複素関数・同演習 第 18 回
〜対数関数と冪関数 (3), 線積分 (1)〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 11 月 29 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 授業の進行状況を見ると、例年と比べて遅れがち。久しぶりの 100% 対面授業のせいか (オンラインだとスライドに詰め込みがち)。という訳で、§4 対数関数と冪関数の残り、z^{α} の図示、$\alpha \notin \mathbb{R}$ の場合の例として i^i、逆三角関数などの話 (「初等関数ワールド」) はカットする。授業資料には残す。期末試験範囲外である (これらが試験範囲外であることは例年と同じ)。
- §5 線積分に入る。今回は複素線積分の定義を述べる。

例 18.1 ($\sqrt{-1}$ は何か？)

(無限多価 の log を用いて $\sqrt{z} = p(z, 1/2) := e^{\frac{1}{2}\log z}$ とする場合)

$(-1) = 1 \cdot e^{\pi i}$ より $\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$ であるから

$$\sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(2n+1)\pi i} = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i} = i(-1)^n = \pm i.$$

(別法) $\alpha = \frac{1}{2}$, $z = -1$ とすると、$z = 1 \cdot e^{\pi i}$, $\omega = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$ であるから

$$\sqrt{-1} = z^{1/2} = 1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\cdot\pi i} \cdot \omega^k = i \cdot (-1)^k \quad (k = 0, 1)$$

ゆえに

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

4.2 冪関数 (power function) z^α (カット)

1つくらい $\alpha \notin \mathbb{R}$ に対する z^α を求めてみよう。

1 つくらい $\alpha \notin \mathbb{R}$ に対する z^α を求めてみよう。

例 18.2 (i の i 乗)

(無限多価 の log を用いて $a^b = e^{b \log a}$ とする場合)

多分応用はないと思うが、i^i を求めてみよう。i の極形式は $i = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ であるから

$$\log i = \log |1| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに ($a^b = e^{b \log a}$ によって)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i \cdot \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i} = e^{-\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$p(z,\alpha)$ を図示する Mathematica プログラム

```
p[z_, alpha_, maxn_] := Module[{r, t, w},
  r = Abs[z]; t = Arg[z]; w = r^alpha*Exp[ alpha t];
  Table[{Re[w Exp[I n alpha 2 Pi]], Im[w Exp[I n alpha 2 Pi]]}, {n, maxn}]]
g8=ListPlot[p[1,1/8,8], AspectRatio->Automatic, PlotStyle->{PointSize[0.03]}]
groot2a=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 100], AspectRatio -> Automatic]
groot2b=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 1000], AspectRatio -> Automatic]
Manipulate[ListPlot[p[1, Sqrt[2], n], AspectRatio -> Automatic], {n, 1, 1000}]
```

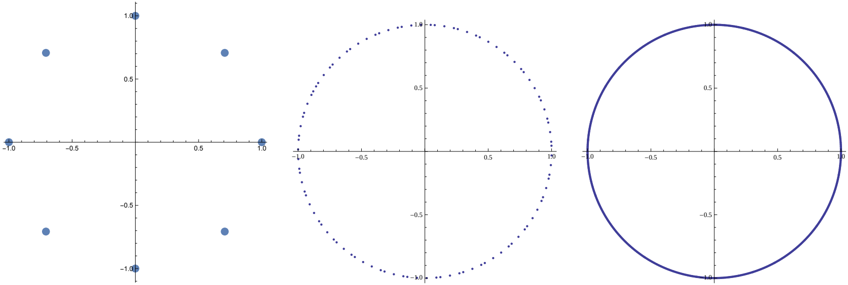

図 1: $p(1,1/8)$, $p(1,\sqrt{2})$ (100 個), $p(1,\sqrt{2})$ (1000 個)

4.3 初等関数ワールド (カット)

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

4.3 初等関数ワールド (カット)

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

例えば

$$\begin{aligned} \sin z = w \Leftrightarrow & \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \\ \Leftrightarrow & \quad \text{途中省略} \\ \Leftrightarrow & \quad z = -i \log\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right) \end{aligned}$$

であるから、次のように定義する。

$$\sin^{-1} z = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

4.3 初等関数ワールド (カット)

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

例えば

$$\begin{aligned} \sin z = w \Leftrightarrow & \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \\ \Leftrightarrow & \quad \text{途中省略} \\ \Leftrightarrow & \quad z = -i \log\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right) \end{aligned}$$

であるから、次のように定義する。

$$\sin^{-1} z = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

これらは、分枝を選んで一価関数にしなければ多価関数である。多価関数を扱うには、「解析接続」を学んでからとりかかるのが良い。この講義では詳細は省略する。

4.3 初等関数ワールド　おまけ

一通り書いておこう。

$$\arcsin z = \sin^{-1} z := -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\arccos z = \cos^{-1} z := i \log\left(z - i\sqrt{1-z^2}\right) = \frac{\pi}{2} + i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\arctan z = \tan^{-1} z := \frac{i}{2}\left(\log(1-iz) - \log(1+iz)\right),$$

$$\mathrm{arcsinh}\, z = \sinh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\mathrm{arccosh}\, z = \cosh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\mathrm{arctahn}\, z = \tanh^{-1} z := \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

問　次式を確かめよ。

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2},$$

$$(\mathrm{arcsinh}\, z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \quad (\mathrm{arccosh}\, z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad (\mathrm{arctahn}\, z)' = \frac{1}{1-z^2}.$$

問　次式を確かめよ。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z.$$

5 線積分　5.1 線積分の定義

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のとき (微積分) もそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげて走る感じ。景色がどんどん変わる。)

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のとき (微積分) もそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげて走る感じ。景色がどんどん変わる。)

定義 18.3 (2 つの線積分)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$C: z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$f\colon C^*\to\mathbb{C}$ は連続とする。ただし $C^*:=\{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$. このとき

(1) $$\int_C f(z)\,dz := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

とおき、f の曲線 C に沿う**線積分**と呼ぶ。

また

(2) $$\int_C f(z)\,|dz| := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$$

と定める。

5.1 線積分の定義

例 18.4

$f(z) = z^2$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ のとき。

例 18.4

$f(z)=z^2$, $C\colon z=\varphi(\theta)=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ のとき。$\varphi'(\theta)=ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz=\int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta=\int_0^\pi (e^{i\theta})^2\cdot ie^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^\pi e^{3i\theta}\,d\theta$$

$$=i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^\pi=\frac{1}{3}\left(e^{3i\pi}-e^{3\cdot 0}\right)=\frac{(-1)-1}{3}=-\frac{2}{3}.$$

5.1 線積分の定義

例 18.4

$f(z) = z^2$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ のとき。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{\pi} (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{\pi} e^{3i\theta}\,d\theta$$
$$= i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\left(e^{3i\pi} - e^{3\cdot 0}\right) = \frac{(-1)-1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

例 18.5

$f(z) = \dfrac{1}{z}$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ のとき。

例 18.4

$f(z) = z^2$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ のとき。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{\pi} (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{\pi} e^{3i\theta}\,d\theta$$
$$= i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\left(e^{3i\pi} - e^{3\cdot 0}\right) = \frac{(-1)-1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

例 18.5

$f(z) = \dfrac{1}{z}$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ のとき。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi i.$$

注意事項

1. 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実 1 変数関数の積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

注意事項

1. 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実 1 変数関数の積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

2. φ は区分的に C^1 級であるから

   $(\exists\{t_j\}_{j=0}^m)\quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta \wedge$ 各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級.

   t_j において φ の片側微分係数は存在するが、微分係数 $\varphi'(t_j)$ は存在しないことがありうる。

$$\int_C f(z)\,dz := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

とみなすべきである。そういう意味では広義積分である。

5.1 線積分の定義

3. $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt := \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V(t)\,dt \tag{3}$$

のように定義しても良い (ただし $U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$)。

$\alpha < \beta$ であれば

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt \tag{4}$$

が成り立つ。

5.1 線積分の定義

3. $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$(3) \qquad \int_\alpha^\beta F(t)\,dt := \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V(t)\,dt$$

のように定義しても良い (ただし $U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$)。

$\alpha < \beta$ であれば

$$(4) \qquad \left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$$

が成り立つ。Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left|\sum_j F(t_j)\Delta t_j\right| \le \sum_j |F(t_j)|\,\Delta t_j$$

から証明出来る。(3) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

5.1 線積分の定義

4. (とても良く使う。)

(5)
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|\,.$$

4. (とても良く使う。)

(5) $$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|.$$

実際、C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とすると

$$\left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt$$

と書き換えられるが、これは (4) によって確かに成立する。

5.1 線積分の定義

4. (とても良く使う。)

(5)
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|.$$

実際、C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とすると
$$\left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt$$
と書き換えられるが、これは (4) によって確かに成立する。
大抵は、この後
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in C^*}|f(z)|\int_C |dz| = \max_{z\in C^*}|f(z)|\times(C\text{ の弧長})$$
と評価することになる。

注　$C^* = C$ の跡 $=\varphi$ の値域 $=\mathrm{Image}\,\varphi = \{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ である。

注　定義より $\displaystyle\int_C |dz| = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,dt$. これは C の弧長である。

5.2 原始関数

なぜ線積分が重要か。

複素関数においては、それこそが微分の逆演算と考えることができるものだからである。

5.2 原始関数

なぜ線積分が重要か。

複素関数においては、それこそが微分の逆演算と考えることができるものだからである。

定理 18.6 (微積分の基本定理、のようなもの)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は連続で原始関数 F を持つ ($F'=f$)、C は Ω 内の区分的 C^1 級曲線とするとき、

$$\int_C f(z)\,dz = F(b)-F(a). \tag{6}$$

が成り立つ。ただし、a, b はそれぞれ C の始点、終点である。

((6) の右辺を、$[F(z)]_a^b$ や $[F(z)]_{z=a}^{z=b}$ で表す。)

証明　C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ と表せて、φ が C^1 級である場合、

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C F'(z)\,dz=\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\varphi(t))\,dt$$
$$=\left[F(\varphi(t))\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

証明　C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ と表せて、φ が C^1 級である場合、

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C F'(z)\,dz=\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F\left(\varphi(t)\right)dt$$
$$=\left[F\left(\varphi(t)\right)\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}=F\left(\varphi(\beta)\right)-F\left(\varphi(\alpha)\right)=F(b)-F(a).$$

φ が連続かつ区分的 C^1 級の場合、ある $\{t_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,\quad \varphi \text{ は各 } [t_{j-1},t_j] \text{ で } C^1 \text{ 級.}$$

5.2 原始関数

証明　C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ と表せて、φ が C^1 級である場合、

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C F'(z)\,dz=\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F\left(\varphi(t)\right)dt$$
$$=\left[F\left(\varphi(t)\right)\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}=F\left(\varphi(\beta)\right)-F\left(\varphi(\alpha)\right)=F(b)-F(a).$$

φ が連続かつ区分的 C^1 級の場合、ある $\{t_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,\quad \varphi \text{ は各 } [t_{j-1},t_j] \text{ で } C^1 \text{ 級.}$$

このとき

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{j=1}^m\int_{t_{j-1}}^{t_j}F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\sum_{j=1}^m\left(F(\varphi(t_j))-F(\varphi(t_{j-1}))\right)$$
$$=F\left(\varphi(t_m)\right)-F\left(\varphi(t_0)\right)=F(b)-F(a).$$

5.2 原始関数

証明　C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ と表せて、φ が C^1 級である場合、

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C F'(z)\,dz=\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\varphi(t))\,dt$$
$$=\left[F(\varphi(t))\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

φ が連続かつ区分的 C^1 級の場合、ある $\{t_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,\quad \varphi\text{ は各 }[t_{j-1},t_j]\text{ で }C^1\text{ 級}.$$

このとき

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{j=1}^m\int_{t_{j-1}}^{t_j}F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\sum_{j=1}^m\left(F(\varphi(t_j))-F(\varphi(t_{j-1}))\right)$$
$$=F(\varphi(t_m))-F(\varphi(t_0))=F(b)-F(a).$$

(本当はいつもこのように積分範囲を分割して議論すべきだけど、ワンパターンの議論なので、以下では、φ が C^1 級のときの証明だけを書いて済ませることが多い。) □

5.2 原始関数

上の定理は、1 変数実関数の場合とある意味では同じである。

5.2 原始関数

上の定理は、1 変数実関数の場合とある意味では同じである。しかし、

連続な 1 変数実関数は必ず原始関数を持つ。

$$(\because F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \text{ とおくと } F'(x) = f(x))$$

は成り立つが、

連続な 1 変数複素関数は原始関数を持つとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

5.2 原始関数

上の定理は、1 変数実関数の場合とある意味では同じである。しかし、

連続な 1 変数実関数は必ず原始関数を持つ。

$$(\because F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \text{ とおくと } F'(x) = f(x))$$

は成り立つが、

連続な 1 変数複素関数は原始関数を持つとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

(このあたりの事情は、ベクトル解析でも同じである。任意のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャル ($\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす F のこと) が存在するとは限らない。もし存在すれば、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})$.)

すでに説明した 2 つの例を見直してみる。

例 18.7 (原始関数が存在すれば楽々計算　例 18.4 再訪)

$f(z) = z^2$, $C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ とする。

5.2 原始関数

すでに説明した 2 つの例を見直してみる。

例 18.7 (原始関数が存在すれば楽々計算　例 18.4 再訪)

$f(z)=z^2$, $C\colon z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ とする。$F(z):=\dfrac{z^3}{3}$ は $F'=f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1}=\frac{(-1)^3-1^3}{3}=-\frac{2}{3}\quad(\text{もちろん前の計算と一致}).$$

5.2 原始関数

すでに説明した 2 つの例を見直してみる。

例 18.7 (原始関数が存在すれば楽々計算　例 18.4 再訪)

$f(z) = z^2$, $C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ とする。$F(z) := \dfrac{z^3}{3}$ は $F' = f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3} \quad \text{(もちろん前の計算と一致).}$$

例 18.8 (原始関数が存在しない例　例 18.5 再訪)

(前半) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\})$ とする。

5.2 原始関数

すでに説明した 2 つの例を見直してみる。

例 18.7 (原始関数が存在すれば楽々計算　例 18.4 再訪)

$f(z) = z^2$, $C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ とする。$F(z) := \dfrac{z^3}{3}$ は $F' = f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z)\, dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3} \quad \text{(もちろん前の計算と一致).}$$

例 18.8 (原始関数が存在しない例　例 18.5 再訪)

(前半) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\})$ とする。f の原始関数は存在しない。

5.2 原始関数

すでに説明した 2 つの例を見直してみる。

例 18.7 (原始関数が存在すれば楽々計算　例 18.4 再訪)

$f(z) = z^2$, $C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ とする。$F(z) := \dfrac{z^3}{3}$ は $F' = f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z)\, dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3} \quad \text{(もちろん前の計算と一致).}$$

例 18.8 (原始関数が存在しない例　例 18.5 再訪)

(前半) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\})$ とする。f の原始関数は存在しない。実際、もしも原始関数 F が存在すると仮定すると、$C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ は Ω 内の C^1 級曲線であるから

$$\int_C f(z)\, dz = [F(z)]_{z=1}^{z=1} = F(1) - F(1) = 0.$$

ところが $\displaystyle\int_C f(z)\, dz = 2\pi i$ であるから、矛盾が生じる。

5.2 原始関数

そういうわけで、原始関数が存在するかどうかが大事である。

- 多項式の場合は、必ず存在する。
- 収束冪級数の場合は、必ず存在する。
- 有理関数の場合は log が出るケースがある。その場合は存在しないかもしれない。要注意。
- $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Arg} z$, $\bar{z}$ は原始関数を持たない。(これらの関数に見覚えがあるかも。正則ではないことに注意。実は原始関数を持つためには正則であることが必要である。一方、十分条件ではないことは、有理関数の例を見れば分かる。これらのことは後で詳しく論じる。ここで証明しない。)

例 18.8 (原始関数が存在しない例 (つづき)　例 18.5 再訪)

(後半) $\Omega' := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ における対数関数の分枝 $\log z$ を、$z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$) に対して

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。$F(z) := \log z$ は Ω' で正則であり、$F'(z) = \dfrac{1}{z}$.

$0 < \varepsilon < \pi$ を満たす ε に対して

$$C_\varepsilon \colon z = e^{i\theta} \quad (\varepsilon \le \theta \le 2\pi - \varepsilon)$$

とおく。C_ε は Ω' 内の C^1 級曲線で

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = [F(z)]_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \log e^{i(2\pi-\varepsilon)} - \log e^{i\varepsilon}$$
$$= (2\pi - \varepsilon)i - i\varepsilon = 2(\pi - \varepsilon)i.$$

$\varepsilon \to +0$ のときの極限 $2\pi i$ が、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i$ に一致するのはもっとも。

証明:
$$\left|\int_C f(z)\,dz - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \le \left|\int_{A_\varepsilon + B_\varepsilon} |f(z)|\,dz\right| \le \max_{|z|=1}|f(z)| \times (A_\varepsilon \text{ の長さ} + B_\varepsilon \text{ の長さ}) \to 0.$$

2022/11/28 はここまで講義しました。

参考文献

[1] 神保道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.