などが使われる。
関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (後述)。
原則として証明を付ける。

2. 質問は次のいずれかで行うこと。
(a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。

3. 急ぎの質問・相談はメールで。
メールアドレスは、Oh-o! Meiji のシラバスの補足に記してある。

4. 「複素関数」「複素関数演習」両方とも履修すること。1 科目だけの履修は、ルール上は出来るが、勧めない。
(宿題・期末レポートの量は変わらないので 1 科目だけの履修は損。)

ガイダンス

1. 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
複素変数、複素数値の関数を**複素関数**とよぶ。
分野の名前としては、(複素) 関数論とか複素解析などが使われる。
関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (後述)。
原則として証明を付ける。

2. 質問は次のいずれかで行うこと。
(a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。

3. 急ぎの質問・相談はメールで。
メールアドレスは、Oh-o! Meiji のシラバスの補足に記してある。

4. 「複素関数」「複素関数演習」両方とも履修すること。1 科目だけの履修は、ルール上は出来るが、勧めない。
(宿題・期末レポートの量は変わらないので 1 科目だけの履修は損。)

5. 毎週 1 つ宿題を出す。翌週の火曜 2 限までに Oh-o! Meiji 「複素関数演習」に提出すること。原則として、単一の PDF ファイル (A4 サイズ) とする。
最初のページに学年・組・番号・氏名を明記すること。大部分は添削してフィードバックするので、コメントを読むこと。

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。
  宿題の得点は〆切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。
  翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は 0 点とする。
  特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。
宿題の得点は〆切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。
翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は 0 点とする。
特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。
- 復習を推奨する。
WWW サイト `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/` で講義メモ、宿題、講義ノート [1]、演習問題 (解答付)、過去問 (解答付) 等公開
ミラーサイト `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/`

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。
  宿題の得点は〆切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。
  翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は 0 点とする。
  特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。
- 復習を推奨する。
  WWW サイト `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/` で講義メモ、宿題、講義ノート [1]、演習問題 (解答付)、過去問 (解答付) 等公開
  ミラーサイト `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/`
- 期末試験の解答に必要なことは宿題に出て来るはず。
  (過去問は公開しているが、まずは宿題の復習から始めるのを勧める。)
  市販のテキストを使って問題演習しても十分な準備ができる。

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。
  宿題の得点は〆切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。
  翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は 0 点とする。
  特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。
- 復習を推奨する。
  WWW サイト `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/` で講義メモ、宿題、講義ノート [1]、演習問題 (解答付)、過去問 (解答付) 等公開
  ミラーサイト `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/`
- 期末試験の解答に必要なことは宿題に出て来るはず。
  (過去問は公開しているが、まずは宿題の復習から始めるのを勧める。)
  市販のテキストを使って問題演習しても十分な準備ができる。
- 神保 [2] を教科書とする。
  丸善 eBook Library (`https://elib.maruzen.co.jp/elib/`) にある。
  特に

  `https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063`

(複素) 関数論とは　授業内容

(複素) 関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

(複素) 関数論とは　授業内容

(複素) 関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。

(複素) 関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。特に微分可能な複素関数を**正則関数**と呼ぶ。

(複素) 関数論とは　授業内容

(複素) 関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。特に微分可能な複素関数を**正則関数**と呼ぶ。

豊富な内容があるが、この講義の目標はその入門部分で、具体的には

Cauchy の積分定理、Cauchy の積分公式、留数、留数定理による定積分計算

どれもほぼ Cauchy (1789–1857) がやったこと。

(複素) 関数論とは　授業内容

(複素) 関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。特に微分可能な複素関数を**正則関数**と呼ぶ。

豊富な内容があるが、この講義の目標はその入門部分で、具体的には

Cauchy の積分定理、Cauchy の積分公式、留数、留数定理による定積分計算

どれもほぼ Cauchy (1789–1857) がやったこと。

Cauchy の積分定理

複素平面内の閉曲線 C が囲む領域と C 上で f が正則ならば

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Cauchy の積分公式

複素平面内の単純閉曲線 C が囲む領域と C 上で f が正則ならば

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad (z \text{ は } C \text{ の囲む領域内の任意の点}).$$

(複素) 関数論とは　授業内容

正則関数の冪級数展開可能性

c の近傍で**正則**な関数 f は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \left(= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right)$$

と**冪級数展開** (Taylor 展開) 出来る。ゆえに f は無限回微分可能である。

(複素) 関数論とは　授業内容

正則関数の冪級数展開可能性

c の近傍で**正則**な関数 f は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \left(= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right)$$

と**冪級数展開** (Taylor 展開) 出来る。ゆえに f は無限回微分可能である。

留数定理による定積分計算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{(z^2+1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

(微積分で $\tan^{-1}$ を使っても計算できるけれど… $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ のような原始関数を求めるのが面倒なものも同様に計算できる。)

正則関数の冪級数展開可能性

c の近傍で**正則**な関数 f は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta \quad \left(= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\right)$$

と**冪級数展開** (Taylor 展開) 出来る。ゆえに f は無限回微分可能である。

留数定理による定積分計算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{1}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi.$$

(微積分で $\tan^{-1}$ を使っても計算できるけれど… $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ のような原始関数を求めるのが面倒なものも同様に計算できる。) 不思議の理解に時間がかかる。

歴史

なぜ複素数を使う必要があるのか？

歴史　Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。$x^3 + px + q = 0$ に対して

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{1}$$

は解となる (**Cardano の公式**)。

歴史　Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。$x^3 + px + q = 0$ に対して

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{1}$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta := -\left(27q^2 + 4p^3\right)$$

歴史　Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。$x^3 + px + q = 0$ に対して

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{1}$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta := -\left(27q^2 + 4p^3\right) = -108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right] \quad (108 = 2^2 \cdot 3^3).$$

歴史　Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。$x^3 + px + q = 0$ に対して

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{1}$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta := -\left(27q^2 + 4p^3\right) = -108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right] \quad (108 = 2^2 \cdot 3^3).$$

これを用いると、(1) は次のように書き換えられる:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}. \tag{2}$$

歴史　Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。$x^3 + px + q = 0$ に対して

$$(1) \qquad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta := -\left(27q^2 + 4p^3\right) = -108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right] \quad (108 = 2^2 \cdot 3^3).$$

これを用いると、(1) は次のように書き換えられる:

$$(2) \qquad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

Δ は判別式の名にふさわしく、次のことが成り立つ (微積分で容易に証明可能)。

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相異なる 3 実根を持つ。
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 重根を持ち、かつすべての根は実数である。
- $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 1 つの実根と、互いに複素共役な虚根を持つ。

歴史　Cardano (1501–1576, イタリア) 続き

$\Delta \le 0$ のときは、$\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は非負の実数であり、(2) の x は、２つの実数の 3 乗根の和であるから、実数解を与える。特に $\Delta < 0$ のときは、これが唯一の実数解である。

歴史　Cardano (1501–1576, イタリア) 続き

$\Delta \le 0$ のときは、$\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は非負の実数であり、(2) の x は、2つの実数の3乗根の和であるから、実数解を与える。特に $\Delta < 0$ のときは、これが唯一の実数解である。

3次方程式なので、他に2つの根があるはず。Cardano は書かなかったけれど、

$$\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}},\qquad \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

ただし $\omega := \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

歴史 Cardano (1501–1576, イタリア) 続き

$\Delta \le 0$ のときは、$\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は非負の実数であり、(2) の x は、2つの実数の3乗根の和であるから、実数解を与える。特に $\Delta < 0$ のときは、これが唯一の実数解である。

3次方程式なので、他に2つの根があるはず。Cardano は書かなかったけれど、

$$\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \qquad \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

ただし $\omega := \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

問題は $\Delta > 0$ の場合 (相異なる3実根を持つ場合)。このとき、$\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は純虚数であり、(2) の x は、2つの虚数の3乗根の和である。

Cardano は著書の中で、$\Delta > 0$ となる例は取り上げなかったが、虚数の必要性に気づいていたらしく、負数の平方根については「和が 10、積 40 がである2数を求めよ (答は $t^2-10t+40=0$ を解いて $5\pm\sqrt{15}\,i$)」という有名な問題を残している。

歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも解を表す、と述べた。

歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも解を表す、と述べた。

例えば
$$x^3 = 15x + 4.$$
この解は $x = 4$, $x = -2 \pm \sqrt{3}$ (高校数学で解ける)。

歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも解を表す、と述べた。

例えば

$$x^3 = 15x + 4.$$

この解は $x = 4$, $x = -2 \pm \sqrt{3}$ (高校数学で解ける)。

この方程式に対して、Cardano の公式 (1) は

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

という数を与えるが、Bombelli は虚数に関する計算法を導入し、この x は 4 に等しい、と論じた。

歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも解を表す、と述べた。

例えば

$$x^3 = 15x + 4.$$

この解は $x = 4$, $x = -2 \pm \sqrt{3}$ (高校数学で解ける)。

この方程式に対して、Cardano の公式 (1) は

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

という数を与えるが、Bombelli は虚数に関する計算法を導入し、この x は 4 に等しい、と論じた。

実は、$\Delta > 0$ (相異なる 3 実数解) のとき、“虚数を使わずに解を表す公式” は存在しないことが分かった。

歴史

- **de Moivre (1667–1754)**
  $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ (1730 年)
- **Euler (1707–1783)**
  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (1748 年), $e^{i\pi} = -1$
- **Gauss (1777–1855)**
  複素平面、代数学の基本定理、実は他にも色々知っていたが発表せず。
- **Cauchy (1789–1857)**
  定積分計算のために、ほぼこの講義の内容を考え出した。
- **19 世紀は関数論の世紀 (?)**
  Abel (1802–1829), Jacobi (1804–1851), Weierstrass (1815–1897), Riemann (1826–1866) など。楕円関数、代数関数、Riemann 面
- **量子力学**
  量子力学には複素数が本質的に必要である。

雑誌数理科学」2022 年 8 月号は「複素解析の探求」特集。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf
(2014～).

じんぼう
[2] 神保道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では
https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063
でアクセスできる.