複素関数・同演習 第 13 回

～冪級数 (5) 項別微分定理, 微分を使わない Taylor 展開～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 11 月 8 日

目次

1. 本日の内容・連絡事項
2. 冪級数 (続き)
   - 冪級数の項別微分
     - 冪級数の項別微分定理
     - 微分を使わない Taylor 展開
3. 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 宿題 4 へのコメント、宿題 5 の解説をします。
  今後宿題は返却してから解説する (宿題〆切から 1 週間後の授業) ことにします。
  注: 宿題の解説が長くなっています (今後もその傾向が強くなる)。その分講義のパートはなるべく短くするように努めます。
- いよいよ冪級数の項別微分可能性の証明を行います。これができると一気に見通しが良くなります。有理関数の冪級数展開について調べます。(講義ノート [1] の§3.3) に相当する。
- 宿題 7 を出します (〆切りは 11 月 15 日 13:30)。

次の定理は特に重要である。

定理 13.1 (冪級数の項別微分定理, Abel)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、f は $D(c;\rho)$ で正則で

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n \quad (z\in D(c;\rho)).$$

右辺の冪級数の収束半径は ρ である。

微分した結果が、やはり冪級数で、その収束半径が元と一致していることに注目しよう。そのことから何回でも微分できることが導かれることを理解しよう。

3.4.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

証明　$c=0$ として証明すれば良い。$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく。

第 1 段 $g(z)$ の収束半径が $f(z)$ の収束半径 ρ に等しいこと

まず $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を注意しておく。(実際 $b_n := \sqrt[n]{n}$ とおくと、$n\to\infty$ のとき $\log b_n = \log\left(n^{1/n}\right) = \frac{\log n}{n} \to 0$ であるから、$b_n = e^{\log b_n} \to e^0 = 1$.)

冪級数 $g(z)$ の収束半径は、冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n}$ $(= zg(z))$ の収束半径と同じであるので

$$g(z)\text{ の収束半径} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho.$$

実際、1 番目と 3 番目の等号は Cauchy-Hadamard の公式による。2 番目の等号 $=$ は次の (a), (b) による。

- (a) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\sqrt[n]{n}\ge 1$ であるから、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} \ge \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
- (b) 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある自然数 N が存在して、任意の自然数 $n\ge N$ に対して $\sqrt[n]{n}\le 1+\varepsilon$ となる。ゆえに $\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n\,|a_n|} \le (1+\varepsilon) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. ε は任意だから $\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n\,|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. □

3.4.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

第 2 段 $f' = g$ であること　$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、f は $D(0;R)$ で正則で、$f' = g$ であることを示せば良い。

ε を任意の正数とする。($\sum_n n a_n z^{n-1}$ が $z = R$ で絶対収束ゆえ) ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\star)\qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} n\left|a_n\right| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$z \in D(0;R)$, $h \neq 0$, $z + h \in D(0;R)$ とすると

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\left((z+h)^n - z^n\right)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \\ &\le \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| \\ &\quad + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right|.\end{aligned}$$

右辺第 1 項は、$(z^n)' = n z^{n-1}$ より、$|h|$ が十分小さければ $\frac{\varepsilon}{3}$ より小さい。

右辺第 2 項については

$$\begin{aligned}\left|(z+h)^n - z^n\right| &= \left|\left((z+h)-z\right)\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}\right)\right| \\ &\le |h|\left(|z+h|^{n-1} + |z+h|^{n-2}|z| + \cdots + |z|^{n-1}\right) \\ &\le |h|\left(nR^{n-1}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\text{右辺第 2 項} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{\left|(z+h)^n - z^n\right|}{|h|} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

右辺第 3 項については (三角不等式, $|z| < R$, $(\star)$ により)

$$\text{右辺第 3 項} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|na_n z^{n-1}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

以上より、$|h|$ が十分小さければ $\left|\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| < \varepsilon$. ゆえに $f'(z) = g(z)$. □

3.4.1 冪級数の項別微分定理

復習: 収束半径が正である (つまり 0 でない) 冪級数を収束冪級数と呼ぶ。

系 13.2 (収束冪級数は Taylor 展開である)

収束冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の定める関数 f は、収束円 $D(c;\rho)$ で無限回微分可能で

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{ゆえに} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n.$$

特に関数が c 中心の収束冪級数で表されるならば、表し方はただ一通りしかなく、それはその関数の c における Taylor 展開に一致する。

証明　任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、f を k 回項別微分して

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_k(z-c)^{n-k}.$$

$z=c$ を代入すると、$n=k$ の項のみ残って

$$f^{(k)}(c) = k(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot a_k = k!a_k.$$

ゆえに $a_k = f^{(k)}(c)/k!$. □

系 13.3 (収束冪級数は原始関数を持つ)

収束冪級数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ (収束半径を ρ とする) に対して、

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(z-c)^n \quad (z \in D(c;\rho))$$

とおくと、収束半径は同じで、$F' = f$ が成り立つ。

証明　$F(z)$ を定義する冪級数を項別微分した冪級数は、$f(z)$ を定義する冪級に等しい。

$F(z)$ を定義する冪級数の収束半径は $\dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}}$ である。これは $f(z)$ の冪級数の収束半径 $\dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ に等しい ($\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ であるから)。 □

3.4.2 微分を使わない Taylor 展開

上の定理から、どういうやり方でも、$f(z)$ を収束冪級数の形に表せれば、それは f の Taylor 展開である。

以下、等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (\text{収束する} \Leftrightarrow |r| < 1)$$

を利用した **Taylor 展開の導出法**を説明する。収束半径は ρ と表す。

例 13.4 (基本)

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散であるから、$\rho = 1$. これが $\dfrac{1}{1-z}$ の (0 における, 0 のまわりの) Taylor 展開に他ならない。

3.4.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ を 0 の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 13.5

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-z/4)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|-z|}{|4|} < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$. ゆえに $\rho = 4$. 収束円は $D(0;4)$.

一般化しておくと: $a \neq 0$ であれば

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

$\rho = |a|$. 収束円は $D(0;|a|)$. □

$\dfrac{1}{z+a}$ を c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$.

例 13.6

$\dfrac{1}{z+3}$ を 1 を中心とする冪級数に展開せよ。

1 のまわりで Taylor 展開せよ、と同じことである。

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n.$$

$$\text{収束する} \quad \Leftrightarrow \quad \left|-\frac{z-1}{4}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| < 4.$$

ゆえに $\rho = 4$, 収束円は $D(1;4)$. □

例 13.7

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

$$(\sharp)\qquad f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

これは公比 $-z^2$ の等比数列であるから、

$$\text{収束する}\quad\Leftrightarrow\quad\left|-z^2\right|<1\quad\Leftrightarrow\quad|z|^2<1\quad\Leftrightarrow\quad|z|<1.$$

$f(z)$ は、

$$a_n:=\begin{cases}(-1)^k & (n\text{ が偶数のとき、}n=2k\text{ とおくと})\\ 0 & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ と表せるので冪級数であり、$\rho=1$. (続く)

例 13.7 (つづき)

こういうやり方もある。

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$$

$$=-\frac{i}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-i)^{n+1}}\right)\qquad \left(\frac{1}{z-a}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}\text{ を使った}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^n+(-i)^n\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{2}i^nz^n.$$

ここで止めても良いだろう。

n が奇数のとき、$(-1)^n+1=0$. $n=2k$ のとき $i^n=i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k$, $(-1)^n+1=2$ であるから

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2}(-1)^kz^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kz^{2k}\quad ((\sharp)\text{ と一致する}).\quad\square$$

3.4.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{(z+a)^n}$ の c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$.

例 13.8

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

まず、分母の冪の指数が 1 の場合 $\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$ は、上でやったやり方で

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

両辺を微分すると (項別微分定理から)

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

$$\text{ゆえに} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

3.4.2 微分を使わない Taylor 展開

原始関数の冪級数展開を求めてみよう (系 13.3 を使う)。

例 13.9

$f'(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$, $f(0)=0$ を満たす f を求めよ (後で定義する $\tan^{-1} z$ に等しいが、そのことは使わない)。

(解答) $f'(z)$ については既に次が分かっている。

$$f'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} \quad (\text{収束半径は } 1).$$

これから

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}z^{2k+1}+C \quad (\text{収束半径は } 1,\ C \text{ は積分定数}).$$

$f(0)=0$ より $C=0$. ゆえに

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}z^{2k+1}.$$

例 13.10 (有理関数の Taylor 展開)

次の関数を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}.$$

分子 ÷ 分母の計算をしよう。

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6} = \frac{(z+2)(z^2 - 5z + 6) + 3z - 7}{z^2 - 5z + 6} = z + 2 + \frac{3z - 7}{(z-2)(z-3)}.$$

$z-2$ と $z-3$ は互いに素であるから、次式を満たす定数 A, B が存在するはず。

$$\frac{3z-7}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}.$$

部分分数分解の原理

多項式 $p(z)$, $q(z)$ が互いに素であれば、任意の多項式 $r(z)$ に対して

$$\frac{r(z)}{p(z)q(z)} = \frac{A(z)}{p(z)} + \frac{B(z)}{q(z)}$$

を満たす多項式 $A(z)$, $B(z)$ が存在する。$\deg r(z) < \deg(p(z)q(z))$ であれば、$\deg A(z) < \deg p(z)$, $\deg B(z) < \deg q(z)$ を満たす $A(z)$, $B(z)$ が存在する。

$A = 1$, $B = 2$ と求まる。ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad(\text{収束}\Leftrightarrow|z|<2),\qquad \frac{1}{z-3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\quad(\text{収束}\Leftrightarrow|z|<3)$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z)&=z+2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\\ &=z+2-\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right)-2\left(\frac{1}{3}+\frac{z}{9}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)\\ &=\frac{5}{6}+\frac{19}{36}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n\quad(\text{少なくとも }|z|<2\text{ で収束}). \end{aligned}$$

収束半径は 2 である。これは $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{2}{3^{n+2}}}=2$ を確かめても良いし、収束半径が 2, 3 の冪級数の和であることからも分かる (「収束半径が ρ_1, ρ_2 ($\rho_1<\rho_2$) の冪級数の和の収束半径は ρ_1 である」— 証明は手頃な演習問題なので略する)。 □

以上より、**有理関数は、部分分数分解が求まれば、容易に冪級数展開できることが分かる**。

上の例では、最後に $n=0,1$ の項を抜き出した。

「なぜそうするのか？」と時々質問されるので、説明しておく。

「c のまわりで冪級数展開する」、つまり $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の等式を得るのが目標という場合、a_n を求めることが期待されている、と考えるべきだろう。

$$f(z)=z+2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$$

の形のままでは、a_n が何か、すぐには分からない。

$$f(z)=\frac{5}{6}+\frac{19}{36}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n$$

と整理してあれば一目瞭然である。つまり

$$a_0=\frac{5}{6},\quad a_1=\frac{19}{36},\quad a_n=-\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)\quad(n\geq 2).\quad\square$$

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf
(2014〜).