

複素関数・同演習 第 18 回

～対数関数と冪関数 (3), 線積分 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022 年 11 月 29 日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 対数関数と冪関数 (やり残し)
 - 冪関数 (power function) z^α (やり残し)
 - 初等関数ワールド (カット)
- ③ 線積分
 - 線積分の定義
 - 原始関数
- ④ 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 授業の進行状況を見ると、例年と比べて遅れがち。久しぶりの100%対面授業のせいかな(オンラインだとスライドに詰め込みがち)。という訳で、§4 対数関数と冪関数の残り、 z^α の図示、 $\alpha \notin \mathbb{R}$ の場合の例として i^i 、逆三角関数などの話(「初等関数ワールド」)はカットする。授業資料には残す。期末試験範囲外である(これらが試験範囲外であることは例年と同じ)。
- §5 線積分に入る。今回は複素線積分の定義を述べる。

4.2 冪関数 (power function) z^α (カット)

例 18.1 ($\sqrt{-1}$ は何か?)

(無限多価の \log を用いて $\sqrt{z} = p(z, 1/2) := e^{\frac{1}{2}\log z}$ とする場合)

$(-1) = 1 \cdot e^{\pi i}$ より $\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$) であるから

$$\sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(2n+1)\pi i} = e^{(n+\frac{1}{2})\pi i} = i(-1)^n = \pm i.$$

(別法) $\alpha = \frac{1}{2}$, $z = -1$ とすると、 $z = 1 \cdot e^{\pi i}$, $\omega = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$ であるから

$$\sqrt{-1} = z^{1/2} = 1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \cdot \pi i} \cdot \omega^k = i \cdot (-1)^k \quad (k = 0, 1)$$

ゆえに

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

4.2 冪関数 (power function) z^α (カット)

1つくらい $\alpha \notin \mathbb{R}$ に対する z^α を求めてみよう。

例 18.2 (i の i 乗)

(無限多価の \log を用いて $a^b = e^{b \log a}$ とする場合)

多分応用はないと思うが、 i^i を求めてみよう。 i の極形式は $i = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ であるから

$$\log i = \log |1| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに ($a^b = e^{b \log a}$ によって)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i \cdot (2n + \frac{1}{2}) \pi i} = e^{-(2n + \frac{1}{2}) \pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

4.2 冪関数 (power function) z^α おまけ(カット)

$p(z, \alpha)$ を図示する Mathematica プログラム

```
p[z_, alpha_, maxn_] := Module[{r, t, w},  
  r = Abs[z]; t = Arg[z]; w = r^alpha*Exp[ alpha t];  
  Table[{Re[w Exp[I n alpha 2 Pi]], Im[w Exp[I n alpha 2 Pi]]}, {n, maxn}]]  
g8=ListPlot[p[1,1/8,8], AspectRatio->Automatic, PlotStyle->{PointSize[0.03]}]  
groot2a=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 100], AspectRatio -> Automatic]  
groot2b=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 1000], AspectRatio -> Automatic]  
Manipulate[ListPlot[p[1, Sqrt[2], n], AspectRatio -> Automatic], {n, 1, 1000}]
```

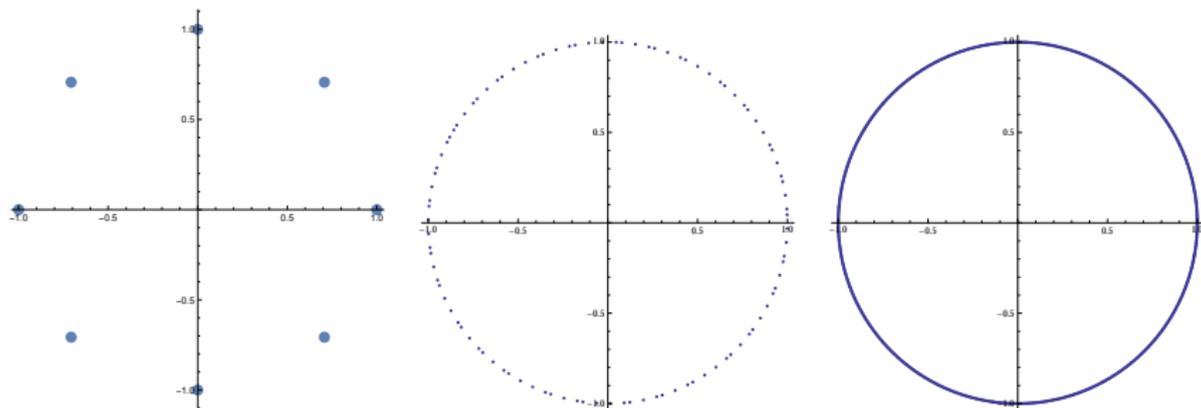


図 1: $p(1, 1/8)$, $p(1, \sqrt{2})$ (100 個), $p(1, \sqrt{2})$ (1000 個)

4.3 初等関数ワールド (カット)

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

例えば

$$\begin{aligned}\sin z = w &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \\ &\Leftrightarrow \text{途中省略} \\ &\Leftrightarrow z = -i \log \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right)\end{aligned}$$

であるから、次のように定義する。

$$\sin^{-1} z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

これらは、分枝を選んで一価関数にしなければ多価関数である。多価関数を扱うには、「解析接続」を学んでからとりかかるのが良い。この講義では詳細は省略する。

4.3 初等関数ワールド おまけ

一通り書いておこう。

$$\arcsin z = \sin^{-1} z := -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\arccos z = \cos^{-1} z := i \log \left(z - i\sqrt{1 - z^2} \right) = \frac{\pi}{2} + i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\arctan z = \tan^{-1} z := \frac{i}{2} (\log(1 - iz) - \log(1 + iz)),$$

$$\operatorname{arcsinh} z = \sinh^{-1} z := \log \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

$$\operatorname{arccosh} z = \cosh^{-1} z := \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{arctanh} z = \tanh^{-1} z := \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.$$

問 次式を確かめよ。

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (\arctan z)' = \frac{1}{1 + z^2},$$

$$(\operatorname{arcsinh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}, \quad (\operatorname{arccosh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad (\operatorname{arctanh} z)' = \frac{1}{1 - z^2}.$$

問 次式を確かめよ。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z.$$

5 線積分 5.1 線積分の定義

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のとき(微積分)もそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげて走る感じ。景色がどんどん変わる。)

定義 18.3 (2つの線積分)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $C : z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、 $f : C^* \rightarrow \mathbb{C}$ は連続とする。ただし $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ 。このとき

$$(1) \quad \int_C f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

とおき、 f の曲線 C に沿う線積分と呼ぶ。

また

$$(2) \quad \int_C f(z) |dz| := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$$

と定める。

5.1 線積分の定義

例 18.4

$f(z) = z^2$, $C: z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) のとき。 $\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{3i\theta} d\theta \\ &= i \left[\frac{e^{3i\theta}}{3i} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} (e^{3i\pi} - e^{3 \cdot 0}) = \frac{(-1) - 1}{3} = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例 18.5

$f(z) = \frac{1}{z}$, $C: z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) のとき。 $\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

5 線積分 5.1 線積分の定義

注意事項

① 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実1変数関数の積分 $\int_a^b f(x) dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

② φ は区分的に C^1 級であるから

$(\exists \{t_j\}_{j=0}^m) \quad \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta \wedge$ 各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級。

t_j において φ の片側微分係数は存在するが、微分係数 $\varphi'(t_j)$ は存在しないことがありうる。

$$\int_C f(z) dz := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

とみなすべきである。そういう意味では広義積分である。

5.1 線積分の定義

- ⑧ $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人があるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$(3) \quad \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt := \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt$$

のように定義しても良い (ただし $U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$)。

$\alpha < \beta$ であれば

$$(4) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt$$

が成り立つ。Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left| \sum_j F(t_j) \Delta t_j \right| \leq \sum_j |F(t_j)| \Delta t_j$$

から証明出来る。(3) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

5.1 線積分の定義

④ (とても良く使う。)

$$(5) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|.$$

実際、 C が $z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) とすると

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t)) \varphi'(t)| dt$$

と書き換えられるが、これは (4) によって確かに成立する。

大抵は、この後

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in C^*} |f(z)| \int_C |dz| = \max_{z \in C^*} |f(z)| \times (C \text{ の弧長})$$

と評価することになる。

注 $C^* = C$ の跡 = φ の値域 = Image $\varphi = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ である。

注 定義より $\int_C |dz| = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt$. これは C の弧長である。

5.2 原始関数

なぜ線積分が重要か。

複素関数においては、それこそが微分の逆演算と考えることができるものだからである。

定理 18.6 (微積分の基本定理、のようなもの)

Ω は \mathbb{C} の開集合, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続で原始関数 F を持つ ($F' = f$)、 C は Ω 内の区分的 C^1 級曲線とすると、

$$(6) \quad \int_C f(z) dz = F(b) - F(a).$$

が成り立つ。ただし、 a, b はそれぞれ C の始点、終点である。

((6) の右辺を、 $[F(z)]_a^b$ や $[F(z)]_{z=a}^{z=b}$ で表す。)

5.2 原始関数

証明 C が $z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) と表せて、 φ が C^1 級である場合、

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C F'(z) dz = \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) dt \\ &= [F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

φ が連続かつ区分的 C^1 級の場合、ある $\{t_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta, \quad \varphi \text{ は各 } [t_{j-1}, t_j] \text{ で } C^1 \text{ 級.}$$

このとき

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \sum_{j=1}^m (F(\varphi(t_j)) - F(\varphi(t_{j-1}))) \\ &= F(\varphi(t_m)) - F(\varphi(t_0)) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

(本当はいつもこのように積分範囲を分割して議論すべきだけど、ワンパターンの議論なので、以下では、 φ が C^1 級のときの証明だけを書いて済ませることが多い。) □

5.2 原始関数

上の定理は、1変数実関数の場合とある意味では同じである。しかし、

連続な1変数実関数は必ず原始関数を持つ。

$$(\because F(x) := \int_a^x f(t) dt \text{ とおくと } F'(x) = f(x))$$

は成り立つが、

連続な1変数複素関数は原始関数を持つとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

(このあたりの事情は、ベクトル解析でも同じである。任意のベクトル場 \mathbf{f} に対して、 \mathbf{f} のポテンシャル ($\nabla F = \mathbf{f}$ を満たす F のこと) が存在するとは限らない。もし存在すれば、 $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a})$.)

5.2 原始関数

すでに説明した 2 つの例を見直してみる。

例 18.7 (原始関数が存在すれば楽々計算 例 18.4 再訪)

$f(z) = z^2$, $C: z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) とする。 $F(z) := \frac{z^3}{3}$ は $F' = f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z) dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3} \quad (\text{もちろん前の計算と一致}).$$

例 18.8 (原始関数が存在しない例 例 18.5 再訪)

(前半) $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$) とする。 f の原始関数は存在しない。実際、もしも原始関数 F が存在すると仮定すると、 $C: z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) は Ω 内の C^1 級曲線であるから

$$\int_C f(z) dz = [F(z)]_{z=1}^{z=1} = F(1) - F(1) = 0.$$

ところが $\int_C f(z) dz = 2\pi i$ であるから、矛盾が生じる。

5.2 原始関数

そういうわけで、原始関数が存在するかどうかが大変である。

- 多項式の場合は、必ず存在する。
- 収束冪級数の場合は、必ず存在する。
- 有理関数の場合は \log が出るケースがある。その場合は存在しないかもしれない。要注意。
- $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arg} z, \bar{z}$ は原始関数を持たない。
(これらの関数に見覚えがあるかも。正則ではないことに注意。実は原始関数を持つためには正則であることが必要である。一方、十分条件ではないことは、有理関数の例を見れば分かる。これらのことは後で詳しく論じる。ここで証明しない。)

5.2 原始関数

例 18.8 (原始関数が存在しない例 (つづき)) 例 18.5 再訪

(後半) $\Omega' := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ における対数関数の分枝 $\log z$ を、 $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$) に対して

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。 $F(z) := \log z$ は Ω' で正則であり、 $F'(z) = \frac{1}{z}$.

$0 < \varepsilon < \pi$ を満たす ε に対して

$$C_\varepsilon: z = e^{i\theta} \quad (\varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon)$$

とおく。 C_ε は Ω' 内の C^1 級曲線で

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz &= [F(z)]_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \log e^{i(2\pi-\varepsilon)} - \log e^{i\varepsilon} \\ &= (2\pi - \varepsilon)i - i\varepsilon = 2(\pi - \varepsilon)i. \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow +0$ のときの極限 $2\pi i$ が、 $\int_C f(z) dz = 2\pi i$ に一致するのはもつとも。

証明:

$$\left| \int_C f(z) dz - \int_{C_\varepsilon} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{A_\varepsilon + B_\varepsilon} |f(z)| dz \right| \leq \max_{|z|=1} |f(z)| \times (A_\varepsilon \text{ の長さ} + B_\varepsilon \text{ の長さ}) \rightarrow 0.$$

2022/11/28 はここまで講義しました。

参考文献