複素関数・同演習 第8回

～ Cauchy-Riemann 方程式 ～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022年10月12日(土曜)

目次

本日の内容・連絡事項

- 昨日の授業で言ったことの繰り返し: 次週 10 月 19 日 (水曜)2 限の「複素関数演習」は休講となる。その補講を今週 10 月 15 日 (土曜) に 312 教室で行う。(いつものように) 当日晩にWWW サイトで授業スライドを公開する。
- §2.5 Cauchy-Riemann の方程式を解説する。ここは重要で、ゆっくりと解説する。複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性と同値であるが、微分については Cauchy-Riemann 方程式という条件がつくのは、不思議に感じられる。正則関数と調和関数との関係、等角性、逆関数定理など、色々なことに話がつながる。

本日の内容・連絡事項

- 昨日の授業で言ったことの繰り返し: 次週 10 月 19 日 (水曜)2 限の「複素関数演習」は休講となる。その補講を今週 10 月 15 日 (土曜) に 312 教室で行う。(いつものように) 当日晩にWWW サイトで授業スライドを公開する。
- §2.5 Cauchy-Riemann の方程式を解説する。ここは重要で、ゆっくりと解説する。複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性と同値であるが、微分については Cauchy-Riemann 方程式という条件がつくのは、不思議に感じられる。正則関数と調和関数との関係、等角性、逆関数定理など、色々なことに話がつながる。
- 宿題 4 を出します (〆切は 10 月 18 日 (火曜) 13:30)。

定理 8.1 (複素関数が微分可能 $\Leftrightarrow$ 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c = a + bi \in \Omega$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とする。f が c で微分可能であるためには、f の実部 u と虚部 v が (a, b) で (全) 微分可能でかつ

$$(\text{☆}) \qquad u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b)$$

を満たすことが必要十分である。

定理 8.1 (複素関数が微分可能 ⇔ 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c=a+bi\in\Omega$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とする。f が c で微分可能であるためには、f の実部 u と虚部 v が (a,b) で (全) 微分可能でかつ

$$(☆)\qquad u_x(a,b)=v_y(a,b),\quad u_y(a,b)=-v_x(a,b)$$

を満たすことが必要十分である。

(☆) を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

定理 8.1 (複素関数が微分可能 ⇔ 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c=a+bi\in\Omega$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とする。f が c で微分可能であるためには、f の実部 u と虚部 v が (a,b) で (全) 微分可能でかつ

$$(\text{☆})\qquad u_x(a,b)=v_y(a,b),\quad u_y(a,b)=-v_x(a,b)$$

を満たすことが必要十分である。

(☆) を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

(復習) f の実部 u, 虚部 v は、$u\colon\widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}$, $v\colon\widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}$,

$$u(x,y):=\operatorname{Re}f(x+yi),\quad v(x,y):=\operatorname{Im}f(x+yi)\quad((x,y)\in\widetilde{\Omega})$$

で定義される関数である。ただし

$$\widetilde{\Omega}:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x+yi\in\Omega\right\}.$$

例 8.2 (正則関数が Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを見る)

正則な $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $f(z) = e^z$ $(z \in \mathbb{C})$ などが、Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを確かめてみよう。

例 8.3 (微分可能でないことの証明に使ってみる)

$f(z) = \mathrm{Re}\, z$, $f(z) = \mathrm{Im}\, z$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \bar{z}$ (以上は　$\mathbb{C}$ で定義されている), $f(z) = \mathrm{Arg}\, z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $f(z) = \log|z|$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ は任意の z に対して、z で微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いると簡単である。

2.5.1 微分可能性の必要十分条件　例

例 8.3 (微分可能でないことの証明に使ってみる)

$f(z) = \mathrm{Re}\, z$, $f(z) = \mathrm{Im}\, z$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \overline{z}$ (以上は　$\mathbb{C}$ で定義されている), $f(z) = \mathrm{Arg}\, z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $f(z) = \log|z|$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ は任意の z に対して、z で微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いると簡単である。

$f(z) = \log|z|$ の場合に証明してみよう。

例 8.3 (微分可能でないことの証明に使ってみる)

$f(z)=\operatorname{Re} z$, $f(z)=\operatorname{Im} z$, $f(z)=|z|$, $f(z)=\bar{z}$ (以上は　$\mathbb{C}$ で定義されている), $f(z)=\operatorname{Arg} z$ ($z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$), $f(z)=\log|z|$ ($z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$) は任意の z に対して、z で微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いると簡単である。

$f(z)=\log|z|$ の場合に証明してみよう。

実部 $u(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)$, 虚部 $v(x,y)=0$ である。定義域は $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

例 8.3 (微分可能でないことの証明に使ってみる)

$f(z)=\operatorname{Re} z$, $f(z)=\operatorname{Im} z$, $f(z)=|z|$, $f(z)=\bar{z}$ (以上は　$\mathbb{C}$ で定義されている), $f(z)=\operatorname{Arg} z$ ($z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$), $f(z)=\log|z|$ ($z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$) は任意の z に対して、z で微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いると簡単である。

$f(z)=\log|z|$ の場合に証明してみよう。

実部 $u(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)$, 虚部 $v(x,y)=0$ である。定義域は $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

ゆえに $u_x(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $u_y(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $v_x(x,y)=0$, $v_y(x,y)=0$.
$x\neq 0$ であれば $u_x\neq v_y$, $y\neq 0$ であれば $u_y\neq -v_x$. ゆえに任意の点で Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。

例 8.3 (微分可能でないことの証明に使ってみる)

$f(z)=\operatorname{Re} z$, $f(z)=\operatorname{Im} z$, $f(z)=|z|$, $f(z)=\bar{z}$ (以上は　$\mathbb{C}$ で定義されている), $f(z)=\operatorname{Arg} z$ ($z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$), $f(z)=\log|z|$ ($z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$) は任意の z に対して、z で微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いると簡単である。

$f(z)=\log|z|$ の場合に証明してみよう。

実部 $u(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)$, 虚部 $v(x,y)=0$ である。定義域は $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

ゆえに $u_x(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $u_y(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $v_x(x,y)=0$, $v_y(x,y)=0$.
$x\neq 0$ であれば $u_x\neq v_y$, $y\neq 0$ であれば $u_y\neq -v_x$. ゆえに任意の点で Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。

以上より、任意の点 (x,y) において、「u と v は (全) 微分可能で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ」という条件は満たさない。ゆえに f は微分可能でない。 □

2.5.1 微分可能性の必要十分条件　Cauchy-Riemann 方程式の導出

定理 8.1 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

1

定理 8.1 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ で微分可能ならば、u と v は (a, b) で偏微分可能で、

$$(\sharp) \qquad f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i}\left(u_y(a, b) + iv_y(a, b)\right)$$

が成り立つ。

1

定理 8.1 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ で微分可能ならば、u と v は (a, b) で偏微分可能で、

$$(\sharp) \qquad f'(c) = u_x(a,b) + iv_x(a,b) = \frac{1}{i}\left(u_y(a,b) + iv_y(a,b)\right)$$

が成り立つ。特に実部・虚部を比較して $u_x(a,b) = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$.

1

定理 8.1 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ で微分可能ならば、u と v は (a,b) で偏微分可能で、

$$(\sharp)\qquad f'(c)=u_x(a,b)+iv_x(a,b)=\frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right)$$

が成り立つ。特に実部・虚部を比較して $u_x(a,b)=v_y(a,b)$, $u_y(a,b)=-v_x(a,b)$.

(($\sharp$) を $f'=f_x=\dfrac{1}{i}f_y$ と書く人もいる。記号の濫用だが [1] 分かりやすいかも。)

証明

[1] うるさく言うと、f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、f_x, f_y という書き方は変である。

定理 8.1 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ で微分可能ならば、u と v は (a, b) で偏微分可能で、

$$(\sharp) \qquad f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i}\left(u_y(a, b) + iv_y(a, b)\right)$$

が成り立つ。特に実部・虚部を比較して $u_x(a, b) = v_y(a, b)$, $u_y(a, b) = -v_x(a, b)$.

$((\sharp)$ を $f' = f_x = \dfrac{1}{i} f_y$ と書く人もいる。記号の濫用だが[1]分かりやすいかも。)

証明　f が c で微分可能とは、

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

が存在することであるが、$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。

(次のスライドに続く)

[1] うるさく言うと、f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、f_x, f_y という書き方は変である。

(a) $h_y = 0$ のとき (水平移動)、すなわち $h = h_x$ ($h_x \in \mathbb{R}$) (実数の値だけを取る) $f(c + h_x) = u(a + h_x, b) + iv(a + h_x, b)$ に注意すると、

$$f'(c) = \lim_{\substack{h_x \to 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c + h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \to 0} \frac{(u(a + h_x, b) + iv(a + h_x, b)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{h_x}$$

$$= \lim_{h_x \to 0} \left(\frac{u(a + h_x, b) - u(a, b)}{h_x} + i \frac{v(a + h_x, b) - v(a, b)}{h_x} \right) = u_x(a, b) + iv_x(a, b).$$

2.5.1 微分可能性の必要十分条件　Cauchy-Riemann 方程式の導出 (続き)

(a) $h_y = 0$ のとき (水平移動)、すなわち $h = h_x$ ($h_x \in \mathbb{R}$) (実数の値だけを取る)
$f(c + h_x) = u(a + h_x, b) + iv(a + h_x, b)$ に注意すると、

$$f'(c) = \lim_{\substack{h_x \to 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \to 0} \frac{(u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{h_x}$$

$$= \lim_{h_x \to 0} \left(\frac{u(a+h_x, b) - u(a,b)}{h_x} + i \frac{v(a+h_x, b) - v(a,b)}{h_x} \right) = u_x(a,b) + iv_x(a,b).$$

(b) $h_x = 0$ のとき (垂直移動)、すなわち $h = ih_y$ ($h_y \in \mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る)
$f(c + ih_y) = u(a, b + h_y) + iv(a, b + h_y)$ に注意すると、

$$f'(c) = \lim_{\substack{h_y \to 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+ih_y) - f(c)}{ih_y} = \lim_{h_y \to 0} \frac{(u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{ih_y}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{h_y \to 0} \left(\frac{u(a, b+h_y) - u(a,b)}{h_y} + i \frac{v(a, b+h_y) - v(a,b)}{h_y} \right) = \frac{1}{i} \left(u_y(a,b) + iv_y(a,b)\right)$$

(a) $h_y = 0$ のとき (水平移動)、すなわち $h = h_x$ ($h_x \in \mathbb{R}$) (実数の値だけを取る)
$f(c + h_x) = u(a + h_x, b) + iv(a + h_x, b)$ に注意すると、

$$f'(c) = \lim_{\substack{h_x \to 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c + h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \to 0} \frac{(u(a + h_x, b) + iv(a + h_x, b)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{h_x}$$

$$= \lim_{h_x \to 0} \left(\frac{u(a + h_x, b) - u(a, b)}{h_x} + i \frac{v(a + h_x, b) - v(a, b)}{h_x} \right) = u_x(a, b) + iv_x(a, b).$$

(b) $h_x = 0$ のとき (垂直移動)、すなわち $h = ih_y$ ($h_y \in \mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る)
$f(c + ih_y) = u(a, b + h_y) + iv(a, b + h_y)$ に注意すると、

$$f'(c) = \lim_{\substack{h_y \to 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c + ih_y) - f(c)}{ih_y} = \lim_{h_y \to 0} \frac{(u(a, b + h_y) + iv(a, b + h_y)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{ih_y}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{h_y \to 0} \left(\frac{u(a, b + h_y) - u(a, b)}{h_y} + i \frac{v(a, b + h_y) - v(a, b)}{h_y} \right) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b))$$

以上から

$$f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} [u_y(a, b) + iv_y(a, b)] = v_y(a, b) - iu_y(a, b).$$

2.5.1 微分可能性の必要十分条件　Cauchy-Riemann 方程式の導出 (続き)

(a) $h_y = 0$ のとき (水平移動)、すなわち $h = h_x$ ($h_x \in \mathbb{R}$) (実数の値だけを取る) $f(c+h_x) = u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)$ に注意すると、

$$f'(c) = \lim_{\substack{h_x \to 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \to 0} \frac{(u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{h_x}$$

$$= \lim_{h_x \to 0} \left(\frac{u(a+h_x, b) - u(a,b)}{h_x} + i \frac{v(a+h_x, b) - v(a,b)}{h_x} \right) = u_x(a,b) + iv_x(a,b).$$

(b) $h_x = 0$ のとき (垂直移動)、すなわち $h = ih_y$ ($h_y \in \mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る) $f(c+ih_y) = u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)$ に注意すると、

$$f'(c) = \lim_{\substack{h_y \to 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+ih_y) - f(c)}{ih_y} = \lim_{h_y \to 0} \frac{(u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{ih_y}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{h_y \to 0} \left(\frac{u(a, b+h_y) - u(a,b)}{h_y} + i \frac{v(a, b+h_y) - v(a,b)}{h_y} \right) = \frac{1}{i} \left(u_y(a,b) + iv_y(a,b) \right)$$

以上から

$$f'(c) = u_x(a,b) + iv_x(a,b) = \frac{1}{i} \left[u_y(a,b) + iv_y(a,b) \right] = v_y(a,b) - iu_y(a,b).$$

実部・虚部を比較して、

$$u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad v_x(a,b) = -iu_y(a,b). \quad \square$$

定理 8.1 の証明

f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p + iq) \right| = 0$$

が成り立つことを意味する。

定理 8.1 の証明

f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p,q\in\mathbb{R})\quad \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-(p+iq)\right|=0$$

が成り立つことを意味する。方針: u, v, p, q で表す。

定理 8.1 の証明

f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p + iq) \right| = 0$$

が成り立つことを意味する。方針: u, v, p, q で表す。

$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ とおくと

$$f(c+h) - f(c) = u(a + h_x, b + h_y) - u(a, b) + i\left(v(a + h_x, b + h_y) - v(a, b)\right),$$
$$(p + iq)h = (p + iq)(h_x + ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y)$$

であるから

定理 8.1 の証明

f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| = 0$$

が成り立つことを意味する。方針: u, v, p, q で表す。

$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ とおくと

$$f(c+h) - f(c) = u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) + i\left(v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b)\right),$$
$$(p+iq)h = (p+iq)(h_x + ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y)$$

であるから

$$\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right|$$
$$= \frac{|f(c+h) - f(c) - (p+iq)h|}{|h|}$$
$$= \left| \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} + i \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right|.$$

ゆえに

f が c で微分可能

$$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \lim_{(h_x, h_y)\to(0,0)} \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$$\text{かつ} \lim_{(h_x, h_y)\to(0,0)} \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R})$　u と v は (a,b) で (全) 微分可能で

$u_x(a,b) = p,\ u_y(a,b) = -q,\ v_x(a,b) = q,\ v_y(a,b) = p$

$\Leftrightarrow u$ と v は (a,b) で (全) 微分可能で $u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b).$ □

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理**??** (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理**??** (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理**??** (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理**??** (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理**??** (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理**??** (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理**??** (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。
定義域が何であるかも重要である。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理?? (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。
反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。
定義域が何であるかも重要である。

多変数の場合も、同様のことをしたければ、**(弧) 連結性**の概念が必要になる。

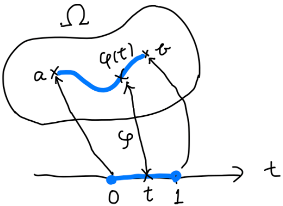
2.5.2 正則関数が定数となる場合

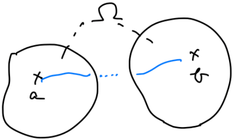
定義 8.4 (弧連結, 領域)

$\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。

(すなわち、Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ で、$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。





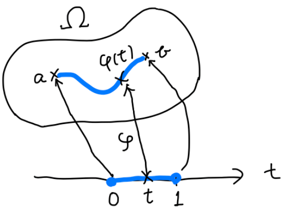
弧連結でない

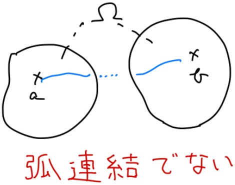
2.5.2 正則関数が定数となる場合

定義 8.4 (弧連結, 領域)

$\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結**(こ) (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。
(すなわち、Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ で、$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。





直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、Ω が 1 つの島からなる国であることである。2 つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを**弧連結成分**と呼ぶ。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

注意 8.5 (上の定義は実は普通でない)

普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- 「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- $\mathbb{R}^\ell$ の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

という二つの理由から、上のように定義することにした。 $\square$

$\mathbb{R}$ の部分集合 I について、I が区間 $\Leftrightarrow$ I は弧連結。

問 このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

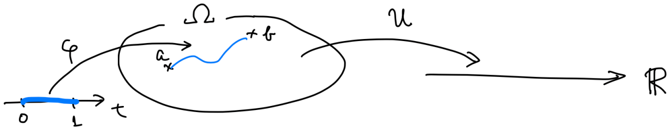
Ω が弧連結な開集合 (領域) のとき、Ω の任意の 2 点は C^1 級の曲線で結べる。つまり上の定義の φ として、単に連続であるだけでなく、C^1 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 8.6 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域 (連結な開集合)、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。

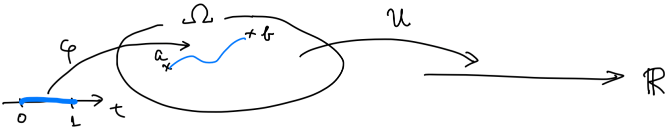


2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 8.6 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域 (連結な開集合)、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



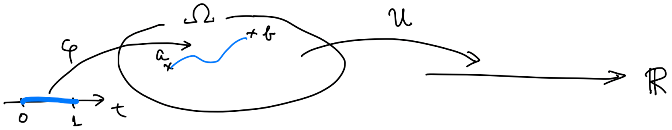
証明　任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 8.6 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域 (連結な開集合)、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明　任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

このとき、$F(t) := u(\varphi(t))$ $(t \in [0,1])$ とおくと

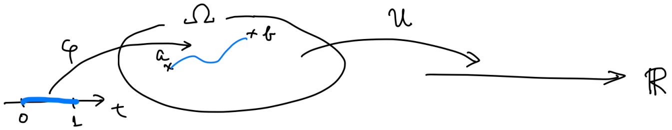
$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 8.6 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域 (連結な開集合)、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明 任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

このとき、$F(t) := u(\varphi(t))$ $(t \in [0,1])$ とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

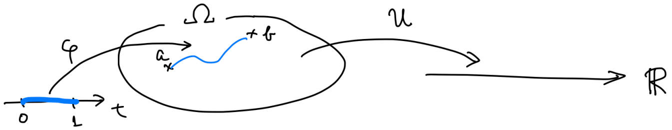
ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$. ゆえに $u(a) = u(b)$.

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 8.6 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域 (連結な開集合)、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明　任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

このとき、$F(t) := u(\varphi(t))$ $(t \in [0,1])$ とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$. ゆえに $u(a) = u(b)$.

(実際 $u(a) = u(\varphi(0)) = F(0) = F(1) = u(\varphi(1)) = u(b)$.)

以上より u は Ω 全体で定数関数である。 □

10 月 12 日の授業はここで時間切れとなりました。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf (2014〜).