

複素関数・同演習第9回

～ Cauchy-Riemann 方程式 (2), 冪級数 (1) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022年10月15日
補講なのでいつもと場所が違い 312 教室

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 複素関数の極限、連続性、正則性 (続き)
 - Cauchy-Riemann の方程式 (続き)
 - 正則関数が定数となる場合 (続き)
 - 正則関数と調和関数
 - 等角性
 - 逆関数定理
- 3 冪級数
 - イントロ
 - 収束円
 - 収束円の存在
- 4 参考文献

- 本日は **Cauchy-Riemann 方程式** (講義ノート [1] の §2.5 後半) を解説した後、いよいよ **冪級数** ([1] の §3) に入ります。
- 宿題 5 は次回 10 月 18 日 (火曜)3 限の授業に出します (×切は 10 月 25 日 13:30)。
- 宿題 4 の解説は次回に行います。

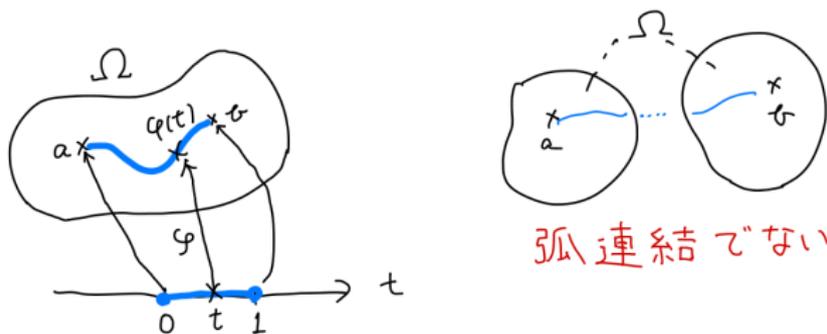
2.5.2 正則関数が定数となる場合 (続き)

定義 9.1 (弧連結, 領域 (再提示))

$\Omega \subset \mathbb{R}^l$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、 Ω 内の任意の2点が Ω 内の曲線で結べることをいう。

(すなわち、 Ω の任意の2点 a, b に対して、連続関数 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ で、 $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、 Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。



直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、 Ω が1つの島からなる国であることである。2つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを**弧連結成分**と呼ぶ。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

注意 9.2 (上の定義は実は普通でない)

普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- 「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- \mathbb{R}^l の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

という二つの理由から、上のように定義することにした。 □

\mathbb{R} の部分集合 I について、 I が区間 $\Leftrightarrow I$ は弧連結。

問 このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

Ω が弧連結な開集合 (領域) のとき、 Ω の任意の 2 点は C^1 級の曲線で結べる。つまり上の定義の φ として、単に連続であるだけでなく、 C^1 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

定理 9.3 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)

Ω は \mathbb{C} の領域 (弧連結な開集合)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とする。

- ① f の実部または虚部が定数関数ならば、 f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
- ② $|f|$ が定数関数ならば、 f 自身が定数関数である。

証明 $\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}$ とおく。

- ① 実部が定数関数の場合を証明する。 f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、 $u_x = u_y = 0$ in $\tilde{\Omega}$ 。

Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、 $v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\tilde{\Omega}$. 補題 8.6 より、 v は定数関数である。ゆえに $f = u + iv$ も定数関数である。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

② $|f| = C$ (C は定数) とおく。

$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、 f は定数関数である。

以下 $C \neq 0$ とする。 $|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \tilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v_x, v_y を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \tilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \tilde{\Omega}).$$

任意の $(x, y) \in \tilde{\Omega}$ において、 $u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)

$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad (\text{in } \tilde{\Omega}).$$

これから $u_x = u_y = 0$ (in $\tilde{\Omega}$). 補題 8.6 より、 u は $\tilde{\Omega}$ で定数関数である。(1) より f は $\tilde{\Omega}$ で定数関数である。 □

2.5.2 正則関数が定数となる場合

前回の例 8.3 ($\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$, $\log |z|$ は定義域に属する任意の点で微分できない) と見比べると良い。 \bar{z} を除いて実数値関数であり、虚部が 0 であるから、もし正則ならば定数関数であるが、定数でないことはすぐ分かるので、正則でない。

正則でないことは、任意の点 z に対して微分可能でないことと同値ではないが (部分否定と全否定)、わかりやすく感じる人が多いだろう。

2.5.3 正則関数と調和関数

\mathbb{R}^n の開集合 Ω で定義された関数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすとき、 u は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。非常に重要な偏微分方程式である。

$$(2) \quad \Delta := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

で定義される微分作用素 Δ を **Laplace 作用素** (Laplace operator, Laplacian) とよぶ。これを用いると (1) は

$$(3) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

と表せる。

(ベクトル解析既習者向け) Δ のことを ∇^2 とも書く ($\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (\nabla u)$ だから)。

2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果である。

定理 9.4 (正則関数の実部虚部は調和関数である)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とするとき、 f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (\text{in } \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\})$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である

証明 後で「 f が正則ならば、 f は何回でも微分可能」という定理を証明する。先走ってそれを認めることにする。 u と v は C^∞ 級である。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、 v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

同様にして $v_{xx} + v_{yy} = 0$ も証明できる。 □

2.5.3 正則関数と調和関数

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短かに述べられる。

\mathbb{R}^2 の開集合で定義された2つの調和関数 u, v が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

を満たすとき、 v を u の**共役調和関数** (conjugate harmonic function of u) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

注意 9.5 (ときどきある勘違いを注意しておく)

v が u の共役調和関数であるとき、 u は v の共役調和関数であるとは限らない。実際、 u が v の調和関数であるとは

$$v_x = u_y \quad \text{かつ} \quad v_y = -u_x$$

が成り立つことを意味するが、 v が u の共役調和関数であれば

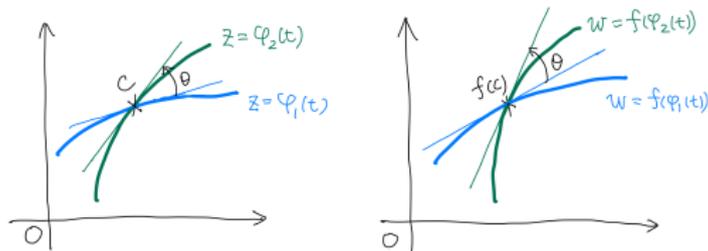
$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、 $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ が導かれ、 u と v は定数関数となる。

(**蛇足** w が z の共役複素数であるとき、 z は w の共役複素数である ($w = \bar{z} \Rightarrow z = \bar{w}$)。それと同じように勘違いしないこと。)

2.5.4 等角性

正則関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は、 $f'(c) \neq 0$ であれば、 c で交わる任意の2曲線を $f'(c)$ で交わる2曲線に写し、**その交角を変えない**という性質 (等角性) を持つ。



理由の説明 (ていねい化すると証明になる) Ω 内の曲線 $z = \varphi(t)$ ($t \in I$) を関数 $w = f(z)$ ($z \in \Omega$) でうつすと、曲線 $w = f(\varphi(t))$ ($t \in I$) が得られる。

$$c = \varphi(t_0), \quad t_0 \in I, \quad f'(c) = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0, \phi \in \mathbb{R})$$

とする。

- 曲線 φ の c における接ベクトルは $\varphi'(t_0)$ (の正数倍)。
- 曲線 $f \circ \varphi$ の $f(c)$ における接ベクトルは

$$\left. \frac{d}{dt}(f(\varphi(t))) \right|_{t=t_0} = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = f'(c)\varphi'(t_0) = \rho e^{i\phi}\varphi'(t_0) \quad (\text{の正数倍}).$$

… ゆえに曲線によらない (f だけで定まる) 共通の角度 ϕ だけ偏角が変化する。

2.5.4 等角性

一般に、定義域 Ω 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 f を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

等角写像が等角性を持つことが、複素関数の範疇で説明ができたけれど、対応する実多変数関数で表して調べてみる。

$$\mathbf{f}(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} c \\ \operatorname{Im} c \end{pmatrix}$$

とおくと、 $\mathbf{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ が } \mathbf{c} \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R}) \mathbf{f}'(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

なぜならば、 $\mathbf{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから。

ゆえに

$$(4) \quad \det \mathbf{f}'(\mathbf{c}) = |f'(c)|^2 \quad (= p^2 + q^2).$$

($f'(c) = p + qi$ となることを思い出そう。(4) はそれ自体重要な公式。)

2.5.4 等角性

$f'(c) = p + qi \neq 0$ を仮定して、 $f'(c)$ の偏角を ϕ とすると

$$f'(c) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{回転と拡大}).$$

ゆえに

$$f(c+h) - f(c) \doteq f'(c)h$$

の右辺は、 h を角度 ϕ だけ回転して長さを $\sqrt{p^2 + q^2}$ したものである。

一般に、 $ad - bc \neq 0$ を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して、1次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、正方形を平行四辺形に写す (歪みが生じ、角度が保存されないこともある) が、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形の1次変換は正方形を正方形に写す (歪まず、角度は保存される)。

以上のように考えても、等角性が成り立つことが分かる。

2.5.5 逆関数定理

定理 9.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

f が正則で、 f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、 c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

略証 微積分に「逆関数定理」がある。 f が C^1 級で、 $\det f'(c) \neq 0$ ならば、 c を含む十分小さな開集合 \tilde{U} では f は単射で、 f を \tilde{U} に制限した写像

$$f|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \ni x \mapsto f(x) \in f(\tilde{U})$$

の C^1 級の逆写像が存在する、という内容である。その定理は認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 f に対応する f については (c に十分近い任意の \tilde{c} に対して、 $f'(\tilde{c}) = p + iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) とおいて)

$$\det f'(\tilde{c}) = |f'(\tilde{c})|^2 \neq 0, \quad (f'(\tilde{c}))^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに、対応する f の局所的逆関数 $(f|_U)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。ゆえに $(f|_U)^{-1}$ は正則関数である。□

注 後で「 f が正則ならば、 f は無限回微分可能」という定理を証明するので、定理の仮定に「 f' が連続」を入れる必要はなくなる (強い形の逆関数定理が得られる)。

3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数として考えることでその本質が浮き彫りにされる。

冪級数とは、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は複素数列、 c は複素数である。)

雑談 「冪」は、わかんむり「冫」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。スライドでやる場合は「冪」「ベキ」が混じるかも。

宿題でも「ベキ」と書いて構わない。

ベキ級数の話はかなり長くなるので、この節で何が分かるか、少し長めのイントロ(スライド3枚)を用意した。

3.1 イントロ

「解析的 (analytic)」、「解析関数」という言葉がある。

解析的 $\stackrel{\text{def.}}{=} 定義域の各点の近傍で収束するべき級数に展開できる$

「解析関数」を**解析的な関数**という意味にとると、実は「正則関数」と同じ意味であることが後で分かる (**正則 \Leftrightarrow 解析的**)。一方で「解析関数」という言葉は、少し違った意味 (**解析接続で定まる関数**など) で使われることもある。

いくつか事実を述べる。

- ① 高校生の知っている関数 (多項式関数, 有理関数, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x , $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$) はほとんどが Taylor 展開可能である (例外は $|x|$ とか)。つまり $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$(\forall c \in I)(\exists \varepsilon > 0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \quad (|x-c| < \varepsilon).$$

これはべき級数である (「**Taylor 展開は冪級数**」)。ゆえに f は解析的 (実解析的) である。

x を複素変数 z に置き換えると複素関数に拡張できる。それらは実は正則 (解析的) である。

3.1 イントロ

② $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: “収束円” が存在する。

$(\exists \rho: 0 \leq \rho \leq +\infty) (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

ρ を**収束半径**、 $D(c; \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

$\rho = 0$ のとき $D(c; \rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c; \rho) = \mathbb{C}$.

(円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

$\rho > 0$ のとき**収束べき級数**という。

収束円の内部ではかなり自由な演算が出来る。とても簡単 (多項式関数とあまり変わらない)。

Ⓐ 項別微分出来る。

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1}(z-c)^n.$$

冪級数は**収束円 $D(c; \rho)$ 内で正則**。ゆえに「**解析的ならば正則**」。

3.1 イントロ

- ② 項別積分が出来る。後で曲線 C に沿う線積分 $\int_C f(z) dz$ を導入するが、収束円 $D(c; \rho)$ 内の曲線 C (始点 a , 終点 b として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1} \right]_{z=a}^{z=b}.$$

- ③ 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり Ω が \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $D(c; \varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists! \{a_n\}_{n \geq 0}) (\forall z \in D(c; \varepsilon)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

($\exists!$ は一意的に存在することを表す記号)

(ベキ級数の収束半径 ρ は $\rho \geq \varepsilon$ を満たす、ということになる。)

この節では、主に (2)(a) の証明を目標にする ((b) は積分の定義をしてから)。
(3) を証明するにはたくさんの準備が必要で、証明するのは少し後になる。

3.2 収束円 3.2.1 収束円の存在

補題 9.7 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、 $|z-c| < |z_0-c|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

証明 $z_0 = c$ のとき $|z-c| < |z_0-c|$ を満たす z が存在しないので証明不要。
以下 $z_0 \neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z_0 - c)^n = 0.$$

ゆえに (「収束する数列は有界」なので)

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n(z_0 - c)^n| \leq M.$$

$b_n := M \left| \frac{z-c}{z_0-c} \right|^n$ とおくと、 $|z-c| < |z_0-c|$ を満たす z に対して

$$|a_n(z-c)^n| = |a_n(z_0-c)^n| \left| \frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n} \right| \leq M \left| \frac{z-c}{z_0-c} \right|^n = b_n.$$

$\{b_n\}$ は公比 $\left| \frac{z-c}{z_0-c} \right| < 1$ の等比数列であるから、 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する。優級数の定理から $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束する。 □

3.2.1 収束円の存在

定理 9.8 (優級数の定理)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、 (i) $(\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq b_n$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する
を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、 $\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

証明

$$S_n := \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^n b_k$$

とおく。 $n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^n |a_k| - \sum_{k=1}^m |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n |a_k| \right| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

n, m の大小関係によらず $|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|$ が成り立つことが分かる。ゆえに

$$\sum b_n \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が Cauchy 列}$$

$$\Rightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ が収束}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ が収束. } \square$$

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート。
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf>
(2014～).