# 複素関数・同演習第 9 回

～ Cauchy-Riemann 方程式 (2), 冪級数 (1) ～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 10 月 15 日

補講なのでいつもと場所が違い 312 教室

# 目次

# 本日の内容・連絡事項

- 本日は Cauchy-Riemann 方程式 (講義ノート [1] の §2.5 後半) を解説した後、いよいよ冪級数 ([1] の §3) に入ります。
- 宿題 5 は次回 10 月 18 日 (火曜)3 限の授業に出します (〆切は 10 月 25 日 13:30)。
- 宿題 4 の解説は次回に行います。

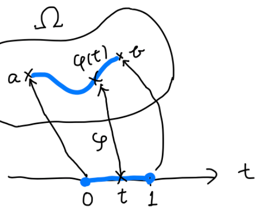
# 2.5.2 正則関数が定数となる場合 (続き)

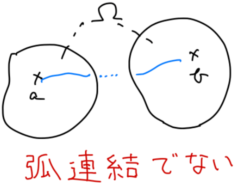
## 定義 9.1 (弧連結, 領域 (再提示))

$\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結**(こ) (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、$\Omega$ 内の任意の 2 点が $\Omega$ 内の曲線で結べることをいう。

(すなわち、$\Omega$ の任意の 2 点 $a, b$ に対して、連続関数 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ で、$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、$\Omega$ は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。



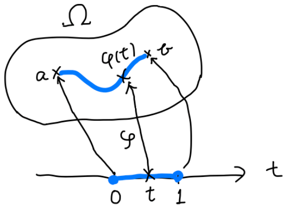
# 2.5.2 正則関数が定数となる場合 (続き)

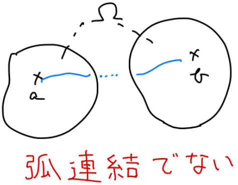
## 定義 9.1 (弧連結, 領域 (再提示))

$\Omega \subset \mathbb{R}^{\ell}$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結**(こ) (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、$\Omega$ 内の任意の 2 点が $\Omega$ 内の曲線で結べることをいう。

(すなわち、$\Omega$ の任意の 2 点 $a$, $b$ に対して、連続関数 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ で、$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、$\Omega$ は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。




直観的には、平面図形 $\Omega$ が弧連結であるとは、$\Omega$ が 1 つの島からなる国であることである。2 つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを**弧連結成分**と呼ぶ。

# 2.5.2 正則関数が定数となる場合

## 注意 9.2 (上の定義は実は普通でない)

普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- 「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- $\mathbb{R}^\ell$ の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

という二つの理由から、上のように定義することにした。 □

$\mathbb{R}$ の部分集合 $I$ について、$I$ が区間 $\Leftrightarrow$ $I$ は弧連結。

**問** このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

$\Omega$ が弧連結な開集合 (領域) のとき、$\Omega$ の任意の 2 点は $C^1$ 級の曲線で結べる。つまり上の定義の $\varphi$ として、単に連続であるだけでなく、$C^1$ 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)。

## 2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

**定理 9.3 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)**

$\Omega$ は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

1. $f$ の実部または虚部が定数関数ならば、$f$ 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、$f$ 自身が定数関数である。

# 2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

**定理 9.3 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)**

$\Omega$ は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

1. $f$ の実部または虚部が定数関数ならば、$f$ 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、$f$ 自身が定数関数である。

**証明** $\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + yi \in \Omega\right\}$ とおく。

1. 実部が定数関数の場合を証明する。$f$ の実部、虚部をそれぞれ $u$, $v$ とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、$u_x = u_y = 0$ in $\widetilde{\Omega}$.

## 2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

**定理 9.3 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)**

$\Omega$ は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

1. $f$ の実部または虚部が定数関数ならば、$f$ 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、$f$ 自身が定数関数である。

**証明** $\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+yi \in \Omega\right\}$ とおく。

1. 実部が定数関数の場合を証明する。$f$ の実部、虚部をそれぞれ $u$, $v$ とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、$u_x = u_y = 0$ in $\widetilde{\Omega}$.
   Cauchy-Riemann の方程式
   $$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$
   が成り立つので、$v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\widetilde{\Omega}$.

## 2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

**定理 9.3 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)**

$\Omega$ は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

1. $f$ の実部または虚部が定数関数ならば、$f$ 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、$f$ 自身が定数関数である。

**証明** $\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+yi \in \Omega\right\}$ とおく。

1. 実部が定数関数の場合を証明する。$f$ の実部、虚部をそれぞれ $u$, $v$ とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、$u_x = u_y = 0$ in $\widetilde{\Omega}$.

   Cauchy-Riemann の方程式

   $$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

   が成り立つので、$v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\widetilde{\Omega}$. 補題 8.6 より、$v$ は定数関数である。ゆえに $f = u + iv$ も定数関数である。

# 2.5.2 正則関数が定数となる場合

2. $|f| = C$ ($C$ は定数) とおく。
   $C = 0$ であれば $f = 0$ (in $\Omega$) であるから、$f$ は定数関数である。
   以下 $C \neq 0$ とする。

# 2.5.2 正則関数が定数となる場合

2. $|f| = C$ ($C$ は定数) とおく。
   $C = 0$ であれば $f = 0$ (in $\Omega$) であるから、$f$ は定数関数である。
   以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

## 2.5.2 正則関数が定数となる場合

2. $|f| = C$ ($C$ は定数) とおく。
$C = 0$ であれば $f = 0$ (in $\Omega$) であるから、$f$ は定数関数である。
以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して ($v_x$, $v_y$ を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

# 2.5.2 正則関数が定数となる場合

2. $|f| = C$ ($C$ は定数) とおく。
   $C = 0$ であれば $f = 0$ (in $\Omega$) であるから、$f$ は定数関数である。
   以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、
   $$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$
   Cauchy-Riemann 方程式を代入して ($v_x$, $v_y$ を消去して)
   $$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$
   すなわち
   $$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$
   任意の $(x, y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

# 2.5.2 正則関数が定数となる場合

2. $|f| = C$ ($C$ は定数) とおく。
$C = 0$ であれば $f = 0$ (in $\Omega$) であるから、$f$ は定数関数である。
以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して ($v_x$, $v_y$ を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x, y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)

$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

# 2.5.2 正則関数が定数となる場合

2. $|f| = C$ ($C$ は定数) とおく。
$C = 0$ であれば $f = 0$ (in $\Omega$) であるから、$f$ は定数関数である。
以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して ($v_x$, $v_y$ を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x, y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)

$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

これから $u_x = u_y = 0$ (in $\widetilde{\Omega}$). 補題 8.6 より、$u$ は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。(1) より $f$ は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。 □

## 2.5.2 正則関数が定数となる場合

前回の例 8.3 ($\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$, $\log |z|$ は定義域に属する任意の点で微分できない) と見比べると良い。

# 2.5.2 正則関数が定数となる場合

前回の例 8.3 ($\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$, $\log|z|$ は定義域に属する任意の点で微分できない) と見比べると良い。$\overline{z}$ を除いて実数値関数であり、虚部が 0 であるから、もし正則ならば定数関数であるが、定数でないことはすぐ分かるので、正則でない。

# 2.5.2 正則関数が定数となる場合

前回の例 8.3 ($\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$, $\log|z|$ は定義域に属する任意の点で微分できない) と見比べると良い。$\bar{z}$ を除いて実数値関数であり、虚部が 0 であるから、もし正則ならば定数関数であるが、定数でないことはすぐ分かるので、正則でない。

正則でないことは、任意の点 $z$ に対して微分可能でないことと同値ではないが (部分否定と全否定)、わかりやすく感じる人が多いだろう。

# 2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Omega$ で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

を満たすとき、$u$ は**調和関数** (harmonic function) であるという。

## 2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Omega$ で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

を満たすとき、$u$ は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。非常に重要な偏微分方程式である。

## 2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Omega$ で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

(1)
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすとき、$u$ は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。非常に重要な偏微分方程式である。

(2)
$$\triangle := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

で定義される微分作用素 $\triangle$ を **Laplace 作用素** (Laplace operator, Laplacian) とよぶ。これを用いると (1) は

(3)
$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

と表せる。

# 2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Omega$ で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

(1)
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすとき、$u$ は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。非常に重要な偏微分方程式である。

(2)
$$\triangle := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

で定義される微分作用素 $\triangle$ を **Laplace 作用素** (Laplace operator, Laplacian) とよぶ。これを用いると (1) は

(3)
$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

と表せる。

(ベクトル解析既習者向け) $\triangle$ のことを $\nabla^2$ とも書く ($\triangle u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u) = \nabla \cdot (\nabla u)$ だから)。

## 2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果である。

**定理 9.4 (正則関数の実部虚部は調和関数である)**

$\Omega$ は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、$f$ の実部・虚部 $u$, $v$ は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち $u$ と $v$ は調和関数である

# 2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果である。

**定理 9.4 (正則関数の実部虚部は調和関数である)**

$\Omega$ は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則とするとき、$f$ の実部・虚部 $u, v$ は

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=0\quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega}:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+iy\in\Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち $u$ と $v$ は調和関数である

**証明**　後で「$f$ が正則ならば、$f$ は何回でも微分可能」という定理を証明する。先走ってそれを認めることにする。$u$ と $v$ は $C^\infty$ 級である。

## 2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果である。

**定理 9.4 (正則関数の実部虚部は調和関数である)**

$\Omega$ は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、$f$ の実部・虚部 $u$, $v$ は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち $u$ と $v$ は調和関数である

**証明** 後で「$f$ が正則ならば、$f$ は何回でも微分可能」という定理を証明する。先走ってそれを認めることにする。$u$ と $v$ は $C^\infty$ 級である。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、$v$ が $C^2$ 級であることによる ($v$ の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

# 2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果である。

**定理 9.4 (正則関数の実部虚部は調和関数である)**

$\Omega$ は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、$f$ の実部・虚部 $u$, $v$ は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち $u$ と $v$ は調和関数である

**証明**　後で「$f$ が正則ならば、$f$ は何回でも微分可能」という定理を証明する。先走ってそれを認めることにする。$u$ と $v$ は $C^\infty$ 級である。
Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、$v$ が $C^2$ 級であることによる ($v$ の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。
同様にして $v_{xx} + v_{yy} = 0$ も証明できる。 □

# 2.5.3 正則関数と調和関数

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短に述べられる。

# 2.5.3 正則関数と調和関数

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短に述べられる。

$\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された 2 つの調和関数 $u$, $v$ が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

を満たすとき、$v$ を $u$ の**共役調和関数** (conjugate harmonic function of $u$) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

# 2.5.3 正則関数と調和関数

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短に述べられる。
$\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された 2 つの調和関数 $u$, $v$ が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

を満たすとき、$v$ を $u$ の**共役調和関数** (conjugate harmonic function of $u$) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

**注意 9.5 (ときどきある勘違いを注意しておく)**

$v$ が $u$ の共役調和関数であるとき、$u$ は $v$ の共役調和関数であるとは限らない。実際、$u$ が $v$ の調和関数であるとは

$$v_x = u_y \quad \text{かつ} \quad v_y = -u_x$$

が成り立つことを意味するが、$v$ が $u$ の共役調和関数であれば

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ が導かれ、$u$ と $v$ は定数関数となる。

# 2.5.3 正則関数と調和関数

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短に述べられる。

$\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された 2 つの調和関数 $u$, $v$ が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

を満たすとき、$v$ を $u$ の**共役調和関数** (conjugate harmonic function of $u$) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

**注意 9.5 (ときどきある勘違いを注意しておく)**

$v$ が $u$ の共役調和関数であるとき、$u$ は $v$ の共役調和関数であるとは限らない。実際、$u$ が $v$ の調和関数であるとは

$$v_x = u_y \quad \text{かつ} \quad v_y = -u_x$$

が成り立つことを意味するが、$v$ が $u$ の共役調和関数であれば

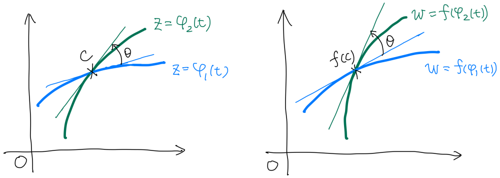
$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ が導かれ、$u$ と $v$ は定数関数となる。

**(蛇足** $w$ が $z$ の共役複素数であるとき、$z$ は $w$ の共役複素数である ($w = \overline{z} \Rightarrow z = \overline{w}$)。それと同じように勘違いしないこと。)

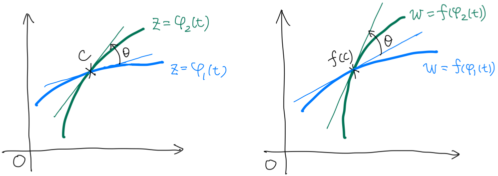
# 2.5.4 等角性

正則関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。



# 2.5.4 等角性

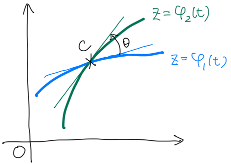
正則関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。

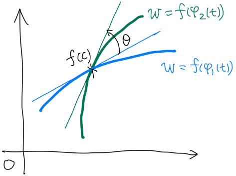



**理由の説明 (ていねい化すると証明になる)**　$\Omega$ 内の曲線 $z = \varphi(t)$ $(t \in I)$ を関数 $w = f(z)$ $(z \in \Omega)$ でうつすと、曲線 $w = f(\varphi(t))$ $(t \in I)$ が得られる。

# 2.5.4 等角性

正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。



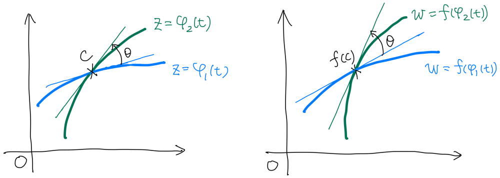

**理由の説明 (ていねい化すると証明になる)** $\Omega$ 内の曲線 $z=\varphi(t)$ $(t \in I)$ を関数 $w=f(z)$ $(z \in \Omega)$ でうつすと、曲線 $w=f(\varphi(t))$ $(t \in I)$ が得られる。

$$c=\varphi(t_0), \quad t_0 \in I, \quad f'(c)=\rho e^{i\phi} \quad (\rho>0,\ \phi \in \mathbb{R})$$

とする。

# 2.5.4 等角性

正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。




**理由の説明 (ていねい化すると証明になる)**　$\Omega$ 内の曲線 $z = \varphi(t)$ $(t \in I)$ を関数 $w = f(z)$ $(z \in \Omega)$ でうつすと、曲線 $w = f(\varphi(t))$ $(t \in I)$ が得られる。

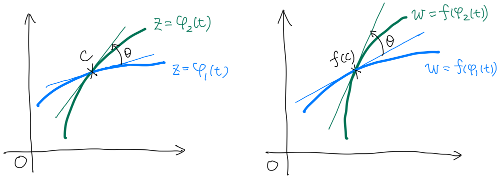
$$c = \varphi(t_0), \quad t_0 \in I, \quad f'(c) = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0,\ \phi \in \mathbb{R})$$

とする。

- 曲線 $\varphi$ の $c$ における接ベクトルは $\varphi'(t_0)$ (の正数倍).

# 2.5.4 等角性

正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。




**理由の説明 (ていねい化すると証明になる)**　$\Omega$ 内の曲線 $z=\varphi(t)$ $(t \in I)$ を関数 $w=f(z)$ $(z \in \Omega)$ でうつすと、曲線 $w=f(\varphi(t))$ $(t \in I)$ が得られる。

$$c=\varphi(t_0), \quad t_0 \in I, \quad f'(c)=\rho e^{i\phi} \quad (\rho>0,\ \phi \in \mathbb{R})$$

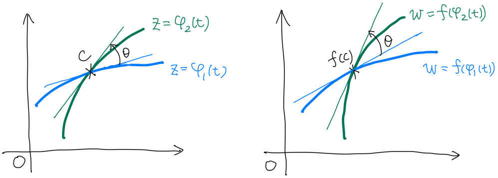
とする。

- 曲線 $\varphi$ の $c$ における接ベクトルは $\varphi'(t_0)$ (の正数倍).
- 曲線 $f \circ \varphi$ の $f(c)$ における接ベクトルは

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi(t)))\Big|_{t=t_0} = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = f'(c)\varphi'(t_0) = \rho e^{i\phi}\varphi'(t_0) \quad (\text{の正数倍}).$$

# 2.5.4 等角性

正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。




**理由の説明 (ていねい化すると証明になる)**　$\Omega$ 内の曲線 $z = \varphi(t)$ $(t \in I)$ を関数 $w = f(z)$ $(z \in \Omega)$ でうつすと、曲線 $w = f(\varphi(t))$ $(t \in I)$ が得られる。

$$c = \varphi(t_0), \quad t_0 \in I, \quad f'(c) = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0,\ \phi \in \mathbb{R})$$

とする。

- 曲線 $\varphi$ の $c$ における接ベクトルは $\varphi'(t_0)$ (の正数倍).
- 曲線 $f \circ \varphi$ の $f(c)$ における接ベクトルは

$$\left.\frac{d}{dt}(f(\varphi(t)))\right|_{t=t_0} = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = f'(c)\varphi'(t_0) = \rho e^{i\phi}\varphi'(t_0) \quad (\text{の正数倍}).$$

$\cdots$ ゆえに曲線によらない ($f$ だけで定まる) 共通の角度 $\phi$ だけ偏角が変化する。

## 2.5.4 等角性

# 2.5.4 等角性

一般に、定義域 $\Omega$ 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 $f$ を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

# 2.5.4 等角性

一般に、定義域 $\Omega$ 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 $f$ を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

等角写像が等角性を持つことが、複素関数の範疇で説明ができたけれど、対応する実多変数関数で表して調べてみる。

$$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} c \\ \operatorname{Im} c \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{f} \colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$,

# 2.5.4 等角性

一般に、定義域 $\Omega$ 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 $f$ を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

等角写像が等角性を持つことが、複素関数の範疇で説明ができたけれど、対応する実多変数関数で表して調べてみる。

$$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, c \\ \mathrm{Im}\, c \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

# 2.5.4 等角性

一般に、定義域 $\Omega$ 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 $f$ を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

等角写像が等角性を持つことが、複素関数の範疇で説明ができたけれど、対応する実多変数関数で表して調べてみる。

$$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, c \\ \mathrm{Im}\, c \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

なぜならば、$\boldsymbol{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから。ゆえに

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = |f'(c)|^2 \tag{4}$$

# 2.5.4 等角性

一般に、定義域 $\Omega$ 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 $f$ を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

等角写像が等角性を持つことが、複素関数の範疇で説明ができたけれど、対応する実多変数関数で表して調べてみる。

$$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, c \\ \mathrm{Im}\, c \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

なぜならば、$\boldsymbol{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから。

ゆえに

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = |f'(c)|^2 \quad (= p^2 + q^2). \tag{4}$$

$(f'(c) = p + qi$ となることを思い出そう。(4) はそれ自体重要な公式。)

# 2.5.4 等角性

$f'(c) = p + qi \neq 0$ を仮定して、$f'(c)$ の偏角を $\phi$ とすると

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (\text{回転と拡大}).$$

# 2.5.4 等角性

$f'(c) = p + qi \neq 0$ を仮定して、$f'(c)$ の偏角を $\phi$ とすると

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2+q^2}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (\text{回転と拡大}).$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) \fallingdotseq \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\boldsymbol{h}$$

の右辺は、$\boldsymbol{h}$ を角度 $\phi$ だけ回転して長さを $\sqrt{p^2+q^2}$ したものである。

一般に、$ad - bc \neq 0$ を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して、1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、正方形を平行四辺形に写す (歪みが生じ、角度が保存されないこともある) が、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形の 1 次変換は正方形を正方形に写す (歪まず、角度は保存される)。

以上のように考えても、等角性が成り立つことが分かる。

# 2.5.5 逆関数定理

## 定理 9.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

$f$ が正則で、$f'$ が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ の十分小さな開近傍 ($c$ を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

# 2.5.5 逆関数定理

## 定理 9.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

$f$ が正則で、$f'$ が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ の十分小さな開近傍 ($c$ を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

**略証**　微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が $C^1$ 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\widetilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、$\boldsymbol{f}$ を $\widetilde{U}$ に制限した写像

$$\boldsymbol{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\widetilde{U})$$

の $C^1$ 級の逆写像が存在する、という内容である。その定理は認めることにする。

# 2.5.5 逆関数定理

## 定理 9.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

$f$ が正則で、$f'$ が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ の十分小さな開近傍 ($c$ を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

**略証** 微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が $C^1$ 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\widetilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、$\boldsymbol{f}$ を $\widetilde{U}$ に制限した写像

$$\boldsymbol{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\widetilde{U})$$

の $C^1$ 級の逆写像が存在する、という内容である。その定理は認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 $f$ に対応する $\boldsymbol{f}$ については ($c$ に十分近い任意の $\tilde{c}$ に対して、$f'(\tilde{c}) = p + iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) とおいて)

$$\det \boldsymbol{f}'(\tilde{\boldsymbol{c}}) = \left| f'(\tilde{c}) \right|^2 \neq 0, \quad \left( \boldsymbol{f}'(\tilde{\boldsymbol{c}}) \right)^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに、対応する $f$ の局所的逆関数 $\left( f|_U \right)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

# 2.5.5 逆関数定理

## 定理 9.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

$f$ が正則で、$f'$ が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ の十分小さな開近傍 ($c$ を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

**略証**　微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が $C^1$ 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\widetilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、$\boldsymbol{f}$ を $\widetilde{U}$ に制限した写像

$$\boldsymbol{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\widetilde{U})$$

の $C^1$ 級の逆写像が存在する、という内容である。その定理は認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 $f$ に対応する $\boldsymbol{f}$ については ($c$ に十分近い任意の $\tilde{c}$ に対して、$f'(\tilde{c}) = p + iq$ $(p, q \in \mathbb{R})$ とおいて)

$$\det \boldsymbol{f}'(\tilde{\boldsymbol{c}}) = \left|f'(\tilde{c})\right|^2 \neq 0, \quad \left(\boldsymbol{f}'(\tilde{\boldsymbol{c}})\right)^{-1} = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに、対応する $f$ の局所的逆関数 $\left(f|_U\right)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。ゆえに $\left(f|_U\right)^{-1}$ は正則関数である。 □

# 2.5.5 逆関数定理

## 定理 9.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

$f$ が正則で、$f'$ が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、$c$ の十分小さな開近傍 ($c$ を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

**略証**　微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が $C^1$ 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\widetilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、$\boldsymbol{f}$ を $\widetilde{U}$ に制限した写像

$$\boldsymbol{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\widetilde{U})$$

の $C^1$ 級の逆写像が存在する、という内容である。その定理は認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 $f$ に対応する $\boldsymbol{f}$ については ($c$ に十分近い任意の $\tilde{c}$ に対して、$f'(\tilde{c}) = p + iq$ $(p, q \in \mathbb{R})$ とおいて)

$$\det \boldsymbol{f}'(\tilde{\boldsymbol{c}}) = \left|f'(\tilde{c})\right|^2 \neq 0, \quad \left(\boldsymbol{f}'(\tilde{\boldsymbol{c}})\right)^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに、対応する $f$ の局所的逆関数 $\left(f|_U\right)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。ゆえに $\left(f|_U\right)^{-1}$ は正則関数である。 □

**注**　後で「$f$ が正則ならば、$f$ は無限回微分可能」という定理を証明するので、定理の仮定に「$f'$ が連続」を入れる必要はなくなる (強い形の逆関数定理が得られる)。

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数として考えることでその本質が浮き彫りにされる。

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数として考えることでその本質が浮き彫りにされる。

**冪級数**(ベキ)とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、$c$ は複素数である。)

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数として考えることでその本質が浮き彫りにされる。

**冪級数**(ベキ)とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、$c$ は複素数である。)

**雑談**　「冪(べき)」は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。スライドでやる場合は「冪」「ベキ」が混じるかも。

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数として考えることでその本質が浮き彫りにされる。

**冪級数**(べき)とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、$c$ は複素数である。)

**雑談**　「冪(べき)」は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。スライドでやる場合は「冪」「ベキ」が混じるかも。

宿題でも「ベキ」と書いて構わない。

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数として考えることでその本質が浮き彫りにされる。

**冪級数**(ベキ)とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、$c$ は複素数である。)

**雑談**　「冪(べき)」は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。スライドでやる場合は「冪」「ベキ」が混じるかも。

宿題でも「ベキ」と書いて構わない。

ベキ級数の話はかなり長くなるので、この節で何が分かるか、少し長めのイントロ (スライド 3 枚) を用意した。

# 3.1 イントロ

「解析的 (analytic)」、「解析関数」という言葉がある。

**解析的** $\overset{\text{def.}}{=}$ 定義域の各点の近傍で収束するベキ級数に展開できる

# 3.1 イントロ

「解析的 (analytic)」、「解析関数」という言葉がある。

**解析的** $\overset{\text{def.}}{=}$ 定義域の各点の近傍で収束するベキ級数に展開できる

「解析関数」を解析的な関数という意味に取ると、実は「正則関数」と同じ意味であることが後で分かる (正則 $\Leftrightarrow$ 解析的)。一方で「解析関数」という言葉は、少し違った意味 (解析接続で定まる関数など) で使われることもある。

いくつか事実を述べる。

1. 高校生の知っている関数 (多項式関数, 有理関数, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $e^x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$) はほとんどが Taylor 展開可能である (例外は $|x|$ とか)。つまり $f\colon I \to \mathbb{R}$ に対して

$$(\forall c \in I)(\exists \varepsilon > 0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad (|x-c| < \varepsilon).$$

   これはベキ級数である (「Taylor 展開は冪級数」)。ゆえに $f$ は解析的 (実解析的) である。

   $x$ を複素変数 $z$ に置き換えると複素関数に拡張できる。それらは実は正則 (解析的) である。

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: "**収束円**" が存在する。

   $(\exists\rho\colon\ 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \land (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

# 3.1 イントロ

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: "**収束円**" が存在する。

   $(\exists\rho\colon 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

   $\rho$ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

   $\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$.
   (円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: "**収束円**" が存在する。

$(\exists\rho\colon 0 \le \rho \le +\infty)$ $(|z-c| < \rho \Rightarrow$ 収束$) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow$ 発散$)$

$\rho$ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

$\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$.
(円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

$\rho > 0$ のとき**収束ベキ級数**という。

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: "**収束円**" が存在する。

$(\exists\rho\colon 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

$\rho$ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

$\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$.
(円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

$\rho > 0$ のとき**収束ベキ級数**という。

収束円の内部ではかなり自由な演算が出来る。とても簡単 (多項式関数とあまり変わらない)。

a. 項別微分出来る。

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-c)^n.$$

冪級数は収束円 $D(c;\rho)$ 内で正則。ゆえに「解析的ならば正則」。

# 3.1 イントロ

ⓑ 項別積分が出来る。

# 3.1 イントロ

- (b) 項別積分が出来る。後で曲線 $C$ に沿う線積分 $\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 $C$ (始点 $a$, 終点 $b$ として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

# 3.1 イントロ

- (b) 項別積分が出来る。後で曲線 $C$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 $C$ (始点 $a$, 終点 $b$ として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

3. 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり $\Omega$ が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $D(c;\varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\ge 0})(\forall z \in D(c;\varepsilon)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

- (b) 項別積分が出来る。後で曲線 $C$ に沿う線積分 $\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 $C$ (始点 $a$, 終点 $b$ として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

3. 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり $\Omega$ が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c\in\Omega$ に対して、ある $\varepsilon>0$ が存在して $D(c;\varepsilon)\subset\Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\ge 0})(\forall z\in D(c;\varepsilon))\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

($\exists!$ は一意的に存在することを表す記号)
(ベキ級数の収束半径 $\rho$ は $\rho\ge\varepsilon$ を満たす、ということになる。)

# 3.1 イントロ

- ⓑ 項別積分が出来る。後で曲線 $C$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 $C$ (始点 $a$, 終点 $b$ として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

③ 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり $\Omega$ が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c\in\Omega$ に対して、ある $\varepsilon>0$ が存在して $D(c;\varepsilon)\subset\Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\geq 0})(\forall z\in D(c;\varepsilon))\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

($\exists!$ は一意的に存在することを表す記号)
(ベキ級数の収束半径 $\rho$ は $\rho\geq\varepsilon$ を満たす、ということになる。)

この節では、主に (2)(a) の証明を目標にする ((b) は積分の定義をしてから)。
(3) を証明するにはたくさんの準備が必要で、証明するのは少し後になる。

# 3.2 収束円　3.2.1 収束円の存在

**補題 9.7 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

べキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_0$ で収束するならば、$|z-c| < |z_0 - c|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

**補題 9.7 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

べキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_0$ で収束するならば、$|z-c| < |z_0 - c|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0 = c$ のとき $|z-c| < |z_0 - c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。

**補題 9.7 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
以下 $z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n = 0.$$

**補題 9.7 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
以下 $z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに (「収束する数列は有界」なので)

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

**補題 9.7 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
以下 $z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに (「収束する数列は有界」なので)

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

**補題 9.7 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
以下 $z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに (「収束する数列は有界」なので)

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

$\{b_n\}$ は公比 $\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|<1$ の等比数列であるから、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する。

**補題 9.7 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
以下 $z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに (「収束する数列は有界」なので)

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

$\{b_n\}$ は公比 $\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|<1$ の等比数列であるから、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する。優級数の定理から $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束する。 □

# 3.2.1 収束円の存在

## 定理 9.8 (優級数の定理)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、 (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

# 3.2.1 収束円の存在

## 定理 9.8 (優級数の定理)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、 (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。

# 3.2.1 収束円の存在

## 定理 9.8 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、 (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| .$$

# 3.2.1 収束円の存在

## 定理 9.8 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、 (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| \qquad .$$

# 3.2.1 収束円の存在

## 定理 9.8 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、 (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k|\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} b_k \qquad .$$

## 定理 9.8 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、 (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k|\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} b_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

$n, m$ の大小関係によらず $|S_n - S_m| \le |T_n - T_m|$ が成り立つことが分かる。

# 3.2.1 収束円の存在

## 定理 9.8 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k|\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} b_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

$n, m$ の大小関係によらず $|S_n - S_m| \le |T_n - T_m|$ が成り立つことが分かる。ゆえに

$$\sum b_n \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が Cauchy 列}$$

$$\Rightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ が収束}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ が収束.} \quad \square$$

# 参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf
(2014〜).