

複素関数・同演習 第 15 回

～ 冪級数 (6) 微分方程式の級数解法, 冪級数による初等関数の定義 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022 年 11 月 15 日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 冪級数 (続き)
 - 冪級数の項別微分 (続き)
 - 微分方程式の冪級数解法 (続き)
 - 冪級数による初等関数の定義
 - 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)
- 3 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 宿題 6 の解説をする。
- 冪級数による微分方程式の解法について説明する (この講義では、今後ほとんど出て来ないが、応用上とても重要)。
- 冪級数を用いて初等関数を複素関数として定義する。 $e^z = \exp z$, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ については、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して定義出来る。実関数に対して得られた公式の多くが複素関数でも成立する。
- これに対して、 $\tan^{-1} z$, $\text{Log}(1+z)$, $(1+z)^\alpha$ などについては、収束半径が 1 なので満足できない。
- 冪級数の収束円周上での収束・発散について。

2022/11/15 は例 15.5 まで解説できた。2022/11/16 は例 15.6 を途中で切り上げて、§3.6 をおしまいにする予定である。

3.4.3 微分方程式の冪級数解法

例 15.1 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z) = -f(z), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

を満たすものを求めよ。

(解答)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

であるから

$$\begin{aligned} f'' = -f &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

3.4.3 微分方程式の冪級数解法

例 15.1 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

これから

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

この冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、収束円は \mathbb{C} である。すなわち f は \mathbb{C} 全体で正則である。

(この f は、後で定義する $\cos z$ に他ならない。)

□

3.4.3 微分方程式の冪級数解法

注意 15.2 (非常に広い発展がある)

上の例の微分方程式は、入門講義で良く知られているもので (単振動の方程式 $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ の $\omega = 1$ のケース)、「わざわざ解き直した」と言えなくもない。

実は同様のやり方でたくさんの微分方程式が解け、多くの新しい関数 (**特殊関数**) が導入出来る。

特異点を持つ場合も解くことが出来て、応用上も重要な特殊関数が得られる。2つだけ例をあげると

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \quad (\text{Gauss の超幾何微分方程式}).$$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (\text{Bessel の微分方程式}).$$

例 15.3 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

(解答)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}$$

を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

両辺に z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

つまり微分して、 z をかけることで、一般項に n をかけることが出来る。

例 15.3 (つづき)

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = z \frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1) \cdot z}{(z-1)^4} = -\frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

同様にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}.$$

結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ の和が求まることが分かる。 □

3.5 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

また、上の例で見たように、微分方程式で複素関数に拡張することもできる。

ここで「拡張」という意味は、変数の値が実数であるときに元の関数と一致する、という意味である。

例えば

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (\text{これは再定義となる}\cdots),$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

$$\cosh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sinh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

これらの冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、関数は \mathbb{C} 全体で正則である。

3.5 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、 π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

$$\textcircled{1} \quad (e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \\ (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

$$\textcircled{2} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$\textcircled{3} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)

$$\textcircled{4} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$\textcircled{5}$ 正の実数 π が存在して、 \dots (よく知っている性質を持つ)

(1) は冪級数の項別微分定理により簡単に証明できる。(2) についてはこの後すぐに説明する。(3) は簡単な練習問題、(3) から (4) はすぐ導ける。(5) をノーヒントで解くのは難しいかもしれない (例えば高橋 [1] 第 1 章 §6 補題 4 を見よ)。

3.5 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

(2) の証明を二通り示す。

証明 1 「 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束し、少なくとも一方が絶対収束するならば

$$(1) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

が成り立つ」という定理が成り立つ (講義ノート付録 A.4 (2021/10/27 現在、命題 A.23 (Mertens の定理)))。これから

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}. \quad \square \end{aligned}$$

(1) が成り立つことを認めれば簡単である。それを保証する定理は重要であり、ぜひ覚えるべきであるが、証明は少し手間がかかるので、ここでは説明しない。

3.5 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

証明 2 (神保 [2]) 冪級数の項別微分定理により、 $f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(f(z)f(c-z)) &= f'(z) \cdot f(c-z) + f(z) \cdot (-1)f'(c-z) \\ &= f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z) = f(0)f(c) = 1 \cdot f(c) = f(c).$$

すなわち

$$(\forall c \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{Z}) \quad f(z)f(c-z) = f(c).$$

任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $c := a+b, z := a$ とおくと、 $f(z)f(c-z) = f(c)$ は $f(a)f(b) = f(a+b)$. すなわち $e^a e^b = e^{a+b}$. \square

3.5 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

一方、次にあげる関数の収束半径は 1 であり、 $D(0; 1)$ では正則である。

$$\tan^{-1} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1),$$

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1),$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (|z| < 1).$$

ただし α は任意の複素数で、 $\binom{\alpha}{n}$ は**一般二項係数**である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

これらの冪級数は収束円が小さいので、このままでは不満がある。

実はきれいな解答があり、次節で(次回に)紹介する。どうぞ期待。

3.6 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c; \rho)$ の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 15.4 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$ 」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$ 」。ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0; 1)$ の周上 $|z| = 1$ の任意の点で発散する。

例 15.5 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。収束円 $D(0; 1)$ の周 $|z| = 1$ 上の点では、

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

$b_n := \frac{1}{n^2}$ とおくと、 $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するので、優級数の定理から $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は収束する。(Weierstrass M-test によると、閉円盤 $\overline{D}(0; 1)$ で一様絶対収束する。)

2022/11/15 の授業はここまでです。

参考文献

- [1] 高橋礼司：複素解析，東京大学出版会 (1990)，最初、筑摩書房から1979年に出版された。丸善 eBook では、<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441>でアクセスできる。
- [2] じんぼう 神保道夫：複素関数入門，現代数学への入門，岩波書店 (2003)，丸善 eBook では <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063>でアクセスできる。