

複素関数・同演習 第7回

～ 複素関数の極限・連続性, 微分と正則性 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022年10月11日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 複素関数の極限、連続性、正則性 (続き)
 - 良く使う記号・用語 (極限に向けて)
 - 極限, 連続性
 - 定義
 - 実関数の極限・連続性への翻訳
 - 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性
 - 微分、正則性
 - 定義
 - 例
 - 微分可能な関数の和・差・積・商
 - 多項式と有理関数の正則性
 - 合成関数の微分法と逆関数の微分法
- ③ 参考文献

- 10月19日(水曜)2限の「複素関数演習」に、私は校務があるため休講となります。その補講を10月15日(土曜)4限に312教室で行う予定です。
- 講義ノート [1] の §2.2 以降を解説する。
§2.3, 2.4 は「～と同様」ばかりで少しユルい話である(一度真剣に聴けばそれで済むだろう)。
- §2.5 Cauchy-Riemann の方程式を解説するつもりだったが、ちょうどその直前で時間切れになった。
- 今日は問3の解説をする。
(n 乗根については、公式(定理)を紹介済みで、求めよと言われたら、それを適用するだけで良い。)

宿題3 (答え合わせ用結果のみ)

① 1 の 6 乗根は

$$\begin{aligned} z &= e^{i\frac{k\pi}{3}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 5) = 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}} \\ &= 1, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}$$

次の因数分解からも求まる。

$$z^6 - 1 = (z^3 + 1)(z^3 - 1) = (z + 1)(z^2 - z + 1)(z - 1)(z^2 + z + 1).$$

-1 の 6 乗根は

$$\begin{aligned} z &= e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 5) = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}, e^{i\frac{11\pi}{6}} \\ &= 1, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}$$

次の因数分解からも求まる。

$$z^6 - 1 = (z^3 + 1)(z^3 - 1) = (z + 1)(z^2 - z + 1)(z - 1)(z^2 + z + 1).$$

宿題3 (答え合わせ用結果のみ) つづき

② $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ の3乗根は

$$\begin{aligned} z &= e^{i(\frac{\pi/2}{3} + k\frac{2\pi}{3})} \quad (k = 0, 1, 2) = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, -i. \end{aligned}$$

③ $f(z) = z^3$ の実部 u , 虚部 v は、

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

$f(z) = \frac{1}{z-i}$ の実部 u , 虚部 v は、

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y-1)^2}, \quad v(x, y) = \frac{1-y}{x^2 + (y-1)^2}.$$

$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ の実部 u , 虚部 v は、

$$u(x, y) = \sin x \cosh y, \quad v(x, y) = \cos x \sinh y.$$

$$(\cosh X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}, \sinh X = \frac{e^X - e^{-X}}{2}.)$$

□

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

\mathbb{R}^2 の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (私は過去の数学解析では、 a 中心, 半径 r の開球を $B(a; r)$ と書いた)。

- ① $c \in \mathbb{C}, r > 0$ に対して

$$D(c, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}.$$

c を中心とする半径 r の**開円盤** (an open disk, 開円板) とよぶ。

- ② $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\bar{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0) D(z; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

とおき、 Ω の**閉包** (the closure of Ω) とよぶ。

- ③ $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して

- Ω が \mathbb{C} の**開集合** (open set) とは、

$$(\forall z \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad D(z; \varepsilon) \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

- Ω が \mathbb{C} の**閉集合** (closed set) とは、 Ω の補集合 $\Omega^c = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \Omega\}$ が \mathbb{C} の開集合であることをいう。

定義 7.1 (複素関数の極限、連続性)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

① $c \in \bar{\Omega}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする。 $z \rightarrow c$ のとき $f(z)$ が γ に**収束する**とは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $f(z) \rightarrow \gamma$ と表す。この条件はつぎのようにも書ける。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega)(|z - c| < \delta \Rightarrow |f(z) - \gamma| < \varepsilon).$$

(このような γ は存在すれば一意的なので) γ を $f(z)$ の $z \rightarrow c$ のときの**極限**とよび、 $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$ で表す。

注意 $z \rightarrow c$ のとき $f(z) \rightarrow \gamma$ を

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : 0 < |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことと定義している本が多い。この講義では、杉浦 [2] の定義に従う。

定義 7.1 (複素関数の極限、連続性 (つづき))

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

- ② $c \in \Omega$ とする。 f が c で連続であるとは

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c)$$

が成り立つことをいう。 ε - δ 論法で表すと

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - f(c)| < \varepsilon.$$

- ③ f が Ω で連続とは、 f が任意の点 $c \in \Omega$ で連続なことをいう。

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性に翻訳できる。

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z, \quad z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\alpha := \operatorname{Re} \gamma, \quad \beta := \operatorname{Im} \gamma, \quad \gamma := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad c := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi), \quad f(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x, y) = \alpha \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} v(x, y) = \beta. \end{cases}$$

ゆえに

f が c で連続 $\Leftrightarrow f$ が c で連続 $\Leftrightarrow u$ と v が (a, b) で連続.

「 c で」を「 Ω で」、「 c で」と「 (a, b) で」を「 $\tilde{\Omega}$ で」に変えても成立する。ただし、 $\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}$.

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

例 7.2

指数関数 $f(z) = e^z$ については、実部 $u(x, y) = e^x \cos y$, 虚部 $v(x, y) = e^x \sin y$ が \mathbb{R}^2 で連続である。ゆえに f は \mathbb{C} で連続である。

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

命題 7.3 (複素関数の和・差・積・商の極限)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \overline{\Omega}$. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が $z \rightarrow c$ のとき極限を持つとき、

$$\lim_{z \rightarrow c} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow c} f(z) + \lim_{z \rightarrow c} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} (f(z) - g(z)) = \lim_{z \rightarrow c} f(z) - \lim_{z \rightarrow c} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow c} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow c} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow c} f(z)}{\lim_{z \rightarrow c} g(z)} \quad (\text{ただし } \lim_{z \rightarrow c} g(z) \neq 0 \text{ とする}).$$

証明 (方針のみ) 微積分で実多変数関数の場合の命題を学んでいると思う。それらと同様に証明できる。

別証明 (方針のみ) 対応する実2変数関数 (実部、虚部) を考えて、その極限の性質に帰着させることも出来る。例えば、 $f = u_1 + iv_1$, $g = u_2 + iv_2$, $fg = u_3 + iv_3$ とするとき、 $fg = (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = u_3 + iv_3$ より $u_3 = u_1u_2 - v_1v_2$, $v_3 = u_1v_2 + v_1u_2$ であり、 u_3 と v_3 は、 u_1, u_2, v_1, v_2 から和・差・積で出来ているので収束する。ゆえに fg は… \square

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

系 7.4

連続な複素関数の和・差・積・商(ただし商の場合は分母が0にならない範囲で考える)は連続である。

この応用、あるいは系として、以下が得られる。

複素係数の多項式

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \text{ は複素数の定数})$$

に対して多項式関数 $P: \mathbb{C} \ni z \mapsto P(z) \in \mathbb{C}$ は連続である。

z を変数とする複素係数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[z]$ で表す。

複素係数の有理式

$$r(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z], p(z) \neq 0)$$

に対して、有理関数 $r: \Omega \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\}$ は連続である。

定義 7.5 (微分可能, 正則)

簡単のため、 Ω は \mathbb{C} の開集合とし、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \Omega$ とする。 f が c で**微分可能** (differentiable) であるとは、極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このときこの極限を $f'(c)$ と表し、 f の c における**微分係数** (the derivative of f at c) と呼ぶ。**導関数** (derivative, derived function) などの言葉の使い方は、実関数のときと同様に定義する。

Ω の任意の点 z に対して、 f が z で微分可能であるとき、 f は Ω で**正則** (regular, 整型, holomorphic) であるという。

2.4.2 例

例 7.6 (正則な関数の例)

$f(z) = \gamma$ (定数関数) と $g(z) = z$ は、 \mathbb{C} 全体で定義されて正則である。

実際、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma - \gamma}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

であるから、 f は z で微分可能で $f'(z) = 0$ 。 f は \mathbb{C} 全体で正則である。

また

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h-z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

であるから、 g は z で微分可能で $g'(z) = 1$ 。 g は \mathbb{C} 全体で正則である。

2.4.3 微分可能な関数の和・差・積・商

命題 7.7 (微分可能な関数の和・差・積・商)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $c \in \Omega$ とする。 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ と $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が c で微分可能ならば、 $f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$ (ただし $g(c) \neq 0$ とする) も c で微分可能であり、

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c),$$

$$(f - g)'(c) = f'(c) - g'(c),$$

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}.$$

証明.

実関数の場合と同様である。 □

2.4.4 多項式と有理関数の正則性

系 7.8 (多項式と有理関数の正則性)

- ① 任意の自然数 k に対して、 $f(z) = z^k$ は \mathbb{C} で正則で、 $f'(z) = kz^{k-1}$.
- ② 任意の複素係数多項式の定める関数は \mathbb{C} 上で正則である。

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k z^k \right)' = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.$$

(2つめの等式がすらすら導けるように。「 $k-1=j$ とおくと…」)

- ③ 任意の複素係数有理式 $r(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $p(z)$ は零多項式ではない) の定める関数 $r: \Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\} \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$ は正則である。

2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法

合成関数の微分法 f と g が合成可能で、 f が c で、 g が $f(c)$ で微分可能ならば、 $g \circ f$ は c で微分可能で

$$(1) \quad (g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

あるいは $w = f(z)$, $\zeta = g(w)$ とするとき、合成関数 $\zeta = g(f(z))$ について

$$(2) \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dw} \frac{dw}{dz}.$$

逆関数の微分法 関数 $w = f(z)$ が微分可能かつ全単射であるとき、逆関数 $z = f^{-1}(w)$ について

$$(3) \quad \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} \quad (\text{ただし } dw/dz \neq 0 \text{ とする})$$

も成り立つ (逆関数定理が重要だが、それは §2.5.5 で説明する)。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート。
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf>
(2014～).
- [2] 杉浦光夫：解析入門 I，東京大学出版会 (1980)，詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843>
でアクセスできる。この eBook まともな目次を付けてほしい。