複素関数・同演習 第 4 回

〜複素指数関数のフライング導入, n 乗根〜

かつらだ　まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 9 月 28 日

目次

本日の内容・連絡事項

本日の講義内容

- 講義ノート [1] の 1.8, 1.9, 1.10, 1.11 (の前半？) の内容を講義する。複素指数関数は、後で冪級数を使って定義し直すが、便利なので今のうちに使い始めることにする。そしてそれを用いて極形式と n 乗根の説明をする。(極形式は内容的には高校で学んだものと同じであるが、複素指数関数を利用して扱うことに慣れてほしい。) n 乗根は、今後あちこちに出て来るので、正確に処理できることが重要である。

連絡事項

- 宿題 2 を出します (問題公開は、ぎりぎり授業開始時になるかもしれません)。〆切は一応 10 月 4 日 (火) 13:30 とします。

1.8 複素指数関数のフライング導入

この講義では多くの初等関数を冪級数を用いて定義する。指数関数について、そうすると

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{(冪級数による定義)}$$

となる。

1.8 複素指数関数のフライング導入

この講義では多くの初等関数を冪級数を用いて定義する。指数関数について、そうすると

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{(冪級数による定義)}$$

となる。しかし、指数関数は便利なので、冪級数の説明に先走って導入する。後で冪級数で定義しても同じであることを確認する。

1.8 複素指数関数のフライング導入

この講義では多くの初等関数を冪級数を用いて定義する。指数関数について、そうすると

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{冪級数による定義})$$

となる。しかし、指数関数は便利なので、冪級数の説明に先走って導入する。後で冪級数で定義しても同じであることを確認する。

定義 4.1 (複素指数関数)

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、

(1) $$e^z = \exp z := e^x \left(\cos y + i \sin y\right).$$

赤字は実関数としての指数関数。本来は別の記号にすべきかもしれないが拡張なので同じ記号にする。

1.8 複素指数関数のフライング導入

この講義では多くの初等関数を冪級数を用いて定義する。指数関数について、そうすると

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{(冪級数による定義)}$$

となる。しかし、指数関数は便利なので、冪級数の説明に先走って導入する。後で冪級数で定義しても同じであることを確認する。

定義 4.1 (複素指数関数)

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、

$$e^z = \exp z := e^x (\cos y + i \sin y) . \tag{1}$$

赤字は実関数としての指数関数。本来は別の記号にすべきかもしれないが拡張なので同じ記号にする。

(細かい注) e^z と書くと「e の z 乗」と読みたくなり、実際にそう呼んだりするが、複素数の場合に一般の (指数が整数でないという意味) の冪乗はまだ定義していないので、本当はおかしい。

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z. \tag{2}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z. \tag{2}$$

実際、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ について、$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$. このとき、$e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$.

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

(2) $$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z.$$

実際、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ について、$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$. このとき、$e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$.

(3) $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

(2) $$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z.$$

実際、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ について、$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$. このとき、$e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$.

(3) $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

実際、(実数の世界の) 指数関数の指数法則と三角関数の加法定理により

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+x_2} \left(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)\right) \\ &= e^{x_1} e^{x_2} \left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i \left(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2\right)\right), \end{aligned}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

(2)
$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z.$$

実際、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ について、$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$. このとき、$e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$.

(3)
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

実際、(実数の世界の) 指数関数の指数法則と三角関数の加法定理により

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&= e^{x_1+x_2} \left(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)\right) \\
&= e^{x_1} e^{x_2} \left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i \left(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{z_1} e^{z_2} &= \left(e^{x_1} \left(\cos y_1 + i \sin y_1\right)\right)\left(e^{x_2} \left(\cos y_2 + i \sin y_2\right)\right) \\
&= e^{x_1} e^{x_2} \left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i \left(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2\right)\right)
\end{aligned}$$

であるから $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$. □

1.8 複素指数関数のフライング導入

(4) $\quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^z \neq 0, \quad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}.$ $\quad$ (∀ は強調しているつもり。)

1.8 複素指数関数のフライング導入

(4) $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^z \neq 0, \quad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}.$ (∀ は強調しているつもり。)

実際 $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1 \neq 0$ なので、$e^z \neq 0$. 割り算して $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.
$e^z \neq 0$ (**指数関数は 0 にならない**) は意外と重要である。

1.8 複素指数関数のフライング導入

(4) $$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^z \neq 0, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}. \qquad (\forall \text{ は強調しているつもり。})$$

実際 $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1 \neq 0$ なので、$e^z \neq 0$. 割り算して $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

$e^z \neq 0$ (**指数関数は 0 にならない**) は意外と重要である。

z が純虚数のときを考える。$z = i\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) のとき ($x = 0$, $y = \theta$ であるから$\cdots$)

(5) $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\textbf{Euler の公式}).$$

この式に慣れるべき！ (加法定理よりは指数法則の方が楽だし)

図形的に把握することを勧める (次のスライド)。

1.8 複素指数関数のフライング導入

(4) $\qquad (\forall z\in\mathbb{C})\quad e^z\neq 0,\quad e^{-z}=\dfrac{1}{e^z}.$ $\qquad$ ($\forall$ は強調しているつもり。)

実際 $e^ze^{-z}=e^{z+(-z)}=e^0=1\neq 0$ なので、$e^z\neq 0$. 割り算して $e^{-z}=\frac{1}{e^z}$.

$e^z\neq 0$ (**指数関数は 0 にならない**) は意外と重要である。

z が純虚数のときを考える。$z=i\theta$ ($\theta\in\mathbb{R}$) のとき ($x=0$, $y=\theta$ であるから$\cdots$)

(5) $$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$ (**Euler の公式**).

この式に慣れるべき！ (加法定理よりは指数法則の方が楽だし)
図形的に把握することを勧める (次のスライド)。

注意 4.2 (教育的指導)

$e^{i\theta}$ を見ると、ほとんど反射的に (5) を使って、cos, sin で表現して計算する人が毎年かなりの数いるが、複素指数関数で表現できているものは、多くの場合は、複素指数関数のままで計算する方が便利である。いつも cos, sin に直していては、複素指数関数に慣れる機会が失われてしまうので、どちらかというと、できる限り複素指数関数のままで計算するよう心がけることを勧める。

1.8 複素指数関数のフライング導入

このスライドの式は、(5) を用いて確かめ、かつ図形的に理解 (把握) しよう。

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1. \tag{6}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

このスライドの式は、(5) を用いて確かめ、かつ図形的に理解 (把握) しよう。

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{\frac{3}{2}\pi i}=-i,\quad e^{2\pi i}=1. \tag{6}$$

$$\cos\theta=\operatorname{Re}e^{i\theta},\quad \sin\theta=\operatorname{Im}e^{i\theta}. \tag{7}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

このスライドの式は、(5) を用いて確かめ、かつ図形的に理解 (把握) しよう。

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{\frac{3}{2}\pi i}=-i,\quad e^{2\pi i}=1. \tag{6}$$

$$\cos\theta=\operatorname{Re}e^{i\theta},\quad \sin\theta=\operatorname{Im}e^{i\theta}. \tag{7}$$

(5) で θ の代わりに $-\theta$ を代入すると

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta. \tag{8}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

このスライドの式は、(5) を用いて確かめ、かつ図形的に理解 (把握) しよう。

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{\frac{3}{2}\pi i}=-i,\quad e^{2\pi i}=1. \tag{6}$$

$$\cos\theta=\mathrm{Re}\,e^{i\theta},\quad \sin\theta=\mathrm{Im}\,e^{i\theta}. \tag{7}$$

(5) で θ の代わりに $-\theta$ を代入すると

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta. \tag{8}$$

$e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ は単位円上にあり、実軸に関して対称の位置にある:

$$\left|e^{i\theta}\right|=1,\quad \overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}. \tag{9}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

(5) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ と (8) $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ を、$\cos\theta$, $\sin\theta$ についての連立方程式として解くと

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \tag{10}$$

しょっちゅう出て来るので、そのうち慣れるはず。最後には覚える、と覚悟する。

1.8 複素指数関数のフライング導入

(5) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ と (8) $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ を、$\cos\theta$, $\sin\theta$ についての連立方程式として解くと

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \tag{10}$$

しょっちゅう出て来るので、そのうち慣れるはず。最後には覚える、と覚悟する。

絶対値については、$|e^z|=\left|e^xe^{iy}\right|=|e^x|\left|e^{iy}\right|=e^x\cdot 1=e^x$ であるから

$$\left|e^z\right|=e^x=e^{\mathrm{Re}\,z}. \tag{11}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

$$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}). \tag{12}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

$$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}). \tag{12}$$

実際、$n = 0$ の場合は、両辺とも 1 であるから、成立する。$n \in \mathbb{N}$ の場合は

$$e^{z_1+z_2+\cdots+z_n} = e^{z_1} e^{z_2} \cdots e^{z_n}$$

であるから、$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ のとき $e^{nz} = (e^z)^n$. $n < 0$ のときは、$n = -m$ とすると、$e^{nz} = e^{-mz} = \dfrac{1}{e^{mz}} = \dfrac{1}{(e^z)^m} = (e^z)^{-m} = (e^z)^n$. $\square$

1.8 複素指数関数のフライング導入

(12) $$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}).$$

実際、$n = 0$ の場合は、両辺とも 1 であるから、成立する。$n \in \mathbb{N}$ の場合は

$$e^{z_1+z_2+\cdots+z_n} = e^{z_1} e^{z_2} \cdots e^{z_n}$$

であるから、$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ のとき $e^{nz} = (e^z)^n$. $n < 0$ のときは、$n = -m$ とすると、$e^{nz} = e^{-mz} = \dfrac{1}{e^{mz}} = \dfrac{1}{(e^z)^m} = (e^z)^{-m} = (e^z)^n$. □

特に $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. すなわち

(13) $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (\overset{\text{ド・モアブル}}{\textbf{de Moivre}}\ \textbf{の公式}).$$

(結局は三角関数の加法定理と帰納法で、高校の時と本質的に同じ証明である。)

1.8 複素指数関数のフライング導入

(12) $$\left(e^z\right)^n=e^{nz}\quad (n\in\mathbb{Z},\ z\in\mathbb{C}).$$

実際、$n=0$ の場合は、両辺とも 1 であるから、成立する。$n\in\mathbb{N}$ の場合は

$$e^{z_1+z_2+\cdots+z_n}=e^{z_1}e^{z_2}\cdots e^{z_n}$$

であるから、$z_1=z_2=\cdots=z_n=z$ のとき $e^{nz}=\left(e^z\right)^n$. $n<0$ のときは、$n=-m$ とすると、$e^{nz}=e^{-mz}=\dfrac{1}{e^{mz}}=\dfrac{1}{\left(e^z\right)^m}=\left(e^z\right)^{-m}=\left(e^z\right)^n$. □

特に $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$ に対して $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$. すなわち

(13) $$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$ (**de Moivre**（ド・モアブル）**の公式**).

(結局は三角関数の加法定理と帰納法で、高校の時と本質的に同じ証明である。)

注意 4.3 (一般の冪)

一般の冪 a^b はまだ定義していない (しばらく待って下さい)。実は $\left(a^b\right)^c=a^{bc}$ の形の指数法則は一般には成り立たない。(12) は、その形の指数法則とはみなさない方が良い。

1.9 極形式　1.9.1 定義

複素数を極座標で表した式のことを**極形式** (polar form) とよぶ。

1.9 極形式　1.9.1 定義

複素数を極座標で表した式のことを**極形式** (polar form) とよぶ。

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ とするとき、

$$(\exists r\geq 0)(\exists\theta\in\mathbb{R})\quad (x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

この r, θ を (x,y) の**極座標**という。

- r は一意的に定まる: $r=\sqrt{x^2+y^2}$.
- θ は、$r>0$ のとき (いいかえると $(x,y)\neq(0,0)$ のとき) 2π の整数倍の不定差を除いて定まる。$r=0$ のとき、θ は何でもよい。
  $0\leq\theta<2\pi$ や $-\pi<\theta\leq\pi$ のように条件をつけると (任意に選んだ α に対して、$\alpha\leq\theta<\alpha+2\pi$ あるいは $\alpha<\theta\leq\alpha+2\pi$ という条件を課すと)、一意的に定まる。

—— 以上は高校生も知っている (はずの) こと。

1.9 極形式　1.9.1 定義

複素数を極座標で表した式のことを**極形式** (polar form) とよぶ。

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ とするとき、

$$(\exists r\geq 0)(\exists\theta\in\mathbb{R})\quad (x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

この r, θ を (x,y) の**極座標**という。

- r は一意的に定まる: $r=\sqrt{x^2+y^2}$.
- θ は、$r>0$ のとき (いいかえると $(x,y)\neq(0,0)$ のとき) 2π の整数倍の不定差を除いて定まる。$r=0$ のとき、θ は何でもよい。
  $0\leq\theta<2\pi$ や $-\pi<\theta\leq\pi$ のように条件をつけると (任意に選んだ α に対して、$\alpha\leq\theta<\alpha+2\pi$ あるいは $\alpha<\theta\leq\alpha+2\pi$ という条件を課すと)、一意的に定まる。

—— 以上は高校生も知っている (はずの) こと。

$z\in\mathbb{C}$ とすると、

$$(\exists r\geq 0)(\exists\theta\in\mathbb{R})\quad z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}. \tag{14}$$

この式 ($z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ あるいは $z=re^{i\theta}$) を z の**極形式**という。なるべく後者を使うこと (慣れて欲しいから、その方が誤解を招きにくいから)。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、θ は 2π の不定差を除いて定まる。θ を z の**偏角** (an argument of z) とよび、$\arg z$ と表す。

1 つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、θ は 2π の不定差を除いて定まる。θ を z の**偏角** (an argument of z) とよび、$\arg z$ と表す。

1 つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ と限定したとき、ただ 1 つに定まる。それを $\operatorname{Arg} z$ と書き、z の**偏角の主値** (the principal argument of z) とよぶ。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、θ は 2π の不定差を除いて定まる。θ を z の**偏角** (an argument of z) とよび、$\arg z$ と表す。

1 つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ と限定したとき、ただ 1 つに定まる。それを $\mathrm{Arg}\, z$ と書き、z の**偏角の主値** (the principal argument of z) とよぶ。

$r_1, r_2 > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \land (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi. \tag{15}$$

後者 (青い部分) は $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ とも表せる。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、θ は 2π の不定差を除いて定まる。θ を z の**偏角** (an argument of z) とよび、$\arg z$ と表す。

1 つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ と限定したとき、ただ 1 つに定まる。それを $\operatorname{Arg} z$ と書き、z の**偏角の主値** (the principal argument of z) とよぶ。

$r_1, r_2 > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi. \tag{15}$$

後者 (青い部分) は $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ とも表せる。

(15) の証明.

$\Leftarrow$ は当たり前。$\Rightarrow$ はまず絶対値を取って $r_1 = r_2$. それを代入して割り算して $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$. これから $(\exists k \in \mathbb{Z})$ $\theta_1 - \theta_2 = k \cdot 2\pi$. □

1.9.3 極形式と偏角の例

例 4.4

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i.$$

1.9.3 極形式と偏角の例

例 4.4

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1=1+\sqrt{3}i,\quad z_2=-1+\sqrt{3}i,\quad z_3=-1-\sqrt{3}i,\quad z_3=1-\sqrt{3}i.$$

どの j についても、$|z_j|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2.$

1.9.3 極形式と偏角の例

例 4.4

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i.$$

どの j についても、$|z_j| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{3},$$

1.9.3 極形式と偏角の例

例 4.4

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1=1+\sqrt{3}i,\quad z_2=-1+\sqrt{3}i,\quad z_3=-1-\sqrt{3}i,\quad z_3=1-\sqrt{3}i.$$

どの j についても、$|z_j|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2.$

$$z_1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{\frac{\pi}{3}i},\quad \operatorname{Arg} z_1=\frac{\pi}{3},$$

以下同様に

$$z_2=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{\frac{2\pi}{3}i},\quad \operatorname{Arg} z_2=\frac{2\pi}{3},$$

$$z_3=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{\frac{4\pi}{3}i}=2e^{-\frac{2\pi}{3}i},\quad \operatorname{Arg} z_3=-\frac{2\pi}{3},$$

$$z_4=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{-\frac{\pi}{3}i},\quad \operatorname{Arg} z_4=-\frac{\pi}{3}.$$

1.9.3 極形式と偏角の例

例 4.5

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - ii, \quad z_3 = 1 - i.$$

1.9.3 極形式と偏角の例

例 4.5

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - ii, \quad z_3 = 1 - i.$$

(まずは絶対値の計算から始める。) どの j についても、$|z_j| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$.

1.9.3 極形式と偏角の例

例 4.5

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - ii, \quad z_3 = 1 - i.$$

(まずは絶対値の計算から始める。) どの j についても、$|z_j| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{4}$$

$\left(\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right.$ となる θ を探した。)

1.9.3 極形式と偏角の例

例 4.5

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - ii, \quad z_3 = 1 - i.$$

(まずは絶対値の計算から始める。) どの j についても、$|z_j| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ となる } \theta \text{ を探した。}\right)$$

以下同様に

$$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4} i}, \quad \operatorname{Arg} z_2 = \frac{3\pi}{4},$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4} i} = \sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4} i}, \quad \operatorname{Arg} z_3 = -\frac{3\pi}{4},$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2} e^{\frac{7\pi}{4} i} = \sqrt{2} e^{\frac{-\pi}{4} i}, \quad \operatorname{Arg} z_4 = -\frac{\pi}{4}. \quad \square$$

つらだ まさし

1.9.3 極形式と偏角の例

注意 4.6 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？

1.9.3 極形式と偏角の例

注意 4.6 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

1.9.3 極形式と偏角の例

注意 4.6 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z = re^{i\theta}$ とするとき、$\bar{z}$ の極形式は? $\bar{z} = re^{-i\theta}$. これは OK.

1.9.3 極形式と偏角の例

注意 4.6 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z = re^{i\theta}$ とするとき、$\overline{z}$ の極形式は? $\overline{z} = re^{-i\theta}$. これは OK. しかし

$$\overline{z} = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$

は**正しい等式だが極形式ではない**。マイナス $-$ はマズい。

1.9.3 極形式と偏角の例

注意 4.6 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z = re^{i\theta}$ とするとき、$\overline{z}$ の極形式は? $\overline{z} = re^{-i\theta}$. これは OK. しかし

$$\overline{z} = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$

は**正しい等式だが極形式ではない**。マイナス $-$ はマズい。

ということもあって、極形式の三角関数バージョンは避けよう、と言ってます。

おまけ: 1.9 の補足 (宿題を解くために)

例題　$r, \theta \in \mathbb{R}$, $z = re^{i\theta}$ とするとき、z の極形式を求めよ。

(ひっかけ問題のように思えるかもしれないけれど…意外と大事なこと。)

おまけ: 1.9 の補足 (宿題を解くために)

例題　$r,\theta\in\mathbb{R}$, $z=re^{i\theta}$ とするとき、z の極形式を求めよ。

(ひっかけ問題のように思えるかもしれないけれど…意外と大事なこと。)

解答　$r\geq 0$ の場合は、$z=re^{i\theta}$ は z の極形式である。

おまけ: 1.9 の補足 (宿題を解くために)

例題　$r, \theta \in \mathbb{R}$, $z = re^{i\theta}$ とするとき、z の極形式を求めよ。

(ひっかけ問題のように思えるかもしれないけれど…意外と大事なこと。)

解答　$r \geq 0$ の場合は、$z = re^{i\theta}$ は z の極形式である。

$r < 0$ の場合は、$r = (-r) \cdot (-1) = (-r)e^{i\pi}$ であるから

$$z = re^{i\theta} = (-r)e^{i\pi} \cdot e^{i\theta} = (-r)e^{i(\theta+\pi)}$$

であり、$-r > 0$, $\theta + \pi \in \mathbb{R}$ であるから、$z = (-r)e^{\theta+\pi}$ が z の極形式である。 □

参考文献 I

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf`
(2014〜).