複素関数・同演習 第16回

～冪級数 (7), 対数関数と冪関数 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022年11月16日

目次

本日の内容・連絡事項

- 宿題 8 を配布する。
- 収束円周上での収束・発散の続き。シラバスでは、Abel の級数変形法、Abel の連続性定理を説明することになっているが、スキップする (このスライドには残すことにする)。
- 複素対数関数の定義をする。

冪級数は、その収束円の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 16.1 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$」が分かっている。

冪級数は、その収束円の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 16.1 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$」.

冪級数は、その収束円の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c|=\rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 16.1 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z|<1$」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$」. ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0;1)$ の周上 $|z|=1$ の任意の点で発散する。

例 16.2 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

冪級数は、その収束円の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 16.1 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$」. ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0;1)$ の周上 $|z| = 1$ の任意の点で発散する。

例 16.2 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。収束円 $D(0;1)$ の周 $|z| = 1$ 上の点では、

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

冪級数は、その収束円の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 16.1 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$」. ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0;1)$ の周上 $|z| = 1$ の任意の点で発散する。

例 16.2 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。収束円 $D(0;1)$ の周 $|z| = 1$ 上の点では、

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

$b_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、$\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \leq b_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するので、優級数の定理から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は収束する。(Weierstrass M-test によると、閉円盤 $\overline{D}(0;1)$ で一様絶対収束する。)

3.6.1 例

例 16.3 (収束円の周上に収束する点・発散する点どちらも存在)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ の収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

例 16.3 (収束円の周上に収束する点・発散する点どちらも存在)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ の収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

収束円の周 $|z|=1$ 上の点では、収束する・発散する、どちらのケースもある。次の 2 つは知っている (はず)。

- $z=1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ (発散).
- $z=-1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$ は収束する。
  (「絶対値が 0 に収束する交代級数は収束する」。実は和は $-\log 2$. 実際、上の冪級数は $-\mathrm{Log}(1-z)$ の 0 の周りの冪級数展開である。)

例 16.3 (収束円の周上に収束する点・発散する点どちらも存在)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ の収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

収束円の周 $|z|=1$ 上の点では、収束する・発散する、どちらのケースもある。次の 2 つは知っている (はず)。

- $z=1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ (発散).
- $z=-1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$ は収束する。
  (「絶対値が 0 に収束する交代級数は収束する」。実は和は $-\log 2$. 実際、上の冪級数は $-\mathrm{Log}(1-z)$ の 0 の周りの冪級数展開である。)

実は、$|z|=1$, $z\neq 1$ を満たす任意の z に対して、この冪級数は収束する。それは次に紹介する Abel の定理 (Abel の級数変形法) を用いればよい。

3.6.2 Abel の級数変形法

定理 16.4 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)

$\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ は部分和が有界であり、$\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ を満たすとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。

例 16.3 (つづき)

$|z| = 1$, $z \neq 1$ とする。$\alpha_n := z^n$, $\beta_n := \frac{1}{n}$ とおいて、定理 16.4 の条件をチェックしよう。

3.6.2 Abel の級数変形法

定理 16.4 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)

$\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ は部分和が有界であり、$\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ を満たすとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ は収束する。

例 16.3 (つづき)

$|z| = 1$, $z \neq 1$ とする。$\alpha_n := z^n$, $\beta_n := \frac{1}{n}$ とおいて、定理 16.4 の条件をチェックしよう。

$\beta_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ は確かに成り立つ。

3.6.2 Abel の級数変形法

定理 16.4 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)

$\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ は部分和が有界であり、$\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ を満たすとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。

例 16.3 (つづき)

$|z| = 1$, $z \neq 1$ とする。$\alpha_n := z^n$, $\beta_n := \frac{1}{n}$ とおいて、定理 16.4 の条件をチェックしよう。

$\beta_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ は確かに成り立つ。

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left|z\frac{1-z^N}{1-z}\right| \leq |z|\frac{1+|z^N|}{|1-z|} \leq \frac{1\cdot(1+1)}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}.$$

この右辺は N によらない定数であるから、部分和は有界である。

3.6.2 Abel の級数変形法

定理 16.4 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)

$\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ は部分和が有界であり、$\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ $(n\to\infty)$ を満たすとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ は収束する。

例 16.3 (つづき)

$|z|=1$, $z\neq 1$ とする。$\alpha_n := z^n$, $\beta_n := \frac{1}{n}$ とおいて、定理 16.4 の条件をチェックしよう。

$\beta_n \downarrow 0$ $(n\to\infty)$ は確かに成り立つ。

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}z^n\right| = \left|z\frac{1-z^N}{1-z}\right| \leq |z|\frac{1+|z^N|}{|1-z|} \leq \frac{1\cdot(1+1)}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}.$$

この右辺は N によらない定数であるから、部分和は有界である。

ゆえに Abel の定理 (定理 16.4) が適用できて、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ は収束する。

3.6.2 Abel の級数変形法

定理 16.4 の証明　$s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ $(n \geq 0)$ とおく。仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して $(\forall n)$ $|s_n| \leq M$.

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\
&= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \\
&= s_0 \beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_k + s_n \beta_n \right) - \left(s_0 \beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n .
\end{aligned}$$

3.6.2 Abel の級数変形法

定理 16.4 の証明 $s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \ (n \ge 0)$ とおく。仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して $(\forall n)$ $|s_n| \le M$.

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\
&= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \\
&= s_0 \beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_k + s_n \beta_n \right) - \left(s_0 \beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \right) \\
&= s_0 (\beta_0 - \beta_1) + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n \quad (\text{赤と水色それぞれまとめる}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n. \quad \left(\text{赤と水色} \sum_{k=1} \text{を 1 つの} \sum_{k=0} \text{にまとめる}\right)
\end{aligned}$$

3.6.2 Abel の級数変形法

(再掲) $$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n \quad (\text{ただし } s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k).$$

(この式変形を **Abel の級数変形法**と呼ぶ。関数についての部分積分に相当する。)

右辺第 2 項について、$|s_n \beta_n| \le M\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

右辺第 1 項の級数については、

$$|s_k(\beta_k - \beta_{k+1})| \le M(\beta_k - \beta_{k+1}),$$

$$\sum_{k=0}^{n} M(\beta_k - \beta_{k+1}) = M\beta_0 - M\beta_{n+1} \to M\beta_0$$

であるから、優級数の定理より $n \to \infty$ のとき、右辺第 1 項は収束する。

ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。 □

3.6.2 Abel の級数変形法　部分積分との対応の説明

階差 (差分) を微分に、和を積分に対応させるとき、Abel の級数変形法

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = s_n \beta_n - \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_{k+1} - \beta_k) \quad (\text{ただし } \alpha_k \text{ は } s_k \text{ の階差: } \alpha_k = s_k - s_{k-1})$$

は、部分積分 (integral by parts)

$$\int_a^b F'(x) g(x)\, dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) g'(x)\, dx$$

に相当する。つまり、Abel の級数変形法は部分積分の離散バージョンである。

3.6.2 Abel の級数変形法　部分積分との対応の説明

階差 (差分) を微分に、和を積分に対応させるとき、Abel の級数変形法

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = s_n \beta_n - \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_{k+1} - \beta_k) \quad (\text{ただし } \alpha_k \text{ は } s_k \text{ の階差: } \alpha_k = s_k - s_{k-1})$$

は、部分積分 (integral by parts)

$$\int_a^b F'(x) g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) g'(x)\,dx$$

に相当する。つまり、Abel の級数変形法は部分積分の離散バージョンである。

微積分の基本定理

1. $f(x) = F'(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$
2. $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ ならば $F'(x) = f(x).$

の離散バージョンは

3.6.2 Abel の級数変形法　部分積分との対応の説明

階差 (差分) を微分に、和を積分に対応させるとき、Abel の級数変形法

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_k = s_n\beta_n - \sum_{k=0}^{n-1}s_k(\beta_{k+1}-\beta_k)\quad (\text{ただし } \alpha_k \text{ は } s_k \text{ の階差: } \alpha_k = s_k - s_{k-1})$$

は、部分積分 (integral by parts)

$$\int_a^b F'(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

に相当する。つまり、Abel の級数変形法は部分積分の離散バージョンである。

微積分の基本定理

1. $f(x) = F'(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$
2. $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ ならば $F'(x) = f(x).$

の離散バージョンは

1'. $b_n = a_{n+1} - a_n$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1.$　$\left(a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k\right.$ を見慣れてる？$\left.\right)$

2'. $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ ならば $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$, $s_1 = a_1$.

3.6.3 Abel の連続性定理

次の定理も、やはり Abel の級数変形法で証明出来る。

定理 16.4 (Abel の連続性定理)

冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が $z = R$ $(R > 0)$ で収束したとする。このとき、任意の $K > 1$ に対して

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < R, \quad \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \le K \right\}$$

とおくと、冪級数 $f(z)$ は $\Omega_K \cup \{R\}$ で一様収束する。

従って関数 f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で連続である。特に

$$\lim_{\substack{z \in \Omega_K \\ z \to R}} f(z) = f(R) \qquad \left(さらに特に \lim_{\substack{x \in [0,R) \\ x \to R}} f(x) = f(R)\right).$$

3.6.3 Abel の連続性定理

(この辺をきちんと説明するには、長い時間が必要になります。この講義の以下の議論にそれほど影響はないので、駆け足で通り抜けます。)

証明の方針

$$\alpha_n := a_n R^n, \quad \beta_n := \left(\frac{z}{R}\right)^n, \quad f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k,$$

とおいて Abel の級数変形法を用いる。詳細は講義ノート pp. 81–82 を見よ。

□

説明補足　定理 16.4 では、$\beta_n \downarrow 0$ という条件を仮定したが、$\{\beta_n\}$ は有界変分 ($\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sum_{n}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$) という条件で置き換えても良いことはすぐ分かる。それに気づくと、納得しやすい (かもしれない)。

Ω_K についても、形を見て (次のスライド) 納得するにとどめたい。

Mathematica で `R=1; Manipulate[ RegionPlot[ x^2+y^2<R^2&& Abs[1-(x+I y)/R]` `y]/R)<=K,{x,-2,2}, {y,-2,2}], {K,1,10,0.1}]` とする。

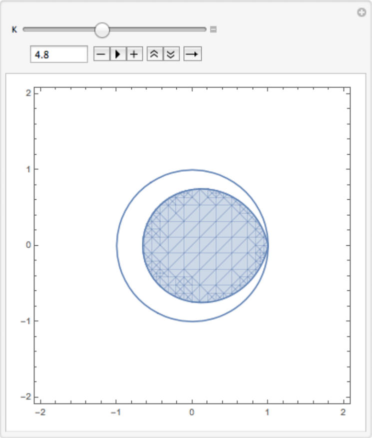

図 1: $R = 1$, $K = 4.8$ の場合の Ω_K と円周 $|z| = R$

多くのテキストで、Abel の連続性定理は、次の形で与えられている。

任意の $\alpha \in (0,\pi/2)$ に対して、

$$\lim_{\substack{z\to R\\ |\arg(z-R)-\pi|<\alpha}} f(z)=f(R)$$

「$|\arg(z-R)-\pi|<\alpha$ を満たすようにして $z\to R$ とすると」という近づけ方を「**Stolz の路に沿って** z を R に近づけると」と言う。

3.6.3 Abelの連続性定理　Stolzの路

多くのテキストで、Abelの連続性定理は、次の形で与えられている。

任意の $\alpha \in (0, \pi/2)$ に対して、

$$\lim_{\substack{z \to R \\ |\arg(z-R)-\pi|<\alpha}} f(z) = f(R)$$

「$|\arg(z-R)-\pi| < \alpha$ を満たすようにして $z \to R$ とすると」という近づけ方を「**Stolzの路に沿って** z を R に近づけると」と言う。

z が扇形 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-R| < R\cos\alpha,\ |\arg(z-R)-\pi| < \alpha\}$ に属するとき

$$\frac{|1-z/R|}{1-|z|/R} = \frac{|R-z|}{R-|z|} < 2\sec\alpha \quad (念のため: \sec = \frac{1}{\cos})$$

が成り立つので (証明略, 辻・小松 [1] の p. 91)、$K := 2\sec\alpha$ について $z \in \Omega_K$ である。ゆえに、上の形のAbelの連続性定理は、定理16.4の系として導かれる。

例 16.5 (有名なグレゴリー・ライプニッツ級数について)

(1)
$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1)$$

とおく。

3.6.3 Abel の連続性定理　応用

例 16.5 (有名なグレゴリー・ライプニッツ級数について)

(1)
$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1)$$

とおく。収束半径が 1 とすぐ分かる。ゆえに f は $D(0;1)$ で正則である。

例 16.5 (有名なグレゴリー・ライプニッツ級数について)

(1)
$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1)$$

とおく。収束半径が 1 とすぐ分かる。ゆえに f は $D(0;1)$ で正則である。$f(z)$ は、$z = 1$ で収束するので (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数だから)、Abel の連続性定理より

$$f(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1)}} f(x).$$

例 16.5 (有名なグレゴリー・ライプニッツ級数について)

(1)
$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1)$$

とおく。収束半径が 1 とすぐ分かる。ゆえに f は $D(0;1)$ で正則である。$f(z)$ は、$z = 1$ で収束するので (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数だから)、Abel の連続性定理より

$$f(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1)}} f(x).$$

$f(z)$ が、$z = x \in (-1, 1)$ のとき実関数の $\tan^{-1} x$ と一致することは証明しやすい (ここでは認めることにする)。$\tan^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続であることから、右辺の極限は $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ に等しい。

例 16.5 (有名なグレゴリー・ライプニッツ級数について)

(1)
$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1)$$

とおく。収束半径が 1 とすぐ分かる。ゆえに f は $D(0;1)$ で正則である。$f(z)$ は、$z = 1$ で収束するので (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数だから)、Abel の連続性定理より

$$f(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1)}} f(x).$$

$f(z)$ が、$z = x \in (-1,1)$ のとき実関数の $\tan^{-1} x$ と一致することは証明しやすい (ここでは認めることにする)。$\tan^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続であることから、右辺の極限は $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ に等しい。ゆえに

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

以上の論法は便利である (この論法を使わずに $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ の証明が出来ないわけではないが、少し手間がかかる。Abel の連続性定理を使うと簡単である。)。

3.6.3 Abel の連続性定理　むすび

冪級数は等比級数に似ていて、収束円内部での収束証明は等比級数と比較する (具体的には優級数の定理や Weierstrass M-test を用いる) ことで証明できる。

しかし収束円周上の点での収束については、その方法では証明できない。Abel の級数変形法を用いた精密な議論が有効である。

余談: Abel とはどういう人

昔は、Abel は「5 次方程式は冪根で解けない」ことを証明した人で、若くしてなくなった天才である、ということを、学生も良く知っていたと思うのだけど、最近そういうのに疎い人が多いような気がするので、少し紹介しておく。

余談: Abel とはどういう人

昔は、Abel は「5 次方程式は冪根で解けない」ことを証明した人で、若くしてなくなった天才である、ということを、学生も良く知っていたと思うのだけど、最近そういうのに疎い人が多いような気がするので、少し紹介しておく。

Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー) は、冪級数の収束発散についての基礎を確立した (それがこの節の重要な内容だった)。それ以外に

1. α が一般の複素数であるときの $(1+x)^\alpha$ の展開 (一般 2 項定理) の証明
2. 5 次以上の代数方程式は有限回の四則と冪根では解けないことの証明
3. **楕円関数論**

などの仕事を行った。後の二つは、数学読み物にも良く出て来る偉大な仕事である。(偉大な数学者は、彼らの名前を有名にした大きな業績以外に、基礎的なことへの貢献も大きいことが多い、とつねづね感じている。冪級数の理論への貢献をした Abel も例外でない。) □

4 対数関数と冪関数　4.1 複素対数関数

4 節の短い予告　複素対数関数 $\log z$ と冪関数 z^α を定義して色々やる。

これらは冪級数による定義では収束円が小さくて、満足しにくい。

4 節の短い予告　複素対数関数 $\log z$ と冪関数 z^α を定義して色々やる。

これらは冪級数による定義では収束円が小さくて、満足しにくい。

$\operatorname{Log} z$ は $z=0$ では定義されない。そこで多くの本で、$\operatorname{Log}(z+1)$ の 0 の周りの冪級数展開を求めている。

$$\operatorname{Log}(z+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \quad (|z|<1).$$

これは本質的には、$\operatorname{Log} z$ を 1 のまわりで冪級数展開した

$$\operatorname{Log} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \quad (|z-1|<1)$$

と同値である。

4 節の短い予告　複素対数関数 $\log z$ と冪関数 z^α を定義して色々やる。

これらは冪級数による定義では収束円が小さくて、満足しにくい。

$\operatorname{Log} z$ は $z=0$ では定義されない。そこで多くの本で、$\operatorname{Log}(z+1)$ の 0 の周りの冪級数展開を求めている。

$$\operatorname{Log}(z+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \quad (|z|<1).$$

これは本質的には、$\operatorname{Log} z$ を 1 のまわりで冪級数展開した

$$\operatorname{Log} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \quad (|z-1|<1)$$

と同値である。

この事情は、冪関数 z^α についてもほぼ同様である。

$$(z+1)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n \quad (|z|<1),$$

$$z^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(z-1)^n \quad (|z-1|<1).$$

対数関数 log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^{α} は対数関数を用いて $z^{\alpha} := e^{\alpha \log z}$ として定める。

対数関数 log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^α は対数関数を用いて $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ として定める。

実関数 log (実質的に高校数学) の復習

$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加なので単射、値域は $(0,+\infty)$.
$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0,+\infty)$ は全単射であるから逆関数を持つ。それを $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ と表す。
$x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,+\infty)$ について、$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$.

対数関数 log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^α は対数関数を用いて $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ として定める。

実関数 log (実質的に高校数学) の復習

$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加なので単射、値域は $(0, +\infty)$.
$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, +\infty)$ は全単射であるから逆関数を持つ。それを $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ と表す。
$x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, +\infty)$ について、$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$.

一方、複素指数関数 $f\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ については

対数関数 log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^α は対数関数を用いて $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ として定める。

実関数 log (実質的に高校数学) の復習

$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加なので単射、値域は $(0, +\infty)$.
$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, +\infty)$ は全単射であるから逆関数を持つ。それを $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ と表す。
$x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, +\infty)$ について、$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$.

一方、複素指数関数 $f\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ については

- 全射ではない ($e^z \neq 0$ つまり $f(z) = 0$ を満たす z は存在しない)。

対数関数 log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^α は対数関数を用いて $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ として定める。

実関数 log (実質的に高校数学) の復習

$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加なので単射、値域は $(0,+\infty)$.
$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0,+\infty)$ は全単射であるから逆関数を持つ。それを $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ と表す。
$x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,+\infty)$ について、$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$.

一方、複素指数関数 $f\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ については

- 全射ではない ($e^z \neq 0$ つまり $f(z) = 0$ を満たす z は存在しない)。
- 単射でもない ($e^{z+2\pi i} = e^z$ を満たすので周期関数であり、無限回同じ値を取る)。

4.1.1 $e^w = z$ を解く

定理 16.6 (方程式 $e^w = z$ の解)

4.1.1 $e^w = z$ を解く

定理 16.6 (方程式 $e^w = z$ の解)

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、w についての方程式 $e^w = z$ の解が存在する。その解は、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$w = \log r + i\,(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

これは $w = \log|z| + i \arg z$ とも書ける。

4.1.1 $e^w = z$ を解く

定理 16.6 (方程式 $e^w = z$ の解)

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、w についての方程式 $e^w = z$ の解が存在する。その解は、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$w = \log r + i\left(\theta + 2n\pi\right) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

これは $w = \log|z| + i \arg z$ とも書ける。

証明 $w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ とおくと $e^w = e^u e^{iv}$.

$$\begin{aligned} e^w = z \Leftrightarrow e^u e^{iv} &= re^{i\theta} \\ \Leftrightarrow r = e^u \quad &\text{かつ} \quad e^{iv} = e^{i\theta} \\ \Leftrightarrow u = \log r \quad &\text{かつ} \quad (\exists n \in \mathbb{Z})v = \theta + 2n\pi \\ \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})w &= \log r + i\left(\theta + 2n\pi\right). \quad \square \end{aligned}$$

4.1.1 $e^w = z$ を解く

定理 16.6 (方程式 $e^w = z$ の解)

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、w についての方程式 $e^w = z$ の解が存在する。その解は、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$w = \log r + i\left(\theta + 2n\pi\right) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

これは $w = \log|z| + i\arg z$ とも書ける。

証明 $w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ とおくと $e^w = e^u e^{iv}$.

$$\begin{aligned} e^w = z \Leftrightarrow e^u e^{iv} &= re^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow r = e^u \quad \text{かつ} \quad e^{iv} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow u = \log r \quad \text{かつ} \quad (\exists n \in \mathbb{Z})v = \theta + 2n\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})w = \log r + i\left(\theta + 2n\pi\right). \quad \square \end{aligned}$$

繰り返しになるが $\Leftrightarrow$ の $\Leftarrow$ は明らか。$\Rightarrow$ については、$e^u e^{iv} = re^{i\theta}$ の両辺の絶対値を取って

$$e^u = \left|e^u e^{iv}\right| = \left|re^{i\theta}\right| = r\ (\neq 0).$$

それで $e^u e^{iv} = re^{i\theta}$ を割って $e^{iv} = e^{i\theta}$. $\square$

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。

$e^w = 1$

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i$

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。

$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。

$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = 2$

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。

$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。

$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2$

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 2 + (\pi + 2n\pi)i = \log 2 + (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

4.1.1 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 2 + (\pi + 2n\pi)i = \log 2 + (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = i = 1 \cdot e^{i \frac{\pi}{2}}$ の解は $w = (2n + 1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 16.7 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 2 + (\pi + 2n\pi)i = \log 2 + (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ の解は $w = (2n + 1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -2i = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ の解は $w = \log 2 + (2n - 1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

例 16.8 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$$

例 16.8 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}\end{aligned}$$

例 16.8 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^{0} = -1 = 1 \cdot e^{\pi i}\end{aligned}$$

例 16.8 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^{0} = -1 = 1 \cdot e^{\pi i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi)\end{aligned}$$

例 16.8 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^{0} = -1 = 1 \cdot e^{\pi i} \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = (n + 1/2)\,\pi.\end{aligned}$$

例 16.8 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^{0} = -1 = 1 \cdot e^{\pi i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = (n + 1/2)\,\pi.\end{aligned}$$

高校生の答えと変わらない？

例 16.8 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^0 = -1 = 1 \cdot e^{\pi i} \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = (n + 1/2)\,\pi.\end{aligned}$$

高校生の答えと変わらない？探す範囲を複素数まで広げたが、実数以外の解は見つからなかった、ということ (より強い主張)。

例 16.8 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^{0} = -1 = 1\cdot e^{\pi i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ z = (n+1/2)\,\pi.\end{aligned}$$

高校生の答えと変わらない？探す範囲を複素数まで広げたが、実数以外の解は見つからなかった、ということ (より強い主張)。

(別解) $X = e^{iz}$ とおくと

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) = 0 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 0 \Leftrightarrow X^2+1 = 0 \Leftrightarrow X = \pm i$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} = \pm i = 1\cdot e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$$

$$\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ iz = \log 1 + (2n\pm 1/2)\pi i \Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ z = (2n\pm 1/2)\pi.$$

例 16.8 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^0 = -1 = 1\cdot e^{\pi i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ z = (n+1/2)\pi.\end{aligned}$$

高校生の答えと変わらない？探す範囲を複素数まで広げたが、実数以外の解は見つからなかった、ということ (より強い主張)。

(別解) $X = e^{iz}$ とおくと

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) = 0 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 0 \Leftrightarrow X^2+1 = 0 \Leftrightarrow X = \pm i$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} = \pm i = 1\cdot e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$$

$$\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ iz = \log 1 + (2n\pm 1/2)\pi i \Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ z = (2n\pm 1/2)\pi.$$

一見、上の解と違うように見えるかもしれないが、実は同じである。 □

例 16.8 (三角関数の方程式 (続き))

例 16.8 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式を考える方が見通し良いかも。

2. $\sin z = 2$ を解け。

例 16.8 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式を考える方が見通し良いかも。

2. $\sin z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\sin z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = 4i$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 4iX - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 1 \cdot (-1)} \Leftrightarrow e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i.$$

例 16.8 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式を考える方が見通し良いかも。

② $\sin z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\sin z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = 4i$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 4iX - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 1 \cdot (-1)} \Leftrightarrow e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i.$$

$2 \pm \sqrt{3} > 0$ であるから、$2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}$ が極形式である。

例 16.8 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式を考える方が見通し良いかも。

2. $\sin z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\sin z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = 4i$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 4iX - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 1 \cdot (-1)} \Leftrightarrow e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i.$$

$2 \pm \sqrt{3} > 0$ であるから、$2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{2}}$ が極形式である。ゆえに

$$\sin z = 2 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$$

$$\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + (2n + 1/2)\pi$$

例 16.8 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式を考える方が見通し良いかも。

② $\sin z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\sin z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = 4i$$
$$\Leftrightarrow X^2 - 4iX - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 1 \cdot (-1)} \Leftrightarrow e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i.$$

$2 \pm \sqrt{3} > 0$ であるから、$2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}$ が極形式である。ゆえに

$$\sin z = 2 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$$
$$\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + (2n + 1/2)\pi$$

すなわち

$$z = (2n + 1/2)\pi - i \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

例 16.8 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式を考える方が見通し良いかも。

(2) $\sin z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\sin z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = 4i$$
$$\Leftrightarrow X^2 - 4iX - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 1\cdot(-1)} \Leftrightarrow e^{iz} = (2\pm\sqrt{3})i.$$

$2\pm\sqrt{3} > 0$ であるから、$2\pm\sqrt{3} = (2\pm\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}$ が極形式である。ゆえに

$$\sin z = 2 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log(2\pm\sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$$
$$\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = -i\log(2\pm\sqrt{3}) + (2n + 1/2)\pi$$

すなわち

$$z = (2n + 1/2)\pi - i\log\left(2\pm\sqrt{3}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

今回は、実数の範囲には解が存在しない方程式に対して、複素数まで広げることで解を発見した。

4.1.2 複素対数関数の定義

“複素対数関数” $\log z$ を定義しよう。

やり方が複数ある。

4.1.2 複素対数関数の定義

“複素対数関数” $\log z$ を定義しよう。

やり方が複数ある。

1. $e^w = z$ を満たす w 全てを採用する。

4.1.2 複素対数関数の定義

“複素対数関数” $\log z$ を定義しよう。

やり方が複数ある。

1. $e^w = z$ を満たす w 全てを採用する。つまり $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$\log z := \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{3}$$

4.1.2 複素対数関数の定義

“複素対数関数” $\log z$ を定義しよう。

やり方が複数ある。

1. $e^w = z$ を満たす w 全てを採用する。つまり $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$\log z := \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{3}$$

この log は値が 1 つに決まらないので、写像・関数ではない。
(無限) **多価関数**という。
これと区別するため、普通の関数を**一価関数**と呼ぶことがある。

4.1.2 複素対数関数の定義

2. I を幅 2π の半開区間とする。

   例えば $I = [0, 2\pi)$, $I = (-\pi, \pi]$, あるいはより一般に $\alpha \in \mathbb{R}$ として $I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ または $I = (\alpha, \alpha + 2\pi]$ とする。

4.1.2 複素対数関数の定義

2. I を幅 2π の半開区間とする。

例えば $I=[0,2\pi)$, $I=(-\pi,\pi]$, あるいはより一般に $\alpha\in\mathbb{R}$ として $I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ または $I=(\alpha,\alpha+2\pi]$ とする。このとき、任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して

$$z=re^{i\theta},\quad r>0,\quad \theta\in I \tag{4a}$$

を満たす r, θ が一意的に存在するので

$$\log z:=\log r+i\theta \tag{4b}$$

とおく。$\log\colon\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ であり、値域は $\{u+iv\mid u\in\mathbb{R},\ v\in I\}$.

4.1.2 複素対数関数の定義

2. I を幅 2π の半開区間とする。

例えば $I=[0,2\pi)$, $I=(-\pi,\pi]$, あるいはより一般に $\alpha\in\mathbb{R}$ として $I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ または $I=(\alpha,\alpha+2\pi]$ とする。このとき、任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して

$$z=re^{i\theta},\quad r>0,\quad \theta\in I \tag{4a}$$

を満たす r, θ が一意的に存在するので

$$\log z:=\log r+i\theta \tag{4b}$$

とおく。$\log\colon\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ であり、値域は $\{u+iv\mid u\in\mathbb{R},\ v\in I\}$.
$I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ の場合に値域を図示してみること。

4.1.2 複素対数関数の定義

2. I を幅 2π の半開区間とする。

例えば $I=[0,2\pi)$, $I=(-\pi,\pi]$, あるいはより一般に $\alpha\in\mathbb{R}$ として $I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ または $I=(\alpha,\alpha+2\pi]$ とする。このとき、任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して

$$z=re^{i\theta},\quad r>0,\quad \theta\in I \tag{4a}$$

を満たす r, θ が一意的に存在するので

$$\log z:=\log r+i\theta \tag{4b}$$

とおく。$\log\colon\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ であり、値域は $\{u+iv\mid u\in\mathbb{R},\ v\in I\}$.
$I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ の場合に値域を図示してみること。

このように、適当なルールで 1 つの値を選んで一価関数とするとき、その一価関数を元の多価関数の**分枝**(ぶんし) (branch) と呼ぶ。

4.1.2 複素対数関数の定義 (続き)

特に $I=(-\pi,\pi]$ のとき、**複素対数関数の主値** (the principal value of complex logarithm) と呼び、先頭が大文字の $\operatorname{Log} z$ で表す。

対数関数の主値 (覚える)

(5) $z=re^{i\theta}, r>0, \theta\in(-\pi,\pi]$ とするとき $\operatorname{Log} z := \log r + i\theta.$

偏角の主値 Arg を用いると

(6) $$\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

$\operatorname{Log}\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ であり、値域は $\{u+iv \mid u\in\mathbb{R},\ v\in(-\pi,\pi]\}$.

2022/11/16 の授業はここまでです。

参考文献

[1] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、祐乗坊瑞満(ゆうじょうぼうずいまん)、水本久夫。