複素関数・同演習 第 7 回

〜 複素関数の極限・連続性, 微分と正則性 〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 10 月 11 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 10 月 19 日 (水曜)2 限の「複素関数演習」に、私は校務があるため休講となります。その補講を 10 月 15 日 (土曜)4 限に 312 教室で行う予定です。
- 講義ノート [1] の §2.2 以降を解説する。
§2.3, 2.4 は「〜と同様」ばかりで少しユルい話である (一度真剣に聴けばそれで済むだろう)。

本日の内容・連絡事項

- 10 月 19 日 (水曜)2 限の「複素関数演習」に、私は校務があるため休講となります。その補講を 10 月 15 日 (土曜)4 限に 312 教室で行う予定です。
- 講義ノート [1] の §2.2 以降を解説する。
§2.3, 2.4 は「〜と同様」ばかりで少しユルい話である (一度真剣に聴けばそれで済むだろう)。
- §2.5 Cauchy-Riemann の方程式を解説するつもりだったが、ちょうどその直前で時間切れになった。

本日の内容・連絡事項

- 10 月 19 日 (水曜)2 限の「複素関数演習」に、私は校務があるため休講となります。その補講を 10 月 15 日 (土曜)4 限に 312 教室で行う予定です。
- 講義ノート [1] の §2.2 以降を解説する。
§2.3, 2.4 は「〜と同様」ばかりで少しユルい話である (一度真剣に聴けばそれで済むだろう)。
- §2.5 Cauchy-Riemann の方程式を解説するつもりだったが、ちょうどその直前で時間切れになった。
- 今日は問 3 の解説をする。
(n 乗根については、公式 (定理) を紹介済みで、求めよと言われたら、それを適用するだけで良い。)

宿題3 (答え合わせ用結果のみ)

1. 1 の 6 乗根は

$$z = e^{i\frac{k\pi}{3}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, 5) = 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}$$
$$= 1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

次の因数分解からも求まる。

$$z^6 - 1 = (z^3+1)(z^3-1) = (z+1)(z^2-z+1)(z-1)(z^2+z+1).$$

-1 の 6 乗根は

$$z = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, 5) = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}, e^{i\frac{11\pi}{6}}$$
$$= 1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

次の因数分解からも求まる。

$$z^6 - 1 = (z^3+1)(z^3-1) = (z+1)(z^2-z+1)(z-1)(z^2+z+1).$$

宿題3 (答え合わせ用結果のみ) つづき

2. $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ の 3 乗根は
$$z = e^{i\left(\frac{\pi/2}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)} \quad (k = 0, 1, 2) = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i.$$

3. $f(z) = z^3$ の実部 u, 虚部 v は、
$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$
$f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ の実部 u, 虚部 v は、
$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y-1)^2}, \quad v(x, y) = \frac{1-y}{x^2 + (y-1)^2}.$$
$f(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ の実部 u, 虚部 v は、
$$u(x, y) = \sin x \cosh y, \quad v(x, y) = \cos x \sinh y.$$
$(\cosh X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}, \sinh X = \frac{e^X - e^{-X}}{2}.)$ □

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

$\mathbb{R}^2$ の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (私は過去の数学解析では、a 中心, 半径 r の開球を $B(a;r)$ と書いた)。

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

$\mathbb{R}^2$ の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (私は過去の数学解析では、a 中心, 半径 r の開球を $B(a;r)$ と書いた)。

1. $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して

$$D(c,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}.$$

c を中心とする半径 r の**開円盤** (an open disk, 開円板) とよぶ。

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

$\mathbb{R}^2$ の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (私は過去の数学解析では、a 中心, 半径 r の開球を $B(a;r)$ と書いた)。

1. $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して
$$D(c,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}.$$
c を中心とする半径 r の**開円盤** (an open disk, 開円板) とよぶ。
2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して
$$\overline{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0)\ D(z;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$
とおき、Ω の**閉包** (the closure of Ω) とよぶ。

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

$\mathbb{R}^2$ の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (私は過去の数学解析では、a 中心, 半径 r の開球を $B(a;r)$ と書いた)。

1. $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して
$$D(c,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}.$$
c を中心とする半径 r の**開円盤** (an open disk, 開円板) とよぶ。
2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して
$$\overline{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0)\ D(z;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$
とおき、Ω の**閉包** (the closure of Ω) とよぶ。
3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して
   - Ω が $\mathbb{C}$ の**開集合** (open set) とは、
$$(\forall z \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad D(z;\varepsilon) \subset \Omega$$
が成り立つことをいう。

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

$\mathbb{R}^2$ の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (私は過去の数学解析では、a 中心, 半径 r の開球を $B(a;r)$ と書いた)。

1. $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して
$$D(c,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}.$$
c を中心とする半径 r の**開円盤** (an open disk, 開円板) とよぶ。
2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して
$$\overline{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0)\ D(z;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$
とおき、Ω の**閉包** (the closure of Ω) とよぶ。
3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して
   - Ω が $\mathbb{C}$ の**開集合** (open set) とは、
   $$(\forall z \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad D(z;\varepsilon) \subset \Omega$$
   が成り立つことをいう。
   - Ω が $\mathbb{C}$ の**閉集合** (closed set) とは、Ω の補集合 $\Omega^{\complement} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \Omega\}$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることをいう。

定義 7.1 (複素関数の極限、連続性)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

1. $c \in \overline{\Omega}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする。$z \to c$ のとき $f(z)$ が γ に**収束する**とは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $f(z) \to \gamma$ と表す。この条件はつぎのようにも書ける。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega)(|z - c| < \delta \Rightarrow |f(z) - \gamma| < \varepsilon).$$

定義 7.1 (複素関数の極限、連続性)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

1. $c \in \overline{\Omega}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする。$z \to c$ のとき $f(z)$ が γ に**収束する**とは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $f(z) \to \gamma$ と表す。この条件はつぎのようにも書ける。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega)(|z - c| < \delta \Rightarrow |f(z) - \gamma| < \varepsilon).$$

(このような γ は存在すれば一意的なので) γ を $f(z)$ の $z \to c$ のときの**極限**とよび、$\lim\limits_{z \to c} f(z)$ で表す。

定義 7.1 (複素関数の極限、連続性)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

1. $c \in \overline{\Omega}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする。$z \to c$ のとき $f(z)$ が γ に**収束する**とは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $f(z) \to \gamma$ と表す。この条件はつぎのようにも書ける。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega)(|z - c| < \delta \Rightarrow |f(z) - \gamma| < \varepsilon).$$

(このような γ は存在すれば一意的なので) γ を $f(z)$ の $z \to c$ のときの**極限**とよび、$\lim_{z \to c} f(z)$ で表す。

注意　$z \to c$ のとき $f(z) \to \gamma$ を

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : 0 < |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことと定義している本が多い。この講義では、杉浦 [2] の定義に従う。

定義 7.1 (複素関数の極限、連続性 (つづき))

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

定義 7.1 (複素関数の極限、連続性 (つづき))

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

2. $c \in \Omega$ とする。f が c で**連続**であるとは

$$\lim_{z \to c} f(z) = f(c)$$

が成り立つことをいう。ε-δ 論法で表すと

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - f(c)| < \varepsilon.$$

定義 7.1 (複素関数の極限、連続性 (つづき))

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

2. $c \in \Omega$ とする。f が c で**連続**であるとは

$$\lim_{z \to c} f(z) = f(c)$$

が成り立つことをいう。ε-δ 論法で表すと

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - f(c)| < \varepsilon.$$

3. f が Ω で**連続**とは、f が任意の点 $c \in \Omega$ で連続なことをいう。

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性に翻訳できる。

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z, \quad \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\alpha := \operatorname{Re} \gamma, \quad \beta := \operatorname{Im} \gamma, \quad \boldsymbol{\gamma} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

とおくと

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性に翻訳できる。

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z, \quad \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\alpha := \operatorname{Re} \gamma, \quad \beta := \operatorname{Im} \gamma, \quad \boldsymbol{\gamma} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\lim_{z \to c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y) \to (a,b)} u(x,y) = \alpha \\ \displaystyle\lim_{(x,y) \to (a,b)} v(x,y) = \beta. \end{cases}$$

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性に翻訳できる。

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z, \quad \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\alpha := \operatorname{Re} \gamma, \quad \beta := \operatorname{Im} \gamma, \quad \boldsymbol{\gamma} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\lim_{z\to c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = \alpha \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = \beta. \end{cases}$$

ゆえに

f が c で連続 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{c}$ で連続 $\Leftrightarrow$ u と v が (a,b) で連続.

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性に翻訳できる。

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z, \quad \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\alpha := \operatorname{Re} \gamma, \quad \beta := \operatorname{Im} \gamma, \quad \boldsymbol{\gamma} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\lim_{z\to c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = \alpha \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = \beta. \end{cases}$$

ゆえに

$$f \text{ が } c \text{ で連続} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で連続} \Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ が } (a,b) \text{ で連続.}$$

「c で」を「Ω で」、「$\boldsymbol{c}$ で」と「(a,b) で」を「$\widetilde{\Omega}$ で」に変えても成立する。ただし、$\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+yi \in \Omega\right\}$.

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

例 7.2

指数関数 $f(z) = e^z$ については、実部 $u(x,y) = e^x \cos y$, 虚部 $v(x,y) = e^x \sin y$ が $\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに f は $\mathbb{C}$ で連続である。

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

命題 7.3 (複素関数の和・差・積・商の極限)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \overline{\Omega}$. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が $z \to c$ のとき極限を持つとき、

$$\lim_{z\to c}(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) + \lim_{z\to c} g(z),$$

$$\lim_{z\to c}(f(z)-g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) - \lim_{z\to c} g(z),$$

$$\lim_{z\to c}(f(z)g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) \cdot \lim_{z\to c} g(z),$$

$$\lim_{z\to c}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)}{\displaystyle\lim_{z\to c} g(z)} \quad (\text{ただし } \lim_{z\to c} g(z) \neq 0 \text{ とする}).$$

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

命題 7.3 (複素関数の和・差・積・商の極限)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \overline{\Omega}$. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が $z \to c$ のとき極限を持つとき、

$$\lim_{z\to c}\left(f(z)+g(z)\right) = \lim_{z\to c} f(z) + \lim_{z\to c} g(z),$$
$$\lim_{z\to c}\left(f(z)-g(z)\right) = \lim_{z\to c} f(z) - \lim_{z\to c} g(z),$$
$$\lim_{z\to c}\left(f(z)g(z)\right) = \lim_{z\to c} f(z) \cdot \lim_{z\to c} g(z),$$
$$\lim_{z\to c} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to c} f(z)}{\lim_{z\to c} g(z)} \quad (\text{ただし } \lim_{z\to c} g(z) \neq 0 \text{ とする}).$$

証明 (方針のみ)　微積分で実多変数関数の場合の命題を学んでいると思う。それらと同様に証明できる。

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

命題 7.3 (複素関数の和・差・積・商の極限)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \overline{\Omega}$. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が $z \to c$ のとき極限を持つとき、

$$\lim_{z\to c}(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) + \lim_{z\to c} g(z),$$

$$\lim_{z\to c}(f(z)-g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) - \lim_{z\to c} g(z),$$

$$\lim_{z\to c}(f(z)g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) \cdot \lim_{z\to c} g(z),$$

$$\lim_{z\to c} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to c} f(z)}{\lim_{z\to c} g(z)} \quad (\text{ただし} \lim_{z\to c} g(z) \neq 0 \text{ とする}).$$

証明 (方針のみ)　微積分で実多変数関数の場合の命題を学んでいると思う。それらと同様に証明できる。

別証明 (方針のみ) 対応する実 2 変数関数 (実部、虚部) を考えて、その極限の性質に帰着させることも出来る。

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

命題 7.3 (複素関数の和・差・積・商の極限)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \overline{\Omega}$. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が $z \to c$ のとき極限を持つとき、

$$\lim_{z\to c}\left(f(z)+g(z)\right) = \lim_{z\to c} f(z) + \lim_{z\to c} g(z),$$

$$\lim_{z\to c}\left(f(z)-g(z)\right) = \lim_{z\to c} f(z) - \lim_{z\to c} g(z),$$

$$\lim_{z\to c}\left(f(z)g(z)\right) = \lim_{z\to c} f(z) \cdot \lim_{z\to c} g(z),$$

$$\lim_{z\to c}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)}{\displaystyle\lim_{z\to c} g(z)} \quad (\text{ただし } \lim_{z\to c} g(z) \neq 0 \text{ とする}).$$

証明 (方針のみ)　微積分で実多変数関数の場合の命題を学んでいると思う。それらと同様に証明できる。

別証明 (方針のみ) 対応する実 2 変数関数 (実部、虚部) を考えて、その極限の性質に帰着させることも出来る。例えば、$f = u_1 + iv_1$, $g = u_2 + iv_2$, $fg = u_3 + iv_3$ とするとき、$fg = (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = u_3 + iv_3$ より $u_3 = u_1u_2 - v_1v_2$, $v_3 = u_1v_2 + v_1u_2$ であり、u_3 と v_3 は、u_1, u_2, v_1, v_2 から和・差・積で出来ているので収束する。ゆえに fg は$\cdots$ $\square$

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

系 7.4

連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし商の場合は分母が 0 にならない範囲で考える) は連続である。

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

系 7.4

連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし商の場合は分母が 0 にならない範囲で考える) は連続である。

この応用、あるいは系として、以下が得られる。

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

系 7.4

連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし商の場合は分母が 0 にならない範囲で考える) は連続である。

この応用、あるいは系として、以下が得られる。

複素係数の多項式

$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0, a_1, \cdots, a_n$ は複素数の定数)

に対して多項式関数 $P\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto P(z) \in \mathbb{C}$ は連続である。

系 7.4

連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし商の場合は分母が 0 にならない範囲で考える) は連続である。

この応用、あるいは系として、以下が得られる。

複素係数の多項式

$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0, a_1, \cdots, a_n$ は複素数の定数)

に対して多項式関数 $P\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto P(z) \in \mathbb{C}$ は連続である。

z を変数とする複素係数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[z]$ で表す。

系 7.4

連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし商の場合は分母が 0 にならない範囲で考える) は連続である。

この応用、あるいは系として、以下が得られる。

複素係数の多項式

$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0, a_1, \cdots, a_n$ は複素数の定数$)$

に対して多項式関数 $P\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto P(z) \in \mathbb{C}$ は連続である。

z を変数とする複素係数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[z]$ で表す。

複素係数の有理式

$$r(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z],\ p(z) \neq 0)$$

に対して、有理関数 $r\colon \Omega \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\}$ は連続である。

定義 7.5 (微分可能, 正則)

簡単のため、Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \Omega$ とする。f が c で**微分可能** (differentiable) であるとは、極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このときこの極限を $f'(c)$ と表し、f の c における**微分係数** (the derivative of f at c) と呼ぶ。

定義 7.5 (微分可能, 正則)

簡単のため、Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c\in\Omega$ とする。f が c で**微分可能** (differentiable) であるとは、極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このときこの極限を $f'(c)$ と表し、f の c における**微分係数** (the derivative of f at c) と呼ぶ。**導関数** (derivative, derived function) などの言葉の使い方は、実関数のときと同様に定義する。

定義 7.5 (微分可能, 正則)

簡単のため、Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \Omega$ とする。f が c で**微分可能** (differentiable) であるとは、極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このときこの極限を $f'(c)$ と表し、f の c における**微分係数** (the derivative of f at c) と呼ぶ。**導関数** (derivative, derived function) などの言葉の使い方は、実関数のときと同様に定義する。

Ω の任意の点 z に対して、f が z で微分可能であるとき、f は Ω で**正則** (regular, 整型, holomorphic) であるという。

2.4.2 例

例 7.6 (正則な関数の例)

$f(z) = \gamma$ (定数関数) と $g(z) = z$ は、$\mathbb{C}$ 全体で定義されて正則である。

例 7.6 (正則な関数の例)

$f(z) = \gamma$ (定数関数) と $g(z) = z$ は、$\mathbb{C}$ 全体で定義されて正則である。

実際、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma-\gamma}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

であるから、f は z で微分可能で $f'(z) = 0$. f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

例 7.6 (正則な関数の例)

$f(z) = \gamma$ (定数関数) と $g(z) = z$ は、$\mathbb{C}$ 全体で定義されて正則である。

実際、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma - \gamma}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

であるから、f は z で微分可能で $f'(z) = 0$. f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

また

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z + h - z}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

であるから、g は z で微分可能で $g'(z) = 1$. g は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

2.4.3 微分可能な関数の和・差・積・商

命題 7.7 (微分可能な関数の和・差・積・商)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$c \in \Omega$ とする。$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ と $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が c で微分可能ならば、$f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (ただし $g(c) \neq 0$ とする) も c で微分可能であり、

$$\begin{aligned}
(f+g)'(c) &= f'(c) + g'(c), \\
(f-g)'(c) &= f'(c) - g'(c), \\
(fg)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}.
\end{aligned}$$

2.4.3 微分可能な関数の和・差・積・商

命題 7.7 (微分可能な関数の和・差・積・商)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$c \in \Omega$ とする。$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ と $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が c で微分可能ならば、$f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (ただし $g(c) \neq 0$ とする) も c で微分可能であり、

$$\begin{aligned}
(f+g)'(c) &= f'(c) + g'(c),\\
(f-g)'(c) &= f'(c) - g'(c),\\
(fg)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}.
\end{aligned}$$

証明.

実関数の場合と同様である。 □

系 7.8 (多項式と有理関数の正則性)

1. 任意の自然数 k に対して、$f(z) = z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、$f'(z) = kz^{k-1}$.

2.4.4 多項式と有理関数の正則性

系 7.8 (多項式と有理関数の正則性)

1. 任意の自然数 k に対して、$f(z) = z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、$f'(z) = kz^{k-1}$.
2. 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$$

系 7.8 (多項式と有理関数の正則性)

1. 任意の自然数 k に対して、$f(z)=z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、$f'(z)=kz^{k-1}$.
2. 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.$$

(2 つめの等式がすらすら導けるように。「$k-1=j$ とおくと⋯」)

2.4.4 多項式と有理関数の正則性

系 7.8 (多項式と有理関数の正則性)

1. 任意の自然数 k に対して、$f(z) = z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、$f'(z) = kz^{k-1}$.
2. 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.$$

(2 つめの等式がすらすら導けるように。「$k-1=j$ とおくと…」)

3. 任意の複素係数有理式 $r(z) = \dfrac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $p(z)$ は零多項式ではない) の定める関数 $r \colon \Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\} \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$ は正則である。

2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法

2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法

合成関数の微分法　f と g が合成可能で、f が c で、g が $f(c)$ で微分可能ならば、$g\circ f$ は c で微分可能で

$$(g\circ f)'(c)=g'(f(c))f'(c). \tag{1}$$

あるいは $w=f(z)$, $\zeta=g(w)$ とするとき、合成関数 $\zeta=g(f(z))$ について

$$\frac{d\zeta}{dz}=\frac{d\zeta}{dw}\frac{dw}{dz}. \tag{2}$$

2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法

合成関数の微分法　f と g が合成可能で、f が c で、g が $f(c)$ で微分可能ならば、$g \circ f$ は c で微分可能で

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c). \tag{1}$$

あるいは $w = f(z)$, $\zeta = g(w)$ とするとき、合成関数 $\zeta = g(f(z))$ について

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dw}\frac{dw}{dz}. \tag{2}$$

逆関数の微分法　関数 $w = f(z)$ が微分可能かつ全単射であるとき、逆関数 $z = f^{-1}(w)$ について

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\dfrac{dw}{dz}} \quad (\text{ただし } dw/dz \neq 0 \text{ とする}) \tag{3}$$

も成り立つ (逆関数定理が重要だが、それは §2.5.5 で説明する)。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf
(2014〜).

[2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、
https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843
でアクセスできる. この eBook まともな目次を付けてほしい.