複素関数・同演習 第 12 回

～冪級数 (4) 一様収束 (続き), Weierstrass M-test, 冪級数の広義一様収束性 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 10 月 26 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 宿題 5 の解説をするかどうか、ギリギリまで提出者数を見極める。$\rightarrow$ 結局未提出の人が 10 人以上残ったので次回回しにした。10/26 10:50 までに提出した人には加点とする。
- 冪級数の 4 回目。どこまで行くかしら。一様収束の説明の続き。Weierstrass の M-test. それから、冪級数が、収束円より小さい任意の閉円盤では一様収束するという定理を述べた。講義ノート [1] の §3.2.2 以降 §3.2 の終わりまで。
- 宿題 6 を出してあります (〆切は 11 月 8 日 13:30)。「$|z|<1$ を満たす任意の」は「$|z-c|<1$ を満たす任意の」に訂正。

(前回の授業で説明し忘れ)

一般に「$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するならば、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束する」が成り立つ。実際、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \le \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから、$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$ が成り立つ。

(**注意**　極限が共通であるので、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様収束するか調べるには、各点収束の極限 f を求めて、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するかを調べれば良い。)

3.3.1 各点収束, 一様収束の定義 (続き)

(前回の授業で説明し忘れ)

一般に「$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するならば、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束する」が成り立つ。実際、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \le \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

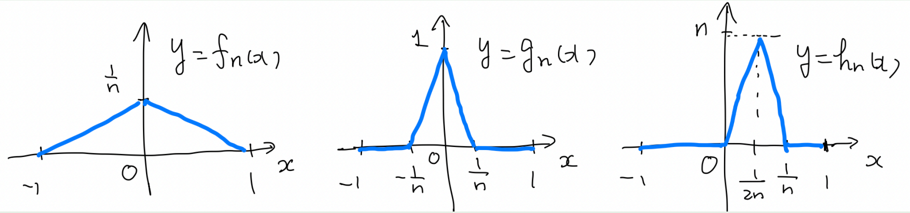
であるから、$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$ が成り立つ。

(**注意**　極限が共通であるので、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様収束するか調べるには、各点収束の極限 f を求めて、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するかを調べれば良い。)

しかし、逆「各点収束するならば一様収束する」は一般には成り立たない。

例 12.0 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

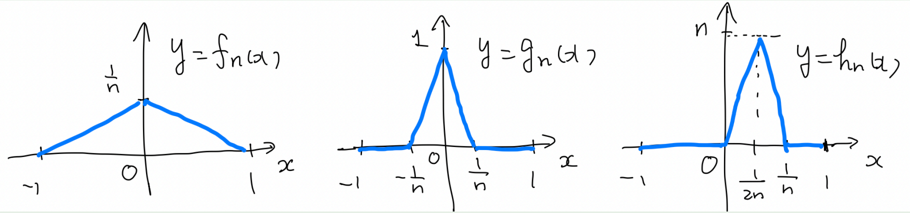
$[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定める。



3.3.2 例

例 12.0 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

$[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定める。



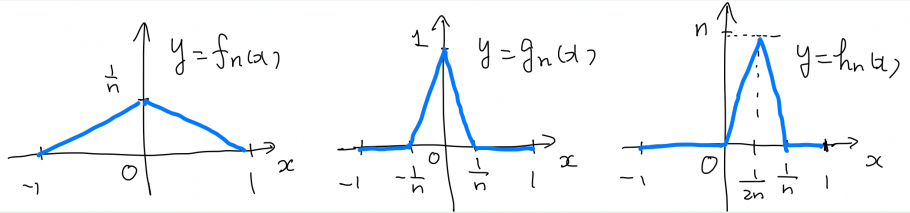
いずれも各点収束する。実際、任意の $x\in[-1,1]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := 0,\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) := \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x\neq 0), \end{cases} \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) := 0.$$

3.3.2 例

例 12.0 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

$[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定める。



いずれも各点収束する。実際、任意の $x\in[-1,1]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x):=0,\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x):=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0),\end{cases}\quad \lim_{n\to\infty} h_n(x)=h(x):=0.$$

($\because$ $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について証明しよう。$-1\le x\le 0$ であれば、任意の n に対して $h_n(x)=0$. $0<x\le 1$ であれば、十分大きな n に対して $\frac{1}{n}<x$ であるから $h_n(x)=0$. ゆえに $\lim_{n\to\infty} h_n(x)=0$. この真似をして $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$ が示せる。)

例 12.0 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分　続き)

一様収束するか

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n},\quad \sup_{x\in[-1,1]}|g_n(x)-g(x)|=1,\quad \sup_{x\in[-1,1]}|h_n(x)-h(x)|=n.$$

($\because$ $x\neq 0$ のとき、$|g_n(x)-g(x)|=g_n(x)$. ここで $x\to 0$ とすると 1 に収束することに注意する。)

ゆえに $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束するが、$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束しない。

項別積分可能であるか

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)dx=\frac{1}{n}\to 0=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx,\quad \int_{-1}^{1} g_n(x)dx=\frac{1}{n}\to 0=\int_{-1}^{1} g(x)\,dx,$$
$$\int_{-1}^{1} h_n(x)dx=\frac{1}{2}\not\to 0=\int_{-1}^{1} h(x)\,dx.$$

ゆえに $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は項別積分可能であるが、$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は項別積分可能でない。

極限は連続か　$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限関数 f, h は連続であるが、$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限関数 g は連続ではない。

3.3.2 例

例 12.0 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分　続き)

表にまとめると

	収束の種類	項別積分可能か	極限関数は連続か
$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	一様収束	○	○
$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	各点収束のみ	×	○
$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	各点収束のみ	○	×

実は、一様収束していれば、項別積分可能であり、かつ極限関数の連続性も成り立つ (後で証明する)。

各点収束だけでは、項別積分可能性や極限関数の連続性は成り立たない (上の例が反例になっている)。

3.3.3 一様収束の性質

一様収束する関数列は、色々良い性質を持つ。ここでは 3 つ述べるが、最初の 2 つが関数論で重要である。(3 つ目は、関数論の場合、もっと便利な定理が成り立つので、使われない。)

3.3.3 一様収束の性質

一様収束する関数列は、色々良い性質を持つ。ここでは 3 つ述べるが、最初の 2 つが関数論で重要である。(3 つ目は、関数論の場合、もっと便利な定理が成り立つので、使われない。)

Cf. 絶対収束する級数では、和を取る順序を変更しても和は変わらない、という定理など、色々と便利なことが成り立つ。

3.3.3 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する (グラフが描けて理解の助けになる)。

3.3.3 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega=[a,b]\subset\mathbb{R}$, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $f_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する (グラフが描けて理解の助けになる)。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

3.3.3 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する (グラフが描けて理解の助けになる)。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。

3.3.3 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する (グラフが描けて理解の助けになる)。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。
(証明): $x_0 \in \Omega$ とする。ε を任意の正の数とするとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束することから、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して
$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

3.3.3 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する (グラフが描けて理解の助けになる)。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

1. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。
(証明): $x_0 \in \Omega$ とする。ε を任意の正の数とするとき、$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が f に一様収束することから、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N は x_0 で連続であるから、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta) \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

3.3.3 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する (グラフが描けて理解の助けになる)。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。
(証明): $x_0 \in \Omega$ とする。ε を任意の正の数とするとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束することから、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N) \quad \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N は x_0 で連続であるから、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta) \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

すると $|x - x_0| < \delta$ を満たす任意の $x \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\le 2 \sup_{x'\in\Omega} \left|f(x') - f_N(x')\right| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに f は x_0 で連続である。 □

3.3.3 一様収束の性質

2. 一様収束するならば項別積分出来る、すなわち lim と $\int$ の順序交換出来る。

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\quad\left(\text{i.e. }\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx\right).$$

ただし、a と b は実数である ($-\infty$, ∞ ではない) と仮定している。

3.3.3 一様収束の性質

2. 一様収束するならば項別積分出来る、すなわち lim と $\int$ の順序交換出来る。

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\text{i.e. } \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right).$$

ただし、a と b は実数である ($-\infty$, ∞ ではない) と仮定している。

(証明)　(1) より、f は連続であることに注意しよう。$n\to\infty$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &\le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \le \int_a^b \sup_{x\in\Omega}|f_n(x)-f(x)|\,dx\\ &= \sup_{x\in\Omega}|f_n(x)-f(x)|\int_a^b dx\\ &= (b-a)\sup_{x\in\Omega}|f_n(x)-f(x)| \to 0\end{aligned}$$

であるから、$\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$ □

3.3.3 一様収束の性質

3. 各 n について f_n が C^1 級で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束し、$\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ はある関数 g に Ω で一様収束するならば、f も C^1 級で $f'=g$. すなわち

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

3.3.3 一様収束の性質

3. 各 n について f_n が C^1 級で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束し、$\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ はある関数 g に Ω で一様収束するならば、f も C^1 級で $f'=g$. すなわち

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

(証明) 微積分の基本定理により、任意の $x\in[a,b]$ に対して

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

$n\to\infty$ とすると (f_n' が g に一様収束するので、(2) を使って)

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

g は連続であるので ($\because$ 連続関数列 $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一様収束極限)、右辺は微分可能で、微分係数は $g(x)$. ゆえに f も微分可能で $f'(x)=g(x)$. これは連続であるから f は C^1 級である。 $\square$

(この定理は、証明の方が覚えやすいかもしれない。)

3.3.3 一様収束の性質

(実関数列の一様収束について説明したわけだが)

複素関数ではドーナル？

1. 「一様収束する連続関数列の極限は連続」…同様に証明できる。系として冪級数の和は収束円内で連続である (後述)。
2. 「一様収束するならば項別積分可能」…まだ複素線積分を定義していない訳であるが、同様に証明できる。
3. 実は**もっと本質的に強い定理**がある。

   (3 改) 「各 f_n が正則で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に広義一様収束するならば、f は正則で $f' = \lim_{n\to\infty}(f_n')$」

   (このことの証明には、Cauchy の積分公式が必要で、証明出来るのはずっと後になる。それまで待てないので、冪級数については、もっと直接的に証明することにする。) ということで、関数論のテキストでは、上の (3) はスルーするのが普通である。

3.3.4 Weierstrass の M test

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上?) は次の定理を用いる。

3.3.4 Weierstrass の M test

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上?) は次の定理を用いる。

定理 12.1 (Weierstrass の M-test)

Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$), 数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

(i) $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\le M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

3.3.4 Weierstrass の M test

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上?) は次の定理を用いる。

定理 12.1 (Weierstrass の M-test)

Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$), 数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall z \in \Omega)\ |a_n(z)| \le M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は一様収束するし (ゆえに項別積分出来る)、各点 z で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ は絶対収束する (ゆえに和を取る順序が変えられる)。

3.3.4 Weierstrass の M test　証明 前半

証明 (ひとりごと: 定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

3.3.4 Weierstrass の M test　証明 前半

証明　(ひとりごと: 定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \qquad |s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

証明　(ひとりごと: 定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \qquad |s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

$n > m$ のときに証明すれば良い。次の 3 つの式から導かれる。

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(z) - \sum_{k=1}^{m} a_k(z) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(z) \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)|.$$

3.3.4 Weierstrass の M test　証明 前半

証明　(ひとりごと: 定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \qquad |s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

$n > m$ のときに証明すれば良い。次の 3 つの式から導かれる。

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(z) - \sum_{k=1}^{m} a_k(z)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(z)\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)|.$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)| = \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)| - \sum_{k=1}^{m} |a_k(z)| = S_n(z) - S_m(z) = |S_n(z) - S_m(z)|,$$

証明 (ひとりごと: 定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \qquad |s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

$n > m$ のときに証明すれば良い。次の 3 つの式から導かれる。

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(z) - \sum_{k=1}^{m} a_k(z) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(z) \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)|.$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)| = \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)| - \sum_{k=1}^{m} |a_k(z)| = S_n(z) - S_m(z) = |S_n(z) - S_m(z)|,$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)| \le \sum_{k=m+1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} M_k - \sum_{k=1}^{m} M_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

3.3.4 Weierstrass の M test　証明 後半

仮定より $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに $(*)$ により $\{S_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるから、$\mathbb{C}$ の完備性によって収束する。

$$s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z), \quad S(z) := \lim_{n\to\infty} S_n(z) \quad (z \in \Omega),$$
$$T := \lim_{n\to\infty} T_n$$

とおく。

3.3.4 Weierstrass の M test　証明 後半

仮定より $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに $(*)$ により $\{S_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるから、$\mathbb{C}$ の完備性によって収束する。

$$s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z), \quad S(z) := \lim_{n\to\infty} S_n(z) \quad (z\in\Omega),$$
$$T := \lim_{n\to\infty} T_n$$

とおく。

(再掲 $*$)
$$|s_n(z)-s_m(z)| \le |S_n(z)-S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

で $m\to\infty$ とすると

$$(\forall z\in\Omega)(\forall n\in\mathbb{N}) \quad |s_n(z)-s(z)| \le |S_n(z)-S(z)| \le |T_n - T|.$$

$z\in\Omega$ について上限を取って (細かいことを言うと $(\forall z\in\Omega)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ の順番を入れ替えてから)

$$\sup_{z\in\Omega} |s_n(z)-s(z)| \le \sup_{z\in\Omega} |S_n(z)-S(z)| \le |T_n - T|.$$

3.3.4 Weierstrass の M test　証明 後半

仮定より $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに $(*)$ により $\{S_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるから、$\mathbb{C}$ の完備性によって収束する。

$$s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z), \quad S(z) := \lim_{n\to\infty} S_n(z) \quad (z\in\Omega),$$
$$T := \lim_{n\to\infty} T_n$$

とおく。

(再掲 $*$)　$$|s_n(z)-s_m(z)| \le |S_n(z)-S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

で $m\to\infty$ とすると

$$(\forall z\in\Omega)(\forall n\in\mathbb{N}) \quad |s_n(z)-s(z)| \le |S_n(z)-S(z)| \le |T_n - T|.$$

$z\in\Omega$ について上限を取って (細かいことを言うと $(\forall z\in\Omega)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ の順番を入れ替えてから)

$$\sup_{z\in\Omega}|s_n(z)-s(z)| \le \sup_{z\in\Omega}|S_n(z)-S(z)| \le |T_n - T|.$$

$n\to\infty$ のとき右辺は 0 に収束するので、$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は S に、$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は s に、それぞれ Ω で一様収束する。 □

3.3.5 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

定理 12.2 (冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する)

$c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列, $0 \leq \rho \leq +\infty$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ ならば、この冪級数は、$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、$\overline{D}(c;R)$ で一様絶対収束する。

3.3.5 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

定理 12.2 (冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する)

$c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列, $0 \leq \rho \leq +\infty$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ ならば、この冪級数は、$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、$\overline{D}(c;R)$ で一様絶対収束する。

念のため記号の復習

$$D(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < R\}, \quad \overline{D}(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq R\}.$$

定理 12.2 (冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する)

$c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \ge 0}$ は複素数列, $0 \le \rho \le +\infty$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ ならば、この冪級数は、$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、$\overline{D}(c;R)$ で一様絶対収束する。

念のため記号の復習

$$D(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < R\}, \quad \overline{D}(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \le R\}.$$

注意 12.3 (広義一様収束)

「トポロジー」などで、コンパクト集合の概念を知っている人に。上の定理から「収束円 $D(c;\rho)$ 内の任意のコンパクト集合上で一様収束する」ことが導かれる。このことを「$D(c;\rho)$ で**広義一様収束**する (uniformly convergent on every compact set in $D(c;\rho)$)」という。この概念はとても重要であるが、この授業では上の定理の形で満足しておく。 □

3.3.5 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明

3.3.5 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

3.3.5 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

3.3.5 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

$M_n := M\left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c| \le R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n(z-c)^n| \le |a_n| R^n = |a_n r^n| \left(\frac{R}{r}\right)^n \le M\left(\frac{R}{r}\right)^n = M_n.$$

3.3.5 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

$M_n := M\left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c| \le R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n(z-c)^n| \le |a_n| R^n = |a_n r^n| \left(\frac{R}{r}\right)^n \le M\left(\frac{R}{r}\right)^n = M_n.$$

そして

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \frac{M}{1 - R/r} \quad (\text{収束}).$$

3.3.5 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

$M_n := M\left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c| \le R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n (z-c)^n| \le |a_n| R^n = |a_n r^n| \left(\frac{R}{r}\right)^n \le M \left(\frac{R}{r}\right)^n = M_n.$$

そして

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \frac{M}{1 - R/r} \quad (\text{収束}).$$

Weierstrass の M-test (定理 12.1) によって、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は、$\overline{D}(c;R)$ で一様に絶対収束する。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf
(2014〜).