

# 複素関数・同演習 第1回

～ガイダンス, 複素関数の定義と基本的な性質～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022年9月20日

# 目次

- ① 自己紹介・ガイダンス
  - 自己紹介
  - ガイダンス
- ② (複素)関数論とは
  - 授業内容
  - 歴史
- ③ 参考文献

# 自己紹介

- かつらだ まさし 桂田 祐史
- 専門は数値解析 (数値計算法の数理の関数解析的研究)
- 研究室は高層棟 910 号室 (質問は長時間なら Zoom)
- 質問・相談はメールでも可  
(メールアドレスは katurada あつと meiji どつと ac ドット jp)

# ガイダンス

- ① 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。  
複素変数、複素数値の関数を**複素関数**とよぶ。  
分野の名前としては、(複素)関数論とか**複素解析**などが使われる。  
関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場(後述)。  
**原則として証明を付ける。**
- ② 質問は次のいずれかで行うこと。  
(a) 直接会って質問する(授業直後、研究室訪問)。(b) メールで尋ねる。
- ③ 急ぎの質問・相談はメールで。  
メールアドレスは、Oh-o! Meiji のシラバスの補足に記してある。
- ④ 「複素関数」「複素関数演習」両方とも履修すること。1科目だけの履修は、ルール上は出来るが、勧めない。  
(宿題・期末レポートの量は変わらないので1科目だけの履修は損。)
- ⑤ 毎週1つ宿題を出す。翌週の火曜2限までに Oh-o! Meiji 「複素関数**演習**」に提出すること。原則として、単一の PDF ファイル (A4 サイズ) とする。最初のページに学年・組・番号・氏名を明記すること。大部分は添削してフィードバックするので、コメントを読むこと。

## ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。宿題の得点はメ切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は 0 点とする。特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。
- 復習を推奨する。  
WWW サイト <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/> で講義メモ、宿題、講義ノート [1]、演習問題 (解答付)、過去問 (解答付) 等公開  
ミラーサイト <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>
- 期末試験の解答に必要なことは宿題に出て来るはず。(過去問は公開しているが、まずは宿題の復習から始めるのを勧める。) 市販のテキストを使って問題演習しても十分な準備ができる。
- 神保 [2] を教科書とする。  
丸善 eBook Library (<https://elib.maruzen.co.jp/elib/>) にある。  
特に

<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063>

# (複素)関数論とは 授業内容

(複素)関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

**複素関数**とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ( $w = f(z)$  の  $z, w$  が複素数ということ)。特に微分可能な複素関数を**正則関数**と呼ぶ。

豊富な内容があるが、この講義の目標はその入門部分で、具体的には

**Cauchy の積分定理**、**Cauchy の積分公式**、**留数**、**留数定理**による定積分計算  
どれもほぼ Cauchy (1789–1857) がやったこと。

## Cauchy の積分定理

複素平面内の**閉曲線**  $C$  が囲む領域と  $C$  上で  $f$  が正則ならば

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

## Cauchy の積分公式

複素平面内の単純閉曲線  $C$  が囲む領域と  $C$  上で  $f$  が正則ならば

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \text{ は } C \text{ の囲む領域内の任意の点}).$$

## 正則関数の冪級数展開可能性

$c$  の近傍で**正則**な関数  $f$  は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n,$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \left( = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right)$$

と**冪級数展開** (Taylor 展開) 出来る。ゆえに  $f$  は無限回微分可能である。

## 留数定理による定積分計算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \frac{1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \pi.$$

(微積分で  $\tan^{-1}$  を使っても計算できるけれど...  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$  のような原始関数を求めるのが面倒なものも同様に計算できる。) **不思議の理解に時間がかかる。**

なぜ複素数を使う必要があるのか？

# 歴史 Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。  $x^3 + px + q = 0$  に対して

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも **判別式** があり、今の場合は

$$\Delta := -(27q^2 + 4p^3) = -108 \left[ \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right] \quad (108 = 2^2 \cdot 3^3).$$

これを用いると、(1) は次のように書き換えられる:

$$(2) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

$\Delta$  は判別式の名にふさわしく、次のことが成り立つ (微積分で容易に証明可能)。

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow$  相異なる 3 実根を持つ。
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow$  重根を持ち、かつすべての根は実数である。
- $\Delta < 0 \Leftrightarrow$  1 つの実根と、互いに複素共役な虚根を持つ。

# 歴史 Cardano (1501–1576, イタリア) 続き

$\Delta \leq 0$  のときは、 $\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$  は非負の実数であり、(2) の  $x$  は、2つの実数の3乗根の和であるから、**実数解**を与える。特に  $\Delta < 0$  のときは、これが唯一の実数解である。

3次方程式なので、他に2つの根があるはず。Cardano は書かなかったけれど、

$$\omega^3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

ただし  $\omega := \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ .

問題は  $\Delta > 0$  の場合 (相異なる3実根を持つ場合)。このとき、 $\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$  は純虚数であり、(2) の  $x$  は、2つの虚数の3乗根の和である。

Cardano は著書の中で、 $\Delta > 0$  となる例は取り上げなかったが、虚数の必要性に気づいていたらしく、負数の平方根については「和が10、積40がである2数を求めよ (答は  $t^2 - 10t + 40 = 0$  を解いて  $5 \pm \sqrt{15}i$ )」という有名な問題を残している。

# 歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は  $\Delta > 0$  のときも解を表す、と述べた。

例えば

$$x^3 = 15x + 4.$$

この解は  $x = 4$ ,  $x = -2 \pm \sqrt{3}$  (高校数学で解ける)。

この方程式に対して、Cardano の公式 (1) は

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

という数を与えるが、Bombelli は虚数に関する計算法を導入し、この  $x$  は 4 に等しい、と論じた。

実は、 $\Delta > 0$  (相異なる 3 実数解) のとき、“虚数を使わずに解を表す公式” は存在しないことが分かった。

- **de Moivre (1667–1754)**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (1730 \text{ 年})$$

- **Euler (1707–1783)**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1748 \text{ 年}), \quad e^{i\pi} = -1$$

- **Gauss (1777–1855)**

複素平面、代数学の基本定理、実は他にも色々知っていたが発表せず。

- **Cauchy (1789–1857)**

定積分計算のために、ほぼこの講義の内容を考え出した。

- **19 世紀は関数論の世紀 (?)**

Abel (1802–1829), Jacobi (1804–1851), Weierstrass (1815–1897), Riemann (1826–1866) など。楕円関数、代数関数、Riemann 面

- **量子力学**

量子力学には複素数が本質的に必要である。

雑誌「数理科学」2022 年 8 月号は「複素解析の探求」特集。

# 参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート。  
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf>  
(2014～).
- [2] じんぼう 神保道夫：複素関数入門，現代数学への入門，岩波書店 (2003)，丸善 eBook  
では  
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063>  
でアクセスできる.