複素関数・同演習 第5回

〜極形式 (続き), n 乗根〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022年10月4日

目次

本日の内容・連絡事項

- 本日は、極形式について前回の残りと、演算の幾何学的解釈、n 乗根の話をします。講義ノート [1] の §1.9〜1.11 の内容を解説する。
- 今日は宿題 2 の解説をします。
- 次回の授業で宿題 3 を出します (〆切は 10 月 11 日 13:30)。「複素関数演習」のレポートとして提出して下さい。

宿題について

- テストをしているつもりはないので、気軽に質問して下さい。また (答えの丸写しはまずいけれど) 友人同士で相談しても構いません。
- 宿題 1 で複数あったミス
  $z_1 = 4 - 3i$ の虚部は $\mathrm{Im}\, z_1 = -3$. これを $\mathrm{Im}\, z_1 = -3i$ と間違えた人がいました。一般に $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、$\mathrm{Im}\, z = y$ です。

宿題 2 もほぼ計算問題なので、答えだけ書いておくと、

1.
$$e^{i\cdot 0} = 1, \quad e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}, \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}, \quad e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2},$$
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

2. $z = -1 - \sqrt{3}i$ のとき、$|z| = 2$, $\frac{z}{|z|} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = e^{-2\pi/3}$ であるから $z = 2e^{-2\pi i/3}$. また $\mathrm{Arg}\, z = -\frac{2\pi}{3}$.

3. $-2 = 2(-1) = 2e^{i\pi}$ であるから
$$z = 2e^{i(\pi+\theta)}, \quad \overline{z} = 2e^{-i(\pi+\theta)}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{2}e^{-i(\pi+\theta)}.$$

1.9.3 極形式と偏角の例

(前回に説明しそびれたこと)

注意 5.1 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？

1.9.3 極形式と偏角の例

(前回に説明しそびれたこと)

注意 5.1 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのが極形式としてはマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

1.9.3 極形式と偏角の例

(前回に説明しそびれたこと)

注意 5.1 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのが極形式としてはマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z = re^{i\theta}$ とするとき、$\overline{z}$ の極形式は? $\overline{z} = re^{-i\theta}$. これは OK.

1.9.3 極形式と偏角の例

(前回に説明しそびれたこと)

注意 5.1 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのが極形式としてはマズい。書くところが2つあると、別のものを書いてしまうことがある$\cdots$

$z = re^{i\theta}$ とするとき、$\overline{z}$ の極形式は? $\overline{z} = re^{-i\theta}$. これは OK. しかし

$$\overline{z} = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$

は正しい等式だが極形式ではない。マイナス $-$ はマズい。

1.9.3 極形式と偏角の例

(前回に説明しそびれたこと)

注意 5.1 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのが極形式としてはマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z = re^{i\theta}$ とするとき、$\overline{z}$ の極形式は? $\overline{z} = re^{-i\theta}$. これは OK. しかし

$$\overline{z} = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$

は正しい等式だが極形式ではない。マイナス $-$ はマズい。

ということもあって、極形式の三角関数バージョンは避けよう、と言ってます。

1.10 演算の幾何学的解釈 1.10.1 和と積

和は平行四辺形ルール ($\mathbb{R}^2$ のベクトルと同じ)。

1.10 演算の幾何学的解釈 1.10.1 和と積

和は平行四辺形ルール ($\mathbb{R}^2$ のベクトルと同じ)。

積は極形式と相性が良い。積の絶対値は絶対値の積、積の偏角は偏角の和。
(本当は「偏角の和は積の偏角である」とすべき。)

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (r_1, r_2 > 0;\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

とすると

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

これが $z_1 z_2$ の極形式である。

1.10 演算の幾何学的解釈 1.10.1 和と積

和は平行四辺形ルール ($\mathbb{R}^2$ のベクトルと同じ)。

積は極形式と相性が良い。積の絶対値は絶対値の積、積の偏角は偏角の和。(本当は「偏角の和は積の偏角である」とすべき。)

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (r_1, r_2 > 0;\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

とすると

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

これが $z_1 z_2$ の極形式である。ゆえに

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \tag{1}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{2}$$

第 2 式は注釈が必要。arg は 1 つの数を表すのではないことに注意する。これは

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi} \tag{3}$$

のように解釈すべき (「2π の整数倍の差を除いて一致する」)。

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、a と b は m を法として**合同**である (a and b are congruent modulo m, a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

1.10.2 合同式のおさらい (?)　偏角は合同式で考えよう

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、a と b は m を法として**合同**である (a and b are congruent modulo m, a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

整数の話でない場合も良く使われる。水色の部分が要点である。

1.10.2 合同式のおさらい (？)　偏角は合同式で考えよう

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、a と b は m を法として**合同**である (a and b are congruent modulo m, a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

整数の話でない場合も良く使われる。水色の部分が要点である。

例えば、前のスライドの (3) は次の意味である。

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \arg(z_1 z_2) - (\arg z_1 + \arg z_2) = 2k\pi.$$

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、a と b は m を法として**合同**である (a and b are congruent modulo m, a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

整数の話でない場合も良く使われる。水色の部分が要点である。

例えば、前のスライドの (3) は次の意味である。

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \arg(z_1 z_2) - (\arg z_1 + \arg z_2) = 2k\pi.$$

例えば

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

ははっきり間違いである ($-\pi < \operatorname{Arg} \leq \pi$ に注意)。これも

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \equiv \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \pmod{2\pi}$$

は正しい。

特に $e^{i\theta}$ をかけると、複素平面で原点を中心とする角度 θ の回転をすることになる。

$z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ とするとき

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} z = e^{i\theta}(x + yi) &= (\cos\theta + i \sin\theta)(x + yi) \\
&= x\cos\theta - y\sin\theta + (x\sin\theta + y\cos\theta)i.
\end{aligned}
$$

Cf. (行列を用いた回転)

$$
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}
$$

1.11 n 乗根　1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 5.2 (n 乗根)

$n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $c\in\mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{4}$$

を満たす z を c の **n 乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 5.2 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{4}$$

を満たす z を c の **n 乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、$n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

1.11 n 乗根　1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 5.2 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{4}$$

を満たす z を c の n **乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、$n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、c の n 乗根は 0 のみである。

1.11 n 乗根　1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 5.2 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{4}$$

を満たす z を c の n **乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、$n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、c の n 乗根は 0 のみである。

一応注意しておく　複素数の平方根は、必ず実数の $\sqrt{\ }$ で表せた (定理 2.2)。しかし複素数の n 乗根は、n が 2 の冪であるときは例外として、それが出来ることとは期待できない (この問題には深入りしない)。例えば 3 乗根を求めるために $(x + yi)^3 = a + bi$ を解こうとしても行き詰まる。

1.11 n 乗根　1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 5.2 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{4}$$

を満たす z を c の **n 乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、$n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、c の n 乗根は 0 のみである。

一応注意しておく　複素数の平方根は、必ず実数の $\sqrt{\ }$ で表せた (定理 2.2)。しかし複素数の n 乗根は、n が 2 の冪であるときは例外として、それが出来ることは期待できない (この問題には深入りしない)。例えば 3 乗根を求めるために $(x + yi)^3 = a + bi$ を解こうとしても行き詰まる。

その他　**冪根**(べきこん), **累乗根**(るいじょうこん) という言葉もあるが、ここでは使わない (n を指定しないとあまり意味が無いので)。

1.11.1 定義と極形式表示

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 5.3 (複素数の n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ とする。

$$c = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0,\ \phi \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

とおくとき、c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

$$\sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right)} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{6}$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

1.11.1 定義と極形式表示

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 5.3 (複素数の n 乗根)

$n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $c\in\mathbb{C}$, $c\neq 0$ とする。

$$c=\rho e^{i\phi}\quad(\rho>0,\ \phi\in\mathbb{R}) \tag{5}$$

とおくとき、c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

$$\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)}\quad(k=0,1,\cdots,n-1) \tag{6}$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

(求め方を示すだけでなく、存在することを証明してあるのが重要。)

この定理は、公式を暗記するだけでなく、自力で導出できるようにしておくのが望ましい (ちゃんと出来ない人がとても多い)。

1.11.1 定義と極形式表示

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 5.3 (複素数の n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ とする。

(5) $$c = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0,\ \phi \in \mathbb{R})$$

とおくとき、c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

(6) $$\sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right)} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

(求め方を示すだけでなく、存在することを証明してあるのが重要。)

この定理は、公式を暗記するだけでなく、自力で導出できるようにしておくのが望ましい (ちゃんと出来ない人がとても多い)。

問 $\sqrt[n]{\rho}$ は何であるか、説明せよ。(ヒント: $y = x^n$ のグラフを考える。)

1.11.1 定義と極形式表示

証明　$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とおくと

$$z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow \left(r^n = \rho \wedge e^{in\theta} = e^{i\phi}\right).$$

(注　$r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$ の両辺の絶対値を取って $r^n = \rho$ を得るのが $\Rightarrow$ のポイント。)

証明　$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とおくと

$$z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow \left(r^n = \rho \wedge e^{in\theta} = e^{i\phi}\right).$$

(注　$r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$ の両辺の絶対値を取って $r^n = \rho$ を得るのが $\Rightarrow$ のポイント。) $\rho > 0$, $r > 0$ に注意すると、$r^n = \rho \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$ が分かる。もう一方から

$$\begin{aligned} e^{in\theta} = e^{i\phi} &\Leftrightarrow n\theta \equiv \phi \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\quad n\theta - \phi = k \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\quad \theta = \frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} z^n = c &\Leftrightarrow \left(r = \sqrt[n]{\rho} \wedge (\exists k \in \mathbb{Z})\ \theta = \frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

(一見無限個の解があるように思うかもしれないが) k が n 増えると元に戻る (周期 n) ので、$k = 0, 1, \cdots, n-1$ だけで重複なく、漏れもない。 □

余談 1 (別証明)

(答えを知っていれば、手短な議論が出来る。)

$$z = \sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

はいずれも $z^n = \rho e^{i\phi}$ を満たす。また、これらは $\rho > 0$ のとき相異なる。複素係数の多項式についても因数定理が成り立つので (一般に可換体の要素を係数とする多項式について因数定理が成り立つ)、n 次方程式は $n+1$ 個以上の解は持たない。ゆえに、これらが $z^n = \rho e^{i\phi}$ のすべての解である。 □

系 5.4 (1 の n 乗根)

$n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}}\quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

の n 個である。これらは、$\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k\quad (k=0,1,\cdots,n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

系 5.4 (1 の n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

の n 個である。これらは、$\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

これから

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

1.11.1 定義と極形式表示

系 5.4 (1 の n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

の n 個である。これらは、$\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

これから

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

また定理 5.3 の z は次のように表せる。

$$z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\phi}{n}} \omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

特に -1 の n 乗根は、$e^{i\frac{\pi}{n}}\omega^k$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ と表せる。ω は便利である。

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

1.11.2 ±1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、$z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、$z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

このように指数形式で表すことは、定理 5.3 の直接的適用であるが、実数の根号 $\sqrt[n]{}$ で表せるときはそうして見よう。

1.11.2 ±1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、$z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

このように指数形式で表すことは、定理 5.3 の直接的適用であるが、実数の根号 $\sqrt[n]{\quad}$ で表せるときはそうして見よう。

1. $n = 2$ のとき。
   $z^2 = 1$ の解は $e^{i \cdot k\frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi}$ $(k = 0, 1)$ であるから $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$.

1.11.2 ±1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、$z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

このように指数形式で表すことは、定理 5.3 の直接的適用であるが、実数の根号 $\sqrt[n]{\quad}$ で表せるときはそうして見よう。

1. $n = 2$ のとき。
   $z^2 = 1$ の解は $e^{i \cdot k\frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi}$ $(k = 0, 1)$ であるから $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$.
   これは
   $$z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$$
   と因数分解できることからも分かる。

1.11.2 ±1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、$z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

このように指数形式で表すことは、定理 5.3 の直接的適用であるが、実数の根号 $\sqrt[n]{}$ で表せるときはそうして見よう。

1. $n = 2$ のとき。
   $z^2 = 1$ の解は $e^{i \cdot k\frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi}$ $(k = 0, 1)$ であるから $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$.
   これは
   $$z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$$
   と因数分解できることからも分かる。

   $z^2 = -1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}$ $(k = 0, 1)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

1.11.2 ±1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、$z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

このように指数形式で表すことは、定理 5.3 の直接的適用であるが、実数の根号 $\sqrt[n]{}$ で表せるときはそうして見よう。

1. $n = 2$ のとき。
   $z^2 = 1$ の解は $e^{i \cdot k\frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi}$ $(k = 0, 1)$ であるから $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$.
   これは
   $$z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$$
   と因数分解できることからも分かる。

   $z^2 = -1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}$ $(k = 0, 1)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.
   これは
   $$z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$$
   と因数分解できることからも分かる。

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (2)

2. $n = 3$ のとき。
$z^3 = 1$ の解は $z = e^{i \cdot k \frac{2\pi}{3}}$ $(k = 0, 1, 2)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i \frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i \frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (2)

2. $n=3$ のとき。
$z^3=1$ の解は $z=e^{i\cdot k\frac{2\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
一方、
$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$$
という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ と求まるから)
$$z^3-1=(z-1)\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. $n=3$ のとき。
$z^3=1$ の解は $z=e^{i\cdot k\frac{2\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
一方、

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$$

という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ と求まるから)

$$z^3-1=(z-1)\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

$z^3=-1$ の解は $z=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、
$e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}}=-1$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

2. $n = 3$ のとき。
$z^3 = 1$ の解は $z = e^{i \cdot k \frac{2\pi}{3}}$ $(k = 0, 1, 2)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i \frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i \frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
一方、
$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$$
という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ と求まるから)
$$z^3 - 1 = (z-1)\left(z - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$
$z^3 = -1$ の解は $z = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ $(k = 0, 1, 2)$ であるから、
$e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1$, $e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
また因数分解も上と同様に
$$z^3 + 1 = (z+1)(z^2-z+1) = (z+1)\left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (3)

- $n = 4$ のとき。
  $z^4 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$,
  $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i$.

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (3)

- $n=4$ のとき。
  $z^4=1$ の解は $z=e^{ik\frac{2\pi}{4}}=e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k=0,1,2,3)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}=-i$. 因数分解からも分かる。実際
  $$z^4-1=(z^2+1)(z^2-1)=(z+i)(z-i)(z+1)(z-1).$$

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (3)

- $n=4$ のとき。
  $z^4=1$ の解は $z=e^{ik\frac{2\pi}{4}}=e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k=0,1,2,3)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}=-i$. 因数分解からも分かる。実際
  $$z^4-1=(z^2+1)(z^2-1)=(z+i)(z-i)(z+1)(z-1).$$
  $z^4=-1$ の解は $z=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$ であるから、
  $$e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{5\pi}{4}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (3)

- $n = 4$ のとき。
  $z^4 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i$. 因数分解からも分かる。実際
  $$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$
  $z^4 = -1$ の解は $z = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ であるから、
  $$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1 - i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}.$$
  一方、
  $$z^4 + 1 = (z^2 + i)(z^2 - i).$$
  と因数分解して、$z^2 = -i$, $z^2 = i$ を解けなくもないが (平方根の計算は出来るはず)、そうするよりも
  $$\begin{aligned} z^4 + 1 &= z^4 \color{red}{+ 2z^2} + 1 \color{red}{- 2z^2} = \left(z^2 + 1\right)^2 - \left(\sqrt{2}z\right)^2 \\ &= \left(z^2 + \sqrt{2}z + 1\right)\left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right) \end{aligned}$$
  と因数分解すれば、2 つの 2 次方程式の根として簡単に求まる。
  $$z = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} \quad (\text{上の結果と一致}).$$

参考文献 I

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf
(2014〜).