複素関数・同演習 第2回

〜複素数の定義、複素平面、平方根、共役複素数、絶対値 〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022年9月21日

目次

本日の内容・連絡事項

- 大まかに講義ノート [1] §1.7 までの内容。
- 来週まで、複素数の基本的な演算の話が続く。数学 III で学んだ内容も多い。退屈にならないように動機付け。

  Cardano による 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の解の公式を見ると、複素数を考える必要性は分かりやすい。
  - p, q が実数で $\Delta > 0$ のときは？→ 虚数の 3 乗根が必要になる (次回解説)。
  - p, q が虚数のときは？ →虚数の平方根が必要になる (今回解説)。
- 前回宿題 1 を出してある。〆切 9 月 27 日 13:30.

複素数は高校数学で一応は教わったが、教科書にきちんとした定義が書いてあるとは言いにくい。でも、まずはそれをおさらいしてみよう。

複素数は高校数学で一応は教わったが、教科書にきちんとした定義が書いてあるとは言いにくい。でも、まずはそれをおさらいしてみよう。

$i^2 = -1$ となる数 (**虚数単位**, the imaginary unit) i を導入し、$a + bi$ (a と b は実数) と書ける数を**複素数** (a complex number) という。複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。

手短に言うと、i^2 が出て来たら -1 で置き換える以外は、i を変数とする文字式と同じように計算する。

1 複素数の定義とその性質　1.1 高校で習ったこと $+\alpha$

複素数は高校数学で一応は教わったが、教科書にきちんとした定義が書いてあるとは言いにくい。でも、まずはそれをおさらいしてみよう。

$i^2 = -1$ となる数 (**虚数単位**, the imaginary unit) i を導入し、$a + bi$ (a と b は実数) と書ける数を**複素数** (a complex number) という。複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。

手短に言うと、i^2 が出て来たら -1 で置き換える以外は、i を変数とする文字式と同じように計算する。

具体的には

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

で和と積を定める (定められる？)。

1 複素数の定義とその性質　1.1 高校で習ったこと $+\alpha$

複素数は高校数学で一応は教わったが、教科書にきちんとした定義が書いてあるとは言いにくい。でも、まずはそれをおさらいしてみよう。

$i^2 = -1$ となる数 (**虚数単位**, the imaginary unit) i を導入し、$a + bi$ (a と b は実数) と書ける数を**複素数** (a complex number) という。複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。

手短に言うと、i^2 が出て来たら -1 で置き換える以外は、i を変数とする文字式と同じように計算する。

具体的には

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

で和と積を定める (定められる？)。

実数でない複素数のことを**虚数** (an imaginary number) と呼ぶ。つまり虚数とは、$a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) と書ける数のことをいう。

複素数と虚数を混同する人が多い。注意しましょう。

$a=0$ のとき、つまり bi を**純虚数** (a purely imaginary number) と呼ぶことがある。この定義によると、$0=0+0i$ も純虚数であり、「0 は虚数ではないが純虚数である」ということになる。(個人的には気持ちが悪いので、この言葉は使わないことにしている。本を読むとたまに出て来るので、一応分かった方が良い。)

$a=0$ のとき、つまり bi を**純虚数** (a purely imaginary number) と呼ぶことがある。この定義によると、$0=0+0i$ も純虚数であり、「0 は虚数ではないが純虚数である」ということになる。(個人的には気持ちが悪いので、この言葉は使わないことにしている。本を読むとたまに出て来るので、一応分かった方が良い。)

$a+i0$ を a と書くので、実数と見分けがつかない。「同一視」していることになる (つまり「実数は複素数」)。二つの実数を実数として足したりかけたりするのと、複素数として足したりかけたりするのと、結果は同じになるので、矛盾は生じない。

$a=0$ のとき、つまり bi を**純虚数** (a purely imaginary number) と呼ぶことがある。この定義によると、$0=0+0i$ も純虚数であり、「0 は虚数ではないが純虚数である」ということになる。(個人的には気持ちが悪いので、この言葉は使わないことにしている。本を読むとたまに出て来るので、一応分かった方が良い。)

$a+i0$ を a と書くので、実数と見分けがつかない。「同一視」していることになる (つまり「実数は複素数」)。二つの実数を実数として足したりかけたりするのと、複素数として足したりかけたりするのと、結果は同じになるので、矛盾は生じない。

以上が高校数学での複素数であるが、かなりいい加減で、定義とは言いにくい (書いていても気持ちが悪い)。

きちんとした定義は、次項 (§1.2) で与えることにする。

虚数単位の記号　虚数単位は純粋数学の文献では i と書かれるが、電流を i と書きたい分野では j と書かれたりする。JIS (日本工業規格) では、字体を立体にして i あるいは j と書くことになっている (そうである)。

プログラミング言語の Mathematica では、虚数単位を `I` で表す。また MATLAB では `i`, `j` のどちらも虚数単位を表し、`i` や `j` を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も `1i` や `1j` は虚数単位を表す。Python では、`j` で虚数単位を表し、`j` を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も `1j` は虚数単位を表す。

虚数単位の記号 虚数単位は純粋数学の文献では i と書かれるが、電流を i と書きたい分野では j と書かれたりする。JIS (日本工業規格) では、字体を立体にして i あるいは j と書くことになっている (そうである)。

プログラミング言語の Mathematica では、虚数単位を `I` で表す。また MATLAB では i, j のどちらも虚数単位を表し、`i` や `j` を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も `1i` や `1j` は虚数単位を表す。Python では、`j` で虚数単位を表し、`j` を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も `1j` は虚数単位を表す。

複素変数を表す文字 複素数の変数は、z, w, ζ などの文字で表されることが多い (ζ はギリシャ文字で (大文字は Z)、ゼータ、またはツェータと読む)。

1.1 高校で習ったこと $+\alpha$　実部・虚部

(高校の数学 III では、複素数のことをかなり詳しく説明してあるが、なぜか実部、虚部という言葉が出て来ない。不思議だ。)

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、x, y をそれぞれ z の**実部** (the real part of z)、**虚部** (the imaginary part of z) と呼び、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ で表す:

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

1.1 高校で習ったこと $+\alpha$　実部・虚部

(高校の数学 III では、複素数のことをかなり詳しく説明してあるが、なぜか実部、虚部という言葉が出て来ない。不思議だ。)

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、x, y をそれぞれ z の**実部** (the real part of z)、**虚部** (the imaginary part of z) と呼び、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ で表す:

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

(w の実部・虚部には u, v が、ζ の実部・虚部には ξ, η が使われることが多い: $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$)

1.1 高校で習ったこと $+\alpha$　実部・虚部

(高校の数学 III では、複素数のことをかなり詳しく説明してあるが、なぜか実部、虚部という言葉が出て来ない。不思議だ。)

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、x, y をそれぞれ z の**実部** (the real part of z)、**虚部** (the imaginary part of z) と呼び、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ で表す:

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

(w の実部・虚部には u, v が、ζ の実部・虚部には ξ, η が使われることが多い: $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$)

例 2.1

$z = 1 - 2i$ のとき、$\mathrm{Re}\, z = 1$, $\mathrm{Im}\, z = -2$. 次のようにも書ける。

$$\mathrm{Re}(1 - 2i) = 1, \quad \mathrm{Im}(1 - 2i) = -2.$$

(注意　$\mathrm{Im}(1 - 2i) = -2i$ ではない。)

加法の単位元は $0=0+0i$，乗法の単位元は $1=1+0i$ である。

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad z+0=0+z=z,\quad (\forall z\in\mathbb{C})\quad z\cdot 1=1\cdot z=z.$$

1.1 高校で習ったこと $+\alpha$　加法・乗法の単位元&逆元

加法の単位元は $0 = 0 + 0i$，乗法の単位元は $1 = 1 + 0i$ である。

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z + 0 = 0 + z = z, \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。

1.1 高校で習ったこと $+\alpha$ 加法・乗法の単位元&逆元

加法の単位元は $0 = 0 + 0i$，乗法の単位元は $1 = 1 + 0i$ である。

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z + 0 = 0 + z = z, \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。
$z = x + iy \neq 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の、乗法に関する逆元 w を求めよう。

加法の単位元は $0=0+0i$，乗法の単位元は $1=1+0i$ である。

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad z+0=0+z=z,\qquad (\forall z\in\mathbb{C})\quad z\cdot 1=1\cdot z=z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。
$z=x+iy\neq 0$ $(x,y\in\mathbb{R})$ の、乗法に関する逆元 w を求めよう。
w が z の乗法に関する逆元とは

$$zw=1$$

を満たすことをいう。

加法の単位元は $0=0+0i$，乗法の単位元は $1=1+0i$ である。

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad z+0=0+z=z,\quad (\forall z\in\mathbb{C})\quad z\cdot 1=1\cdot z=z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。
$z=x+iy\neq 0$ $(x,y\in\mathbb{R})$ の、乗法に関する逆元 w を求めよう。
w が z の乗法に関する逆元とは

$$zw=1$$

を満たすことをいう。$z=0$ の逆元は存在しない。$z\neq 0$ の逆元を求めよう。

加法の単位元は $0=0+0i$, 乗法の単位元は $1=1+0i$ である。

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad z+0=0+z=z,\quad (\forall z\in\mathbb{C})\quad z\cdot 1=1\cdot z=z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。
$z=x+iy\neq 0$ $(x,y\in\mathbb{R})$ の、乗法に関する逆元 w を求めよう。
w が z の乗法に関する逆元とは

$$zw=1$$

を満たすことをいう。$z=0$ の逆元は存在しない。$z\neq 0$ の逆元を求めよう。
$w=u+iv$ $(u,v\in\mathbb{R})$ とおくと、$(x+iy)(u+iv)=1$ は

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} xu-yv=1\\ xv+yu=0\end{cases}$$

という連立 1 次方程式と同値である。

加法の単位元は $0=0+0i$, 乗法の単位元は $1=1+0i$ である。

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad z+0=0+z=z,\quad (\forall z\in\mathbb{C})\quad z\cdot 1=1\cdot z=z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。
$z=x+iy\neq 0$ $(x,y\in\mathbb{R})$ の、乗法に関する逆元 w を求めよう。
w が z の乗法に関する逆元とは

$$zw=1$$

を満たすことをいう。$z=0$ の逆元は存在しない。$z\neq 0$ の逆元を求めよう。
$w=u+iv$ $(u,v\in\mathbb{R})$ とおくと、$(x+iy)(u+iv)=1$ は

$$(1)\qquad \begin{cases} xu-yv=1\\ xv+yu=0\end{cases}$$

という連立 1 次方程式と同値である。この方程式は、$z\neq 0$ のときは一意的な解

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

を持つ。ゆえに $z\neq 0$ の逆元 w は一意的に存在して

$$w=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

問　このことを確かめよ。

問　このことを確かめよ。

解答　(1) は

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書き換えられる。$z \neq 0$ であれば $x^2 + y^2 > 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$w = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-iy}{x^2 + y^2}. \qquad \square$$

問　このことを確かめよ。

解答　(1) は

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書き換えられる。$z \neq 0$ であれば $x^2+y^2>0$ であるから

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$w=u+iv=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-iy}{x^2+y^2}. \qquad \square$$

1 行でまとめると

$$(x,y\in\mathbb{R})\wedge x+iy\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

問　高校生のとき

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x-yi}{x^2-x\cdot yi+yi\cdot x-y^2i^2}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

のような計算をしたことがあるだろう。これを $x+yi$ の逆元が $\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ であることの証明として採用できるだろうか？

問　高校生のとき

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x-yi}{x^2-x\cdot yi+yi\cdot x-y^2i^2}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

のような計算をしたことがあるだろう。これを $x+yi$ の逆元が $\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ であることの証明として採用できるだろうか？

答　このままでは採用できない。$x+yi$ の逆元の存在と一意性が証明できていない段階では、$\dfrac{1}{x+yi}$ はナンセンスな式であり、上の計算で分かるのは、「複素数 a, b, c $(b,c\neq 0)$ について $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$」が成り立ち、またもし $x+yi$ の逆元が一意的に存在するならば、それは $\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ である、ということくらい。実際に逆元であることを確認する、例えば

$$(x+yi)\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}i\right)=\left(x\frac{x}{x^2+y^2}-y\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+\left(x\frac{-y}{x^2+y^2}+y\frac{x}{x^2+y^2}\right)i$$
$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+0\cdot i=1$$

のような計算をすることが必要である。□

高校数学での定義はいい加減である。ちゃんと定義する方法は色々ある。

高校数学での定義はいい加減である。ちゃんと定義する方法は色々ある。

1. **Hamilton の方法**　$\mathbb{R}^2$ に加法・乗法を

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

で定めると、$(\mathbb{R}^2;+,\cdot)$ は**可換体**であり (これを証明するには、次のスライドで紹介する可換体の公理を満たすことをチェックすれば良い)、

- 加法についての単位元は $(0,0)$. (x,y) の逆元は $-(x,y)=(-x,-y)$.
- 乗法についての単位元は $(1,0)$. (x,y) の逆元は

$$(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

が成り立つ。

　この $\mathbb{R}^2$ のことを $\mathbb{C}$ と表す。

普通の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の拡張ととらえると分かりやすいかもしれない。
(a,b) を $a+bi$ と書くことにする。

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群, 加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群, 加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

1. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
2. $(\exists 0_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$
3. $(\forall a \in K)\ (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$
4. $(\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$
5. $(\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$
6. $(\exists 1_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a 1_K = 1_K a = a$
7. $(\forall a \in K \setminus \{0_K\})\ (\exists a'' \in K) \quad a a'' = a'' a = 1_K$
8. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)c = ac + bc, \quad a(b+c) = ab + ac$
9. $(\forall a, b \in K) \quad ab = ba$

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群, 加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

1. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
2. $(\exists 0_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$
3. $(\forall a \in K)\ (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$
4. $(\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$
5. $(\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$
6. $(\exists 1_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a1_K = 1_K a = a$
7. $(\forall a \in K \setminus \{0_K\})\ (\exists a'' \in K) \quad aa'' = a''a = 1_K$
8. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)c = ac + bc, \quad a(b+c) = ab + ac$
9. $(\forall a, b \in K) \quad ab = ba$

$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はこの公理を満たす。

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群, 加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

1. $(\forall a,b,c \in K) \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
2. $(\exists 0_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a+0_K = 0_K + a = a$
3. $(\forall a \in K)\ (\exists a' \in K) \quad a+a' = a'+a = 0_K$
4. $(\forall a,b \in K) \quad a+b = b+a$
5. $(\forall a,b,c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$
6. $(\exists 1_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a1_K = 1_K a = a$
7. $(\forall a \in K \setminus \{0_K\})\ (\exists a'' \in K) \quad aa'' = a''a = 1_K$
8. $(\forall a,b,c \in K) \quad (a+b)c = ac+bc, \quad a(b+c) = ab+ac$
9. $(\forall a,b \in K) \quad ab = ba$

$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はこの公理を満たす。
$K = \mathbb{H}$ (後で紹介する四元数体) は (1)–(8) を満たすが、(9) は満たさない。

2. 行列を用いる方法　2 次正方行列全体 $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathbb{C}$ を

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

で定めると、行列の通常の和と積を演算として、$\mathbb{C}$ は可換体になる。

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、それぞれ 1, i に対応し、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ, \quad J^2 = -I.$$

(後で出て来る $e^{i\theta}$ に対応する行列は、$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (回転の行列) になる。)

(もしも可換環とそのイデアルについて知識 (代数学の常識) があれば)

3. 実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル (x^2+1) で割った剰余環を $\mathbb{C}$ とする:
$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1).$$
(x^2+1) は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{C}$ は可換体となる。

(もしも可換環とそのイデアルについて知識 (代数学の常識) があれば)

3. 実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル (x^2+1) で割った剰余環を $\mathbb{C}$ とする:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1).$$

(x^2+1) は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{C}$ は可換体となる。
代数学知らないと難しい？

1.2 複素数の定義

3 つの方法の紹介

(もしも可換環とそのイデアルについて知識 (代数学の常識) があれば)

3. 実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル (x^2+1) で割った剰余環を $\mathbb{C}$ とする:
$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1).$$
(x^2+1) は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{C}$ は可換体となる。
代数学知らないと難しい?…… 一方これは高校数学流の厳密化とも言える。

(もしも可換環とそのイデアルについて知識 (代数学の常識) があれば)

3. 実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル (x^2+1) で割った剰余環を $\mathbb{C}$ とする:
$$\mathbb{C}=\mathbb{R}[x]/(x^2+1).$$
(x^2+1) は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{C}$ は可換体となる。
代数学知らないと難しい?…… 一方これは高校数学流の厳密化とも言える。

もう少し噛み砕いた説明が読みたければ、飯高 [2] を見よ (ネットでアクセス可能)。

定義 2.2 (複素数の平方根)

複素数 c に対して、$z^2 = c$ を満たす複素数 $z \in \mathbb{C}$ を c の**平方根** (square root of c) とよぶ。

注意: 平方根と $\sqrt{\quad}$ の区別が重要。$\mathbb{R}$ では簡単だった (説明できますか？この後のスライドで復習する。)。

$\mathbb{C}$ では？$\sqrt{c}$ という記号については後回し。まずは平方根。

1.5.1 定義　平方根の存在

定理 2.3 (複素数の平方根)

任意の複素数 c に対して、c の平方根 z が存在する。$c = 0$ のときは $z = 0$ のみ、$c \neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。

1.5.1 定義　平方根の存在

定理 2.3 (複素数の平方根)

任意の複素数 c に対して、c の平方根 z が存在する。$c=0$ のときは $z=0$ のみ、$c\neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。$c=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とするとき

$$z=\begin{cases}\pm\sqrt{a} & (a\geq 0,\ b=0)\\ \pm\sqrt{-a}i & (a<0,\ b=0)\\ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\ i\right) & (b\neq 0).\end{cases} \tag{2}$$

1.5.1 定義　平方根の存在

定理 2.3 (複素数の平方根)

　任意の複素数 c に対して、c の平方根 z が存在する。$c=0$ のときは $z=0$ のみ、$c\neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。$c=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とするとき

$$
(2)\qquad z=\begin{cases}\pm\sqrt{a} & (a\geq 0,\ b=0)\\ \pm\sqrt{-a}\,i & (a<0,\ b=0)\\ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\,i\right) & (b\neq 0).\end{cases}
$$

(ここに現れた $\sqrt{}$ は、非負実数に対する非負の平方根である。)

1.5.1 定義　平方根の存在

定理 2.3 (複素数の平方根)

任意の複素数 c に対して、c の平方根 z が存在する。$c=0$ のときは $z=0$ のみ、$c\neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。$c=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とするとき

$$
(2)\qquad z=\begin{cases}\pm\sqrt{a} & (a\geq 0,\ b=0)\\ \pm\sqrt{-a}\,i & (a<0,\ b=0)\\ \pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\dfrac{b}{|b|}\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\,i\right) & (b\neq 0).\end{cases}
$$

(ここに現れた $\sqrt{\quad}$ は、非負実数に対する非負の平方根である。)

この式は覚えないで (間違える可能性が高いから)、求め方を覚えて、必要なときに求められるようにしておくのを勧める。

1.5.2 平方根の求め方をマスター

例 2.4

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。

例 2.4

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。
(解答)
$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -1.$$

例 2.4

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。

(解答)

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \land 2xy = -1.$$

$2xy = -1$ より $y = -\frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

例 2.4

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。
(解答)
$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \land 2xy = -1.$$

$2xy = -1$ より $y = -\frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると (2 次方程式を解いて)

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

例 2.4

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。
(解答)
$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -1.$$

$2xy = -1$ より $y = -\frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると (2 次方程式を解いて)

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

ゆえに

$$x = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}.$$

1.5.2 平方根の求め方をマスター (続き)

例 2.4 (つづき)

これから

$$y = -\frac{1}{2x} = \mp\frac{2}{2\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \mp\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}.$$

ただし x, y を表す式の複号はすべて同順である。ゆえに

$$z = x + yi = \pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}i\right).$$

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c \geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c \geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。
3. $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、$\sqrt{c} = 0$.

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c\in\mathbb{R}$ に対して $x^2=c$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ が存在するためには、$c\geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c\geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x\geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。
3. $c=0$ であれば c の平方根は 0 のみで、$\sqrt{c}=0$.
4. $c>0$ であれば c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ の 2 つ。

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c \geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。
3. $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、$\sqrt{c} = 0$.
4. $c > 0$ であれば c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ の 2 つ。
5. 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して
$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}.$$

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c \geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。
3. $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、$\sqrt{c} = 0$.
4. $c > 0$ であれば c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ の 2 つ。
5. 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}.$$

高校では、$c < 0$ に対して、$\sqrt{c} := \sqrt{-c}\, i$ と定義した (例えば $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$). この講義では、この定義は採用しないことにする。

中学校で学んだ $\sqrt{\text{非負実数}}$ という記号は使い続けるが、
高校で学んだ $\sqrt{\text{負数}}$ という記号は断りなしに使わない。

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$ 演習

1. 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ であることを示せ。
2. 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}\, i$ と定義した場合、$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ とは限らないことを示せ。

(解答はこのスライド PDF の最後に置いておく。)

宿題1について (提出方法の注意)

宿題 1 を出します。課題文を書いた PDF や、締め切り、提出方法等は Oh-o! Meiji の「レポート」を見て下さい。

注意事項

- 普通の数式として無理なく読み取れる, A4 サイズの PDF, の 2 つが条件です。LaTeX や Word で作成した PDF, 紙に手書きしたものをスキャンした PDF、なんでも受け付けます。(スマホで撮った画像ファイルも一応受け付けますが、なるべくスキャン・アプリで作成した PDF にして下さい)。Word 等で数式の入力方法がよく分からない場合は、無理をせず「手書きしてスキャン」を選んで下さい。
- 出来る限り、ファイル 1 つだけで提出して下さい。
  複数ページになった場合に、1 ページずつの複数ファイルを送って来る人がいますが、添削が意外と面倒です。複数の PDF を 1 つにまとめることは Mac のプレビューで簡単に出来るので、そうしてから提出して下さい。
- レポートの 1 ページ目の上部に学年・組・番号・氏名を記して下さい。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf
(2014〜).

[2] 飯高茂：大学生にきちんと虚数を教えよう — コーシーの定理を教える前に — (第４９回公私立数学系学科懇談会の活動報告), 数学通信, Vol. 15, No. 1, pp. 46–53 (2010 年 3 月 26 日),
http://mathsoc.jp/publication/tushin/1501/1501iitaka.pdf.