

複素関数・同演習 第2回

～複素数の定義、複素平面、平方根、共役複素数、絶対値～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022年9月21日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 複素数の定義とその性質
 - 高校で習ったこと $+\alpha$
 - 複素数の定義
 - 3つの方法の紹介
 - 復習 可換体の公理
 - 平方根
 - 定義
 - 平方根の求め方をマスター
 - 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$
- 3 宿題1について
- 4 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 大まかに講義ノート [1] §1.7 までの内容。
- 来週まで、複素数の基本的な演算の話が続く。数学 III で学んだ内容も多い。退屈にならないように動機付け。

Cardano による 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の解の公式を見ると、複素数を考える必要性は分かりやすい。

- p, q が実数で $\Delta > 0$ のときは？ → **虚数の 3 乗根**が必要になる (次回解説)。
- p, q が虚数のときは？ → **虚数の平方根**が必要になる (今回解説)。
- 前回宿題 1 を出してある。✂切 9 月 27 日 13:30.

1 複素数の定義とその性質 1.1 高校で習ったこと $+a$

複素数は高校数学で一応は教わったが、教科書にきちんとした定義が書いてあるとは言いにくい。でも、まずはそれをおさらいしてみよう。

$i^2 = -1$ となる数 (**虚数単位**, the imaginary unit) i を導入し、 $a + bi$ (a と b は実数) と書ける数を **複素数** (a complex number) という。複素数全体の集合を \mathbb{C} で表す。

手短かに言うと、 i^2 が出て来たら -1 で置き換える以外は、 i を変数とする文字式と同じように計算する。

具体的には

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

で和と積を定める (定められる?)。

実数でない複素数のことを **虚数** (an imaginary number) と呼ぶ。つまり虚数とは、 $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) と書ける数のことをいう。

複素数と虚数を混同する人が多い。注意しましょう。

1.1 高校で習ったこと + α 新しい言葉と記号、その他

$a = 0$ のとき、つまり bi を**純虚数** (a purely imaginary number) と呼ぶことがある。この定義によると、 $0 = 0 + 0i$ も純虚数であり、「**0 は虚数ではないが純虚数である**」ということになる。(個人的には気持ちが悪いので、この言葉は使わないことにしている。本を読むとたまに出て来るので、一応分かった方がよい。)

$a + i0$ を a と書くので、実数と見分けがつかない。「同一視」していることになる(つまり「**実数は複素数**」)。二つの実数を実数として足したりかけたりするのと、複素数として足したりかけたりするのと、結果は同じになるので、矛盾は生じない。

以上が高校数学での複素数であるが、かなりいい加減で、定義とは言いにくい(書いていても気持ちが悪い)。

きちんとした定義は、次項 (§1.2) で与えることにする。

1.1 高校で習ったこと + α 虚数単位の記号、複素変数を表す文字

虚数単位の記号 虚数単位は純粋数学の文献では i と書かれるが、電流を i と書きたい分野では j と書かれたりする。JIS (日本工業規格) では、字体を立体にして i あるいは j と書くことになっている (そうである)。

プログラミング言語の Mathematica では、虚数単位を I で表す。また MATLAB では i, j のどちらも虚数単位を表し、 i や j を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も $1i$ や $1j$ は虚数単位を表す。Python では、 j で虚数単位を表し、 j を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も $1j$ は虚数単位を表す。

複素変数を表す文字 複素数の変数は、 z, w, ζ などの文字で表されることが多い (ζ はギリシャ文字で (大文字は Z)、ゼータ、またはツェータと読む)。

1.1 高校で習ったこと + α 実部・虚部

(高校の数学 III では、複素数のことをかなり詳しく説明してあるが、なぜか実部、虚部という言葉が出て来ない。不思議だ。)

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、 x, y をそれぞれ z の**実部** (the real part of z)、**虚部** (the imaginary part of z) と呼び、 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ で表す:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(w の実部・虚部には u, v が、 ζ の実部・虚部には ξ, η が使われることが多い: $w = u + iv, \zeta = \xi + i\eta$)

例 2.1

$z = 1 - 2i$ のとき、 $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = -2$. 次のようにも書ける。

$$\operatorname{Re}(1 - 2i) = 1, \quad \operatorname{Im}(1 - 2i) = -2.$$

(**注意** $\operatorname{Im}(1 - 2i) = -2i$ ではない。)

1.1 高校で習ったこと + α 加法・乗法の単位元&逆元

加法の単位元は $0 = 0 + 0i$, 乗法の単位元は $1 = 1 + 0i$ である。

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z + 0 = 0 + z = z, \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。

$z = x + iy \neq 0$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の、乗法に関する逆元 w を求めよう。

w が z の乗法に関する逆元とは

$$zw = 1$$

を満たすことをいう。 $z = 0$ の逆元は存在しない。 $z \neq 0$ の逆元を求めよう。

$w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) とおくと、 $(x + iy)(u + iv) = 1$ は

$$(1) \quad \begin{cases} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{cases}$$

という連立1次方程式と同値である。この方程式は、 $z \neq 0$ のときは一意的な解

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

を持つ。ゆえに $z \neq 0$ の逆元 w は一意的に存在して

$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

1.1 高校で習ったこと + α 乗法の逆元の確認

問 このことを確かめよ。

解答 (1) は

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書き換えられる。 $z \neq 0$ であれば $x^2 + y^2 > 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$w = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-iy}{x^2 + y^2}. \quad \square$$

1行でまとめると

$$(x, y \in \mathbb{R}) \wedge x + iy \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

1.1 高校で習ったこと + α 乗法の逆元の確認 (蛇足?)

問 高校生のとき

$$\frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2 - x \cdot yi + yi \cdot x - y^2 i^2} = \frac{x-yi}{x^2 + y^2}$$

のような計算をしたことがあるだろう。これを $x+yi$ の逆元が $\frac{x-yi}{x^2+y^2}$ であることの証明として採用できるだろうか？

答 このままでは採用できない。 $x+yi$ の逆元の存在と一意性が証明できていない段階では、 $\frac{1}{x+yi}$ はナンセンスな式であり、上の計算で分かるのは、「複素数 a, b, c ($b, c \neq 0$) について $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ 」が成り立ち、たまたもし $x+yi$ の逆元が一意的に存在するならば、それは $\frac{x-yi}{x^2+y^2}$ である、ということくらい。実際に逆元であることを確認する、例えば

$$\begin{aligned}(x+yi) \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} i \right) &= \left(x \frac{x}{x^2+y^2} - y \frac{-y}{x^2+y^2} \right) + \left(x \frac{-y}{x^2+y^2} + y \frac{x}{x^2+y^2} \right) i \\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + 0 \cdot i = 1\end{aligned}$$

のような計算をすることが必要である。

□

1.2 複素数の定義

3つの方法の紹介

高校数学での定義はいい加減である。ちゃんと定義する方法は色々ある。

① **Hamilton の方法** \mathbb{R}^2 に加法・乗法を

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

で定めると、 $(\mathbb{R}^2; +, \cdot)$ は**可換体**であり (これを証明するには、次のスライドで紹介する**可換体の公理**を満たすことをチェックすれば良い)、

- 加法についての単位元は $(0, 0)$. (x, y) の逆元は $-(x, y) = (-x, -y)$.
- 乗法についての単位元は $(1, 0)$. (x, y) の逆元は

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

が成り立つ。

この \mathbb{R}^2 のことを \mathbb{C} と表す。

普通の数ベクトル空間 \mathbb{R}^2 の拡張ととらえると分かりやすいかもしれない。
 (a, b) を $a + bi$ と書くことにする。

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群、加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

$$\textcircled{1} \quad (\forall a, b, c \in K) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\textcircled{2} \quad (\exists 0_K \in K) (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$$

$$\textcircled{3} \quad (\forall a \in K) (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$$

$$\textcircled{4} \quad (\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$$

$$\textcircled{5} \quad (\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$$

$$\textcircled{6} \quad (\exists 1_K \in K) (\forall a \in K) \quad a1_K = 1_K a = a$$

$$\textcircled{7} \quad (\forall a \in K \setminus \{0_K\}) (\exists a'' \in K) \quad aa'' = a''a = 1_K$$

$$\textcircled{8} \quad (\forall a, b, c \in K) \quad (a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac$$

$$\textcircled{9} \quad (\forall a, b \in K) \quad ab = ba$$

$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はこの公理を満たす。

$K = \mathbb{H}$ (後で紹介する四元数体) は (1)–(8) を満たすが、(9) は満たさない。

1.2 複素数の定義

3つの方法の紹介

- ② 行列を用いる方法 2次正方行列全体 $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 \mathbb{C} を

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

で定めると、行列の通常のと積を演算として、 \mathbb{C} は可換体になる。

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、それぞれ $1, i$ に対応し、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ, \quad J^2 = -I.$$

(後で出て来る $e^{i\theta}$ に対応する行列は、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (回転の行列) になる。)

1.2 複素数の定義

3つの方法の紹介

(もしも可換環とそのイデアルについて知識 (代数学の常識) があれば)

- ③ 実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル $(x^2 + 1)$ で割った剰余環を \mathbb{C} とする:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1).$$

$(x^2 + 1)$ は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 \mathbb{C} は可換体となる。
代数学知らないと難しい?…… 一方これは高校数学流の厳密化とも言える。

もう少し噛み砕いた説明が読みたければ、飯高 [2] を見よ (ネットでアクセス可能)。

定義 2.2 (複素数の平方根)

複素数 c に対して、 $z^2 = c$ を満たす複素数 $z \in \mathbb{C}$ を c の**平方根** (square root of c) とよぶ。

注意: 平方根と $\sqrt{\quad}$ の区別が重要。 \mathbb{R} では簡単だった (説明できますか? この後のスライドで復習する。)

\mathbb{C} では? \sqrt{c} という記号については後回し。まずは平方根。

1.5.1 定義 平方根の存在

定理 2.3 (複素数の平方根)

任意の複素数 c に対して、 c の平方根 z が存在する。 $c = 0$ のときは $z = 0$ のみ、 $c \neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。 $c = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とするとき

$$(2) \quad z = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & (a \geq 0, b = 0) \\ \pm\sqrt{-ai} & (a < 0, b = 0) \\ \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} i \right) & (b \neq 0). \end{cases}$$

(ここに現れた $\sqrt{\quad}$ は、非負実数に対する非負の平方根である。)

この式は覚えなくて (間違える可能性が高いから)、求め方を覚えて、必要となるときに求められるようにしておくのを勧める。

1.5.2 平方根の求め方をマスター

例 2.4

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。
(解答)

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -1.$$

$2xy = -1$ より $y = -\frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると (2次方程式を解いて)

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

ゆえに

$$x = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}.$$

1.5.2 平方根の求め方をマスター (続き)

例 2.4 (つづき)

これから

$$y = -\frac{1}{2x} = \mp \frac{2}{2\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \mp \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}.$$

ただし x, y を表す式の複号はすべて同順である。ゆえに

$$z = x + yi = \pm \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}i \right).$$

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

- ① $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、 $c \geq 0$ であることが必要十分である。
- ② $c \geq 0$ のとき、 x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ1つ存在する。
それを \sqrt{c} と表す。
- ③ $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、 $\sqrt{c} = 0$ 。
- ④ $c > 0$ であれば c の平方根は \sqrt{c} と $-\sqrt{c}$ の2つ。
- ⑤ 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}.$$

高校では、 $c < 0$ に対して、 $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ と定義した (例えば $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$). この講義では、この定義は採用しないことにする。

**中学校で学んだ $\sqrt{\text{非負実数}}$ という記号は使い続けるが、
高校で学んだ $\sqrt{\text{負数}}$ という記号は断りなしに使わない。**

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$ 演習

- ① 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ であることを示せ。
- ② 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ と定義した場合、
 $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ とは限らないことを示せ。
(解答はこのスライド PDF の最後に置いておく。)

宿題1について (提出方法の注意)

宿題1を出します。課題文を書いたPDFや、締め切り、提出方法等は Oh-o! Meiji の「レポート」を見て下さい。

注意事項

- 普通の数式として無理なく読み取れる、A4サイズのPDF、の2つが条件です。LaTeX や Word で作成したPDF、紙に手書きしたものをスキャンしたPDF、なんでも受け付けます。(スマホで撮った画像ファイルも一応受け付けますが、なるべくスキャン・アプリで作成したPDFにして下さい)。Word 等で数式の入力方法がよく分からない場合は、無理をせず「手書きしてスキャン」を選んで下さい。
- 出来る限り、ファイル1つだけで提出して下さい。複数ページになった場合に、1ページずつの複数ファイルを送って来る人がいますが、添削が意外と面倒です。複数のPDFを1つにまとめることはMacのプレビューで簡単に出来るので、そうしてから提出して下さい。
- レポートの1ページ目の上部に学年・組・番号・氏名を記して下さい。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート。
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf>
(2014～).
- [2] 飯高茂：大学生にきちんと虚数を教えよう — コーシーの定理を教える前に — (第49回公私立数学系学科懇談会の活動報告), 数学通信, Vol. 15, No. 1, pp. 46–53 (2010年3月26日),
<http://mathsoc.jp/publication/tushin/1501/1501iitaka.pdf>.