複素関数・同演習 第 15 回

〜 冪級数 (6) 微分方程式の級数解法, 冪級数による初等関数の定義 〜

かつらだ　まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 11 月 15 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 宿題 6 の解説をする。
- 冪級数による微分方程式の解法について説明する (この講義では、今後ほとんど出て来ないが、応用上とても重要)。
- 冪級数を用いて初等関数を複素関数として定義する。$e^z = \exp z$, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ については、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して定義出来る。実関数に対して得られた公式の多くが複素関数でも成立する。
- これに対して、$\tan^{-1} z$, $\operatorname{Log}(1+z)$, $(1+z)^\alpha$ などについては、収束半径が 1 なので満足できない。
- 冪級数の収束円周上での収束・発散について。

2022/11/15 は例 15.5 まで解説できた。2022/11/16 は例 15.6 を途中で切り上げて、§3.6 をおしまいにする予定である。

3.4.3 微分方程式の冪級数解法

例 15.1 (微分方程式の冪級数解法)

つらだ まさし

3.4.3 微分方程式の冪級数解法

例 15.1 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ で、

$$f''(z)=-f(z),\quad f(0)=1,\quad f'(0)=0$$

を満たすものを求めよ。

例 15.1 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z) = -f(z), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

を満たすものを求めよ。
(解答)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

であるから

$$f'' = -f$$

例 15.1 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z)=-f(z),\quad f(0)=1,\quad f'(0)=0$$

を満たすものを求めよ。
(解答)

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n,$$

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$$

であるから

$$f''=-f$$

例 15.1 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ で、

$$f''(z)=-f(z),\quad f(0)=1,\quad f'(0)=0$$

を満たすものを求めよ。
(解答)

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n,$$
$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n z^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$$

であるから

$$f''=-f \Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}=-a_n$$

例 15.1 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z)=-f(z),\quad f(0)=1,\quad f'(0)=0$$

を満たすものを求めよ。
(解答)

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n,$$

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$$

であるから

$$\begin{aligned} f''=-f &\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{Z}_{\ge 0})\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}=-a_n \\ &\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{Z}_{\ge 0})\quad a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

例 15.1 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

例 15.1 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

これから

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

例 15.1 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

これから

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

例 15.1 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

これから

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

この冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、収束円は $\mathbb{C}$ である。すなわち f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

(この f は、後で定義する $\cos z$ に他ならない。) □

3.4.3 微分方程式の冪級数解法

注意 15.2 (非常に広い発展がある)

上の例の微分方程式は、入門講義で良く知られているもので (単振動の方程式 $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ の $\omega = 1$ のケース)、「わざわざ解き直した」と言えなくもない。

注意 15.2 (非常に広い発展がある)

上の例の微分方程式は、入門講義で良く知られているもので (単振動の方程式 $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ の $\omega = 1$ のケース)、「わざわざ解き直した」と言えなくもない。

実は同様のやり方でたくさんの微分方程式が解け、多くの新しい関数 (**特殊関数**) が導入出来る。

3.4.3 微分方程式の冪級数解法

注意 15.2 (非常に広い発展がある)

上の例の微分方程式は、入門講義で良く知られているもので (単振動の方程式 $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ の $\omega = 1$ のケース)、「わざわざ解き直した」と言えなくもない。

実は同様のやり方でたくさんの微分方程式が解け、多くの新しい関数 (**特殊関数**) が導入出来る。

特異点を持つ場合も解くことが出来て、応用上も重要な特殊関数が得られる。2 つだけ例をあげると

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\,y' - \alpha\beta y = 0 \quad (\textbf{Gauss の超幾何微分方程式}).$$

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \alpha^2\right) y = 0 \quad (\textbf{Bessel の微分方程式}).$$

おまけ (2022/11/15 の授業では話していない)

例 15.3 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

おまけ (2022/11/15 の授業では話していない)

例 15.3 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

(解答)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}$$

を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

おまけ (2022/11/15 の授業では話していない)

例 15.3 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

(解答)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}$$

を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

両辺に z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

おまけ (2022/11/15 の授業では話していない)

例 15.3 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

(解答)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}$$

を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

両辺に z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

つまり微分して、z をかけることで、一般項に n をかけることが出来る。

おまけ (続き) (2022/11/15 の授業では話していない)

例 15.3 (つづき)

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = z \frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1) \cdot z}{(z-1)^4} = -\frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

おまけ (続き) (2022/11/15 の授業では話していない)

例 15.3 (つづき)

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = z \frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1) \cdot z}{(z-1)^4} = -\frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

同様にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}.$$

おまけ (続き) (2022/11/15 の授業では話していない)

例 15.3 (つづき)

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = z\frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1)\cdot z}{(z-1)^4} = -\frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

同様にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}.$$

結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ の和が求まることが分かる。 □

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

また、上の例で見たように、微分方程式で複素関数に拡張することもできる。

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

また、上の例で見たように、微分方程式で複素関数に拡張することもできる。

ここで「拡張」という意味は、変数の値が実数であるときに元の関数と一致する、という意味である。

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

また、上の例で見たように、微分方程式で複素関数に拡張することもできる。

ここで「拡張」という意味は、変数の値が実数であるときに元の関数と一致する、という意味である。

例えば

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (\text{これは再定義となる}\cdots),$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

$$\cosh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sinh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

これらの冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、関数は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質(指数法則、加法定理、関数同士の関係、π との関係) などを導くことが出来る。

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

1. $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,
$(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$.

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

1. $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$.
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

1. $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,
   $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$.
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
3. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
   (これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

1. $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,
   $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$.
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
3. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
   (これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)
4. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

1. $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,
   $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$.
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
3. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
   (これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)
4. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
5. 正の実数 π が存在して、$\cdots$(よく知っている性質を持つ)

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

1. $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,
   $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$.
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
3. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
   (これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)
4. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
5. 正の実数 π が存在して、…(よく知っている性質を持つ)

(1) は冪級数の項別微分定理により簡単に証明できる。(2) についてはこの後すぐに説明する。(3) は簡単な練習問題、(3) から (4) はすぐ導ける。(5) をノーヒントで解くのは難しいかもしれない (例えば高橋 [1] 第 1 章 §6 補題 4 を見よ)。

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

(2) の証明を二通り示す。

(2) の証明を二通り示す。

証明 1 「$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束し、少なくとも一方が絶対収束するならば

$$(1)\qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

が成り立つ」という定理が成り立つ (講義ノート付録 A.4 (2021/10/27 現在、命題 A.23 (Mertens の定理)))。

(2) の証明を二通り示す。

証明 1　「$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束し、少なくとも一方が絶対収束するならば

$$(1)\qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

が成り立つ」という定理が成り立つ (講義ノート付録 A.4 (2021/10/27 現在、命題 A.23 (Mertens の定理)))。これから

$$e^{z_1}e^{z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^k z_2^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2}.\qquad\square$$

(2) の証明を二通り示す。

証明 1　「$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束し、少なくとも一方が絶対収束するならば

$$(1)\qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

が成り立つ」という定理が成り立つ (講義ノート付録 A.4 (2021/10/27 現在、命題 A.23 (Mertens の定理)))。これから

$$e^{z_1}e^{z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^k z_2^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2}.\qquad\square$$

(1) が成り立つことを認めれば簡単である。それを保証する定理は重要であり、ぜひ覚えるべきであるが、証明は少し手間がかかるので、ここでは説明しない。

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

証明 2　(神保 [2])　冪級数の項別微分定理により、$f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。

証明 2　(神保 [2])　冪級数の項別微分定理により、$f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)f(c-z)\right) =$$

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

証明 2　(神保 [2])　冪級数の項別微分定理により、$f(z)=e^z$ は $f'(z)=f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)f(c-z)\right)=f'(z)\cdot f(c-z)+f(z)\cdot(-1)f'(c-z)$$

証明 2 (神保 [2]) 冪級数の項別微分定理により、$f(z)=e^z$ は $f'(z)=f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(f(z)f(c-z)\right) &= f'(z)\cdot f(c-z)+f(z)\cdot(-1)f'(c-z)\\ &= f(z)f(c-z)-f(z)f(c-z)=0 \quad (z\in\mathbb{C}).\end{aligned}$$

証明 2　(神保 [2])　冪級数の項別微分定理により、$f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(f(z)f(c-z)\right) &= f'(z)\cdot f(c-z) + f(z)\cdot(-1)f'(c-z)\\ &= f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z) = f(0)f(c) = 1\cdot f(c) = f(c).$$

証明 2　(神保 [2])　冪級数の項別微分定理により、$f(z)=e^z$ は $f'(z)=f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(f(z)f(c-z)\right)&=f'(z)\cdot f(c-z)+f(z)\cdot(-1)f'(c-z)\\&=f(z)f(c-z)-f(z)f(c-z)=0\quad(z\in\mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z)=f(0)f(c)=1\cdot f(c)=f(c).$$

すなわち

$$(\forall c\in\mathbb{Z})(\forall z\in\mathbb{Z})\quad f(z)f(c-z)=f(c).$$

証明 2　(神保 [2])　冪級数の項別微分定理により、$f(z)=e^z$ は $f'(z)=f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(f(z)f(c-z)\right)&=f'(z)\cdot f(c-z)+f(z)\cdot(-1)f'(c-z)\\&=f(z)f(c-z)-f(z)f(c-z)=0\quad(z\in\mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z)=f(0)f(c)=1\cdot f(c)=f(c).$$

すなわち

$$(\forall c\in\mathbb{Z})(\forall z\in\mathbb{Z})\quad f(z)f(c-z)=f(c).$$

任意の $a,b\in\mathbb{C}$ に対して $c:=a+b$, $z:=a$ とおくと、$f(z)f(c-z)=f(c)$ は $f(a)f(b)=f(a+b)$. すなわち $e^ae^b=e^{a+b}$. $\square$

3.5 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

一方、次にあげる関数の収束半径は 1 であり、$D(0;1)$ では正則である。

$$\tan^{-1} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z|<1),$$

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z|<1),$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^k \quad (|z|<1).$$

ただし α は任意の複素数で、$\binom{\alpha}{n}$ は**一般二項係数**である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

これらの冪級数は収束円が小さいので、このままでは不満がある。

一方、次にあげる関数の収束半径は 1 であり、$D(0;1)$ では正則である。

$$\tan^{-1} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z|<1),$$

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z|<1),$$

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^k \quad (|z|<1).$$

ただし α は任意の複素数で、$\binom{\alpha}{n}$ は**一般二項係数**である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

これらの冪級数は収束円が小さいので、このままでは不満がある。

実はきれいな解答があり、次節で (次回に) 紹介する。こうご期待。

3.6 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

3.6 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c;\rho)$ の境界 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|=\rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 15.4 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow$ $|z|<1$」が分かっている。

3.6 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c;\rho)$ の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 15.4 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$」.

3.6 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c;\rho)$ の境界 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|=\rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 15.4 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z|<1$」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z|\ge 1$」. ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0;1)$ の周上 $|z|=1$ の任意の点で発散する。

例 15.5 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

3.6 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c;\rho)$ の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 15.4 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$」. ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0;1)$ の周上 $|z| = 1$ の任意の点で発散する。

例 15.5 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。収束円 $D(0;1)$ の周 $|z| = 1$ 上の点では、

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

3.6 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c;\rho)$ の境界 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|=\rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 15.4 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow$ $|z|<1$」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow$ $|z|\geq 1$」．ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0;1)$ の周上 $|z|=1$ の任意の点で発散する。

例 15.5 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。収束円 $D(0;1)$ の周 $|z|=1$ 上の点では、

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

$b_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、$\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \leq b_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するので、優級数の定理から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ は収束する。(Weierstrass M-test によると、閉円盤 $\overline{D}(0;1)$ で一様絶対収束する。)

つづきます。

2022/11/15 の授業はここまでです。

参考文献

[1] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から1979年に出版された．丸善 eBook では、 https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441 でアクセスできる．

[2] 神保道夫（じんぼう）：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる．