

# 複素関数・同演習 第 22 回

～円盤における Cauchy の積分公式と正則関数の冪級数展開可能性～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022 年 12 月 13 日

# 目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 円盤における Cauchy の積分公式と正則関数の冪級数展開可能性
  - 円盤における Cauchy の積分公式
  - 正則関数の冪級数展開
    - 正則関数の解析性
    - 冪級数展開の収束半径
  - Cauchy の積分公式の別証明
- ③ 参考: Cauchy の積分公式の別証明のための積分路の変形
  - 証明 1: 往復の橋を渡す
  - 証明 2: 開いてから閉じる
  - 証明 3: 2本の橋を渡して2つの閉曲線をつくる
  - 証明 4: Green の定理を使う
- ④ 参考文献

# 本日の内容・連絡事項

- いよいよ Cauchy の積分公式を説明する。まず円盤領域における Cauchy の積分公式を証明する。その後は速く事が進む。まずは、正則関数の冪級数展開可能性 (解析性) を示す。この定理の重要性はどれほど強調しても、しすぎにはならないだろう。系として「原始関数が存在すれば正則」という定理, 有名な Morera の定理の証明等々、懸案の課題がクリアできる。2022/12/13 の到達目標はこの辺まで。また冪級数展開の収束半径についても考察する。
- Cauchy の積分公式の証明には、違うやり方を採用しているテキストも多い。参考になると思われるので紹介する (§7.3 — 注: 12/13 の授業では省略した)。そのために必要な積分路の変形の証明は、バラエティに富んでいる。それについても説明を用意したが授業では省略する。(積分路の変形に慣れるのは良いことなので、余裕のある人は読むと良い。)

## 7 円盤における Cauchy の積分公式と正則関数の冪級数展開可能性

### 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

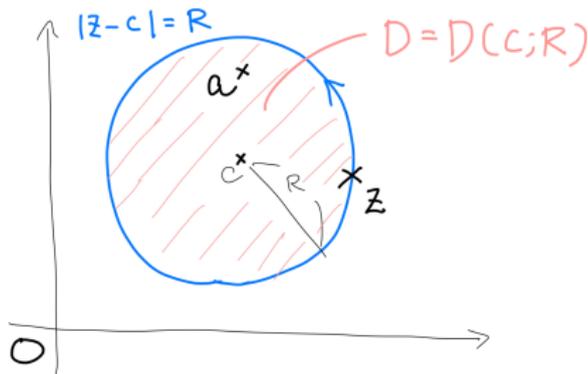
いよいよ主役 **Cauchy の積分公式** の登場である。まずは円盤の場合から。

#### 定理 22.1 (円盤における Cauchy の積分公式)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in \Omega$ ,  $R > 0$ ,  $D := D(c; R)$  とおくと  $\bar{D} \subset \Omega$  とする。このとき任意の  $a \in D$  に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

円周上の  $f$  の値から円盤内の点での  $f$  の値が求まる。



## 7.1 円盤における Cauchy の積分公式 余談 Goursat の定理

$a$  を変数と見る場合も多い。そのときは、積分変数  $z$  を  $\zeta$  に書き換え、 $a$  を  $z$  と書き換えて

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (z \in D)$$

とすると見やすい。この右辺は、何回でも積分記号下の微分が出来る (その事実の証明 (サボります) には、 $f$  が正則である必要はなく、 $f$  は連続であればよい)。

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

右辺の微分を実行すると、次の定理が得られる ( $f$  が無限回微分可能と分かる)。

### 系 22.2 (Goursat の定理、と言われていることがあるそうです)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in \Omega$ ,  $R > 0$ ,  $D := D(c; R)$  とおくと  $\bar{D} \subset \Omega$  とする。このとき任意の  $z \in D$ ,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$

定理 22.1 の証明のために補題を 2 つ用意する。

# 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

## 補題 22.3 (三角形版 Cauchy の積分定理の一般化)

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) の仮定の条件「 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則」を「 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は連続で、 $(\exists a \in \Omega) f$  は  $\Omega \setminus \{a\}$  で正則」と弱くしても  $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$  が成り立つ。

**証明**  $a \notin \Delta$  のときは、前と同じ証明で良い。

$a \in \Delta$  とする。以下の3つのうちのいずれかが成り立つ。

- (i)  $a$  は  $\Delta$  のある頂点
- (ii)  $a$  は  $\Delta$  のある边上にあるが、頂点ではない
- (iii)  $a$  は  $\Delta$  の内部にある。

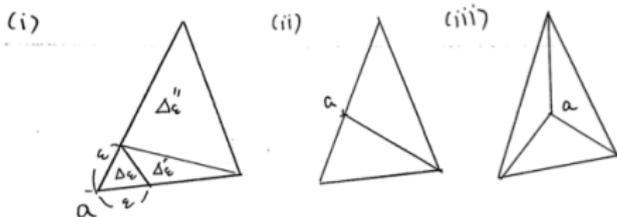


図 1:  $a$  が三角形  $\Delta$  のどこにあるかで場合分け (頂点, 頂点でない边上, 内部)

## 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

(i) の場合、 $\Delta$  の辺の長さより小さい任意の正数  $\varepsilon$  に対して、図のように  $\Delta$  を3つの三角形に分割する。 $a$  を含まない三角形  $\Delta'_\varepsilon, \Delta''_\varepsilon$  では、周に沿う線積分の値は0であるから、

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\partial\Delta'_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\partial\Delta''_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z) dz.$$

ゆえに ( $\partial\Delta_\varepsilon$  の周の長さが  $4\varepsilon$  以下であることに注意して)

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \Delta} |f(z)| \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |dz| \leq 4\varepsilon \max_{z \in \Delta} |f(z)|.$$

$$\varepsilon \rightarrow +0 \text{ とすることで } \int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

(ii), (iii) の場合も、図のように三角形を分割すると、各三角形で (i) が適用できて、線積分の値が0であることが導かれる。□

## 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

三角形版 Cauchy の積分定理が一般化されたので、それを用いて証明された星型領域における Cauchy の積分定理も一般化できる。

### 系 22.4 (星型領域における Cauchy の積分定理の一般化)

星型領域における Cauchy の積分定理の仮定の条件「 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則」を「 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は連続で、 $(\exists a \in \Omega) f$  は  $\Omega \setminus \{a\}$  で正則」と弱くしても

$\int_C f(z) dz = 0$  が成り立つ。

**証明** もともとの  $f$  が正則という仮定は、定理 21.3 の中で、 $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta) d\zeta$  が

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta) d\zeta$$

を満たすことの証明に使った。そこで三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) を用いたが、それが微分可能性を仮定しない点 (ただしその点での連続性は仮定) の存在を許せることが分かった。□

## 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

次を定理 22.1 の証明で用いる。

### 補題 22.5 (とても重要な線積分)

$a, c \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  とするとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i & (|c-a| < r \text{ のとき}) \\ 0 & (|c-a| > r \text{ のとき}). \end{cases}$$

(注意:  $|c-a| = r$  とすると、積分路の途中で被積分関数の分母が 0 となるので、その場合は除外しておくことにする。)

この結果は、後で当たり前に思えるようになるが、今証明するのはちょっとした仕事である。まずは、これを認めて懸案の定理 22.1 の証明を片付けよう。

## 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

### 定理 22.1 の証明

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & (z \in \Omega \setminus \{a\}) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

とおくと、 $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は連続で、 $\Omega \setminus \{a\}$  で正則である。

十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して  $D(c; R + \varepsilon) \subset \Omega$ .  $|z - c| = R$  を  $C$  とおくと、 $C$  は  $D(c; R + \varepsilon)$  内の  $C^1$  級の閉曲線である。星型領域における Cauchy の積分定理により

$$0 = \int_C g(z) dz = \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz - f(a) \int_C \frac{dz}{z - a}.$$

$$\int_C \frac{dz}{z - a} = 2\pi i \text{ であるから}$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad \square$$

## 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

### 補題 22.5 の証明

$|c - a| > r$  のとき。(直観的には赤いバツテンが  $|z - c| = r$  の外にあるので積分は 0 である。)  $r < R < |c - a|$  を満たす  $R$  を取ると、 $\frac{1}{z - a}$  は星型領域  $D(c; R)$  で正則で  $|z - c| = r$  はその中にあるので、星型領域における Cauchy の積分定理により

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

以下では、 $|c - a| < r$  のとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

であることの証明を 2 つ紹介する。1 つは積分路  $|z - a| = \delta$  ( $z = \delta e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ )) と変形して

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

とする (最後の等式は  $z = \delta e^{i\theta}$  とおいて計算できる)。もう 1 つは被積分関数を変形する方法である。

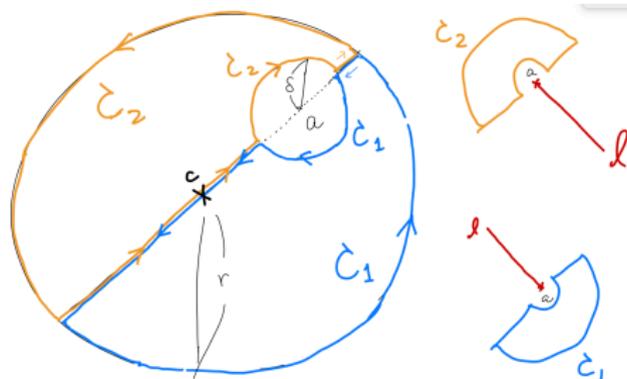
## 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

$|c - a| < r$  の場合の証明 1 — 積分路の変形を用いる 2つの閉曲線  $C_1, C_2$  を図のように取る。それぞれ  $a$  を端点とする半直線の補集合に含まれるので、星型領域における Cauchy の積分定理によって、 $\frac{1}{\zeta - a}$  の積分は 0 である。これから

$$0 = 0 + 0 = \int_{C_1} \frac{dz}{z - a} + \int_{C_2} \frac{dz}{z - a} = \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z - a} - \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z - a}.$$

移項して

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z - a} = \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i. \quad \square$$



## 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

### 定理 22.6 (一様収束ならば項別積分可能)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合で、 $C$  は  $\Omega$  内の区分的に  $C^1$  級の曲線、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は、 $C$  の像  $C^*$  上で連続な関数列で、 $C^*$  で関数  $f$  に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C f(z) dz.$$

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していなかった (本質的には同じ証明である)。

**証明**  $f$  は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

$$\left| \int_C f_n(z) dz - \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f_n(z) - f(z)| |dz| \leq \max_{\zeta \in C^*} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \int_C |dz|.$$

最後の  $\int_C |dz|$  は  $C$  の弧長である ( $n$  によらない有限の数)。

$\{f_n\}$  が  $C^*$  で  $f$  に一様収束とは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\zeta \in C^*} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| = 0$  を意味するので、

$$\int_C f_n(z) dz \rightarrow \int_C f(z) dz \quad (n \rightarrow \infty). \quad \square$$

## 7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 22.5 ( $|c - a| < r$  の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも  
 $|z - c| = r$  を満たす任意の  $z$  に対して

$$\frac{1}{z - a} = \frac{1}{(z - c) - (a - c)} = \frac{1}{z - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a - c}{z - c}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a - c)^n}{(z - c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で、 $|z - c| = r$  上で  $|公比| = \left| \frac{a - c}{z - c} \right| = \frac{|a - c|}{r} < 1$  (定数) であるから、Weierstrass の M-test より一様収束する。ゆえに命題 22.6 より項別積分が可能で

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z - a} = \int_{|z-c|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a - c)^n}{(z - c)^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z-c|=r} \frac{(a - c)^n}{(z - c)^{n+1}} dz.$$

すでに何度か見たように、 $\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{(z - c)^{n+1}} = 2\pi i \delta_{n0}$  であるから、 $n = 0$  の項のみ残り

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i. \quad \square$$

**定理 22.7** (正則関数は冪級数展開可能である, 正則関数は解析的である)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in \Omega$ ,  $R > 0$ ,  $D := D(c; R)$  とおくととき  $\bar{D} \subset \Omega$  が成り立つとする。このとき、

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とおくと

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (z \in D).$$

**証明** 円盤領域における Cauchy の積分公式より、任意の  $z \in D$  に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

次の変形は少し長いが、すでによく知っているものである。

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-c) - (z-c)} = \frac{1}{\zeta-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-c}{\zeta-c}} = \frac{1}{\zeta-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-c}{\zeta-c} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}.$$

## 7.2.1 正則関数の解析性

ゆえに

$$(1) \quad \frac{f(z)}{z-c} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}.$$

これは  $\zeta$  の関数として  $C^*$  で一様収束する。実際  $r := \frac{|z-c|}{R}$  とおくと  $r < 1$  であり

$$\left| f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| = |f(\zeta)| \frac{|z-c|^n}{R^{n+1}} \leq \frac{\max_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)|}{R} r^n.$$

$M_n := \frac{\max |f|}{R} r^n$  とおくと、|一般項|  $\leq M_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$  であるから、Weierstrass の M-test により、(1) の右辺の一様収束が分かる。ゆえに項別積分が可能で

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-c)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n. \quad \square \end{aligned}$$

……重要な定理が、こんなに手早く (スライド 1 枚半で) 証明できるとは。ここは関数論の 1 つのクライマックスだろう。

## 7.2.1 正則関数の解析性

### 定義 22.8 (解析的, 解析関数)

関数  $f$  が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、 $f$  は**解析的 (analytic)** であるといい、解析的な関数を**解析関数 (analytic function)** と呼ぶ。

定理 22.7 より「任意の正則関数は解析的である」。

解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、(後で定義する) **解析接続**により定まる関数、という意味で用いられる場合もある。

### 系 22.9

正則関数は何回でも微分可能である。

**証明** 正則関数は定義域の各点の近傍で冪級数展開可能であり、冪級数は何回でも微分可能であるから。  $\square$

## 7.2.1 正則関数の解析性

### 系 22.10

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

**証明** 複素関数  $f$  に対して、 $F' = f$  を満たす関数  $F$  が存在したとする。 $F$  は正則であるから何回でも微分可能である。特に  $F$  が2回微分可能であることから、 $f$  は微分可能である。すなわち  $f$  は正則である。  $\square$

**注意** 第20回の講義で次の3条件をあげ、(i) $\Leftrightarrow$ (ii)を証明してあった。

- ❶  $f$  が  $\Omega$  での原始関数を持つ ( $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  s.t.  $F' = f$ )
- ❷  $\Omega$  内の任意の区分的  $C^1$  級閉曲線  $C$  について、 $\int_C f(z) dz = 0$  が成り立つ
- ❸  $f$  は  $\Omega$  で正則である

予告した (i) $\Rightarrow$ (iii) (これが系 22.10) がやっと証明できた。ゆえに **Morera の定理** ((ii) $\Rightarrow$ (iii)) という内容も証明できた ( $\because$  (ii) $\Leftrightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii))。

## 7.2.1 正則関数の解析性

その他にも、懸案の問題が片付く。

- 任意の正則関数は2回微分可能で、2階導関数は連続であるから、定理9.4「任意の正則関数の実部・虚部は調和関数である」の証明が完了する。
- 任意の正則関数の導関数は連続であることが分かるので、逆関数定理(定理9.6)で、導関数の連続性を仮定する必要がなくなる。

宿題完了。

やれやれ…(肩の荷が降りる)

## 7.2.2 冪級数展開の収束半径

正則関数は定義域に属する任意の点の周りに冪級数展開できる (定理 21.3)。その収束半径について何がわかるだろうか。

一般的な定理を紹介する前に、実例で考えよう。例えば

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (z \in \Omega), \quad c = 0.$$

(もちろん、 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$  が冪級数展開で、収束半径  $\rho = 1$  と分かるが、具体的に冪級数展開しないで、そのことを示せないか、考えてみよう。)

$0 < R < 1$  を満たす任意の  $R$  について、 $f$  は  $D(0; R)$  で正則で、 $\overline{D(0; R)} \subset \Omega$  が成り立つので、定理 22.7 より、 $f$  は  $D(0; R)$  で冪級数展開できる。すなわち、ある  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が存在して

$$(2) \quad (\forall z \in D(0; R)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

$R$  の取り方には自由度があるが、 $\{a_n\}_{n \geq 0}$  自体は  $R$  によらずに定まる ( $a_n = f^{(n)}(0)/n!$  なので  $f$  から決まる)。

(続く)

## 7.2.2 冪級数展開の収束半径

任意の  $R \in (0, 1)$  に対して、(2) が成り立つので、結局は次式が成り立つ。

$$(3) \quad (\exists \{a_n\}_{n \geq 0} : \text{複素数列})(\forall z \in D(0; 1)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

この右辺の冪級数の収束半径  $\rho$  は何だろう。  $D(0; 1)$  で収束するので、収束半径の定義から  $\rho \geq 1$  が導けるが、**実は  $\rho = 1$**  である。直観的には、円周  $|z - 0| = 1$  の上に  $f$  の特異点  $\pm i$  があるからであるが、きちんと示そう。

**証明**  $\rho > 1$  と仮定して矛盾を導く。  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  は収束円  $D(0; \rho)$  で正則で、背理法の仮定  $\rho > 1$  から  $i \in D(0; \rho)$  であるから、  $z \rightarrow i$  のとき有限な複素数に収束する。特に

$$\lim_{\substack{z \rightarrow i \\ z \in D(0; 1)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

ところが  $z \rightarrow i$  のとき  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \rightarrow \infty$ . 特に

$$\lim_{\substack{z \rightarrow i \\ z \in D(0; 1)}} f(z) = \infty.$$

これは  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  に矛盾する。ゆえに  $\rho = 1$  である。(証明終)

## 7.2.2 冪級数展開の収束半径

以上の議論は一般化できて次の定理が得られる (証明を書くのはサボるけど簡単)。

### 定理 22.11 (冪級数展開の収束半径 — 特異点があればそこまで)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in \Omega$ ,  $R > 0$  で  $D(c; R) \subset \Omega$ 、円周  $|z - c| = R$  上に  $f$  の特異点  $z_0$  (ここでは  $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D(c; R)}} f(z)$  が収束しない、という意味) が存在するならば、 $f$  の  $c$  における冪級数展開の収束半径は  $R$  である。

この定理はかなり使えて便利である (マスターしよう) が、これでは扱えない場合もある。細かい話は省略する。

2022/12/13 の授業内容はここまでです。

## 7.3 Cauchy の積分公式の別証明

**注** この 7.3 は 12/13 の授業では説明しませんでした。後日説明します。

じつは、Cauchy の積分公式の証明には色々な方法があり、それに応じて定理もいくつかのバージョンがある。それらについて学ぶのは有意義だと思われるので、少し説明する。

まず既に説明した証明を振り返ってみよう。

**証明のあらすじ** 関数  $z \mapsto \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$  は  $\Omega$  で連続かつ  $a$  を除いて正則であるから、星型領域における Cauchy の積分定理で

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0.$$

移項して

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(a)}{z - a} dz = f(a) \int_{|z-c|=R} \frac{dz}{z - a}.$$

$|a - c| < R$  のとき  $\int_{|z-c|=R} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$  であるから、右辺は  $2\pi if(a)$  に等しい。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a). \quad \square$$

## 7.3 Cauchy の積分公式の別証明

### 積分路の変形による Cauchy の積分公式の別証明 (ちょっと注目…次のスライドまで)

多くのテキストで、“積分路の変形”を用いる証明が採用されている。この方法は発展性がある(円周でない閉曲線  $C$  に対して、積分公式が示せたりする。) その方法で(あくまでも円盤の場合に) 証明してみよう。

$|c - a| < R$  だから  $R - |c - a| > 0$ .  $0 < \varepsilon < R - |c - a|$  を満たす任意の  $\varepsilon$  に対して

$$(4) \quad \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

が成り立つことを導く(積分路を  $|z - c| = R$  から  $|z - a| = \varepsilon$  に変形した)。

もしも (4) が示されれば、 $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおいて

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$  とすると

$$(\spadesuit) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = f(a).$$

となることは容易に分かる(次のスライド)。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a).$$

## 7.3 Cauchy の積分公式の別証明

(♠)を確認しよう。差の絶対値を評価する。

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a) d\theta \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(a + \varepsilon e^{i\theta}) - f(a)) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(a + \varepsilon e^{i\theta}) - f(a)| \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(a + \varepsilon e^{i\theta}) - f(a)|. \end{aligned}$$

この右辺は、 $f$  が  $a$  で連続であることから、 $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき  $0$  に収束する。

残る問題は、

(再掲 4) 
$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

を示すことであるが、この積分路の変形には色々なやり方がある。

以下では、時間の許す範囲で紹介してみる。

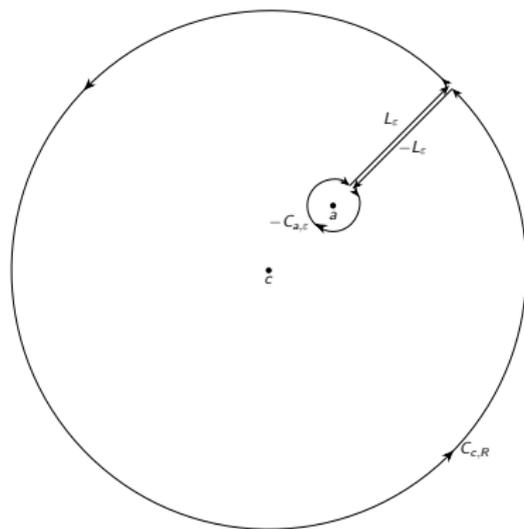
## 8 Cauchy の積分公式の別証明のための積分路の変形

$0 < \varepsilon < R - |c - a|$  を満たす任意の  $\varepsilon$  に対して

$$(再掲 4) \quad \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

が成り立つ。色々な証明がテキストに載っている。代表的なものを紹介しよう。

## 8.1 証明1: 往復の橋を渡す



$\overline{D}(a; \epsilon) \subset D(c; R)$  となるような  $\epsilon > 0$  を1つ取る (例えば  $\epsilon := (R - |a - c|)/2$ )。  $\phi$  を  $a - c$  の偏角とする。  $a - c = |a - c|e^{i\phi}$  が成り立つ。

点  $p$  を中心とする半径  $r$  の円周を一周する曲線を  $C_{p,r}$  と表す ( $z = p + re^{i\theta}$  ( $\theta \in [\phi, \phi + 2\pi]$ ))。  $C_{c,R}$  と  $C_{a,\epsilon}$  を用いる。

点  $a + \epsilon e^{i\phi}$  から  $a + (R - |a - c|)e^{i\phi}$  にまっすぐ進む曲線を  $L_\epsilon$  と表す。

これらの記号を用いて  $C_\epsilon := C_{c,R} - L_\epsilon - C_{a,\epsilon} + L_\epsilon$  とおく。  $C_\epsilon$  は閉曲線である。

## 8.1 証明1: 往復の橋を渡す

$C_\varepsilon$  の周上と囲む範囲では、被積分関数は正則であるから

$$(\#) \quad \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$

一方、 $L_\varepsilon$  と  $-L_\varepsilon$  に沿う線積分は打ち消し合うので、

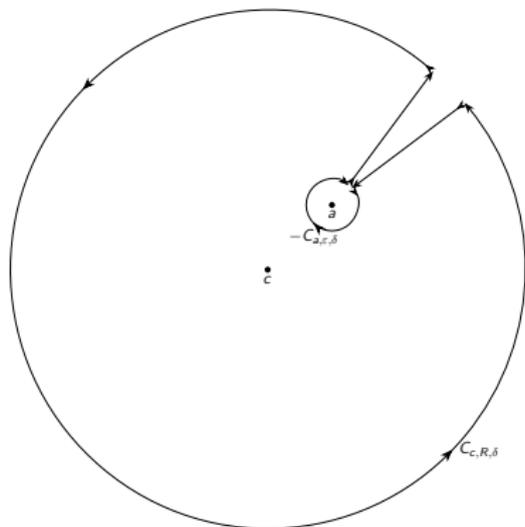
$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{C_{c,R}} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{C_{a,\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz. \quad (\text{証明終})$$

批判的モードになってみると、この曲線  $C_\varepsilon$  は単純閉曲線ではないので、なぜ  $(\#)$  が成り立つのか、すっきりしないきらいがある (この証明を載せている本では、「単純閉曲線  $C$  の囲む領域と、 $C$  の上で  $f$  が正則ならば  $\int_C f(z) dz = 0$ 」という形の Cauchy の積分定理が書いてあって、それを根拠としているようだが、 $C_\varepsilon$  は単純閉曲線ではない)。この点を改良した証明を次に紹介する。

## 8.2 証明2: 開いてから閉じる



上の  $C_\epsilon$  は単純閉曲線でなかったが、正の角度  $\delta$  開いた曲線  $C_{\epsilon, \delta}$  を作る:

$$C_\delta := C_{c, R, \delta} - L_{\epsilon, \delta} - C_{a, \epsilon, \delta} + L_{\epsilon, \delta}.$$

(個々の曲線  $C_{c, R, \delta}$ ,  $L_\delta$ ,  $C_{a, \epsilon, \delta}$  の定義は書かないが、図を見れば解読出来るであろう。)

## 8.2 証明2: 開いてから閉じる

この曲線  $C_{\varepsilon, \delta}$  は単純閉曲線であり、

$$\int_{C_{\varepsilon, \delta}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

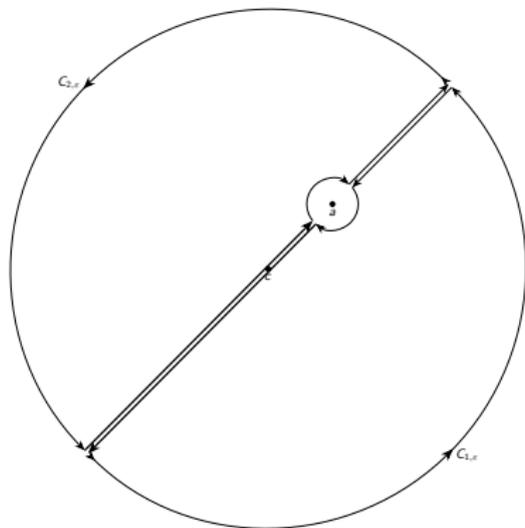
となることは説明しやすい。それから  $\delta \rightarrow 0$  とすることにより

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

が示せるであろう。この後は、前項の証明をたどれば良い。(証明終)

このような曲線の**極限移行**をする証明を学生に見せる価値はある、という気もする反面、実際にきちんとやるのは、複素関数を受講している平均的な学生(2年生)にとっては難しそうだ。どうも教師の自己満足になってしまいそうで気が引ける。

### 8.3 証明3: 2本の橋を渡して2つの閉曲線をつくる



$C_{1,\epsilon}$ ,  $C_{2,\epsilon}$  を図のように定めると、どちらも区分的  $C^1$  級の閉曲線であり、

$$\int_{C_{1,\epsilon}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0, \quad \int_{C_{2,\epsilon}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

が成り立つことは説明しやすい。例えば次のような説明で納得してもらえないのではないだろうか。

## 8.3 証明3: 2本の橋を渡して2つの閉曲線をつくる

- a)  $C_{j,\varepsilon}$  は単純閉曲線で、 $C_{j,\varepsilon}$  上にも、 $C_{j,\varepsilon}$  の囲む領域の内部にも、 $\frac{f(z)}{z-a}$  が微分可能でない点は存在しない ( $j = 1, 2$ )。
- b)  $\frac{f(z)}{z-a}$  が正則な領域  $\Omega \setminus \{a\}$  において、 $j = 1, 2$  のそれぞれに対して、星型の部分領域 (例えば円盤領域から1つの半径を除いたもの) で  $C_{j,\varepsilon}$  を含むものが存在する。そこで星型領域における Cauchy の積分定理を適用する。

そうすると

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{C_{1,\varepsilon} + C_{2,\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0 + 0 = 0.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

(気付いた人も多いと思うが、補題 19.7 に対して与えた証明 1 は、この証明をもじったものである。§7.4 で検討するうちでは、この証明がすぐれていると私は思う。)

## 8.4 証明 4: Green の定理を使う

Green の定理を使う、以下のような証明も考えられる。

$0 < \varepsilon < R - |c - a|$  を満たす任意の  $\varepsilon$  に対して、

$$D := D(c; R) \setminus \overline{D(a; \varepsilon)}$$

とおく。 $D$  の境界  $\partial D$  は、二つの円周  $|z - c| = R$ ,  $|z - a| = \varepsilon$  からなる。 $\partial D$  を正の向きにするには、 $|z - a| = \varepsilon$  の方は通常と逆向き (時計回り) にする。

Green の定理 ( $D$  を縦線領域の和に分割出来るので、難しいバージョンは不要) によって

$$0 = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

一方

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z - a} dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

であるから

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad \square$$

このやり方は見通しが良いが、Cauchy の積分公式を証明する前に  $f'$  の連続性が示せていないので、最初から  $f'$  が連続という仮定をする必要がある。

関数論のテキストの中には、関数の正則性の仮定に、微分可能性だけでなく、導関数の連続性を要求して、この証明法を採用するものがある。

# 参考文献