複素関数・同演習 第 26 回

〜留数定理 (1)〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2023 年 1 月 10 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 宿題 11 までは (宿題 10 を除いて) フィードバック済みです。宿題 8〜11 までは解答を WWW で公開してあります。宿題 12 の解答も本日公開予定。
- 授業は今日を含めて残り 3 回です (来週火曜 (1/17) は創立記念日で休みです)。留数定理とその定積分計算への応用 (とても有名な話) を解説します。
- 正則関数の性質についての話 (Liouville の定理, 最大値原理, 代数学の基本定理の証明, 孤立特異点の lim による特徴づけ — 多いようだけど授業 1 回分位の分量) については説明することが出来なくなりました。昨年度講義資料「2021 年度第 27 回授業スライド」を紹介しておきます。以下は動画資料へのリンクです: p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8
- 今回は、極の場合の留数の計算法について説明します。時間に余裕があれば留数定理の説明もします (証明は後回しにする予定です)。
- 次回は、定積分計算への留数の応用について説明する予定です。
- 1/11 に宿題 13 を出します (提出〆切は 2023 年 1 月 17 日 13:30, 解答は同日 WWW で公開します)。

いよいよ留数定理が目の前までやって来た。

留数定理を述べる (§11.2) のに先立ち、留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ の計算の仕方を詳しく説明する。

まず留数の定義を復習する。複素関数 f が $A(c;0,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-c|<R\}$ で正則のとき (主に c が f の孤立特異点の場合)、f の c における留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ とは

$$\mathrm{Res}(f;c):=a_{-1}. \tag{1}$$

ただし f の c のまわりの Laurent 展開の係数を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とする:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (z\in A(c;0,R)).$$

当たり前だけれど: **f の c のまわりの Laurent 展開が求まれば、$\mathrm{Res}(f;c)$ はすぐ分かる。**

$0<r<R$ を満たす任意の r に対して

$$\mathrm{Res}(f;c)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}f(z)\,dz \tag{2}$$

が成り立つことも思い出しておく ($\because$ $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz$ で $n=-1$)。

(2) を使って留数を求めるというより、逆に留数を使って積分を計算する方向に用いる。

11.1.1 簡単に求まる場合

次のことを確認しておく。

(a) f が $D(c;R)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<R\}$ で正則のとき $\mathrm{Res}(f;c)=0$

(b) c が f の除去可能特異点であれば $\mathrm{Res}(f;c)=0$.

($\because$ (a) Taylor 展開が Laurent 展開になる。(a), (b) とも主部は 0 だから $a_{-1}=0$。)

ゆえに実際上は、c が f の極または真性特異点であるときが問題になる。

$\mathrm{Res}(f;c)$ は f について線形である。すなわち一般に次式が成り立つ。

$$\mathrm{Res}(f+g;c)=\mathrm{Res}(f;c)+\mathrm{Res}(g;c),$$
$$\mathrm{Res}(\lambda f;c)=\lambda\,\mathrm{Res}(f;c).$$

例 26.1

$\mathrm{Res}(f;c)=a_{-1}$ のとき、$\mathrm{Res}\left(2f(z)+e^z;c\right)$ を求めよ。

(解答)

$$\mathrm{Res}(2f(z)+e^z;c)=2\,\mathrm{Res}(f;c)+\mathrm{Res}(e^z;c)=2a_{-1}+0=2a_{-1}.\quad\square$$

例 26.2

(∗)
$$f(z) = \frac{3}{(z-1)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

1 は f の孤立特異点である。(∗) 自身が f の 1 のまわりの Laurent 展開である。Laurent 展開の主部は $\dfrac{3}{(z-1)^2}$. 1 は f の 2 位の極であり、留数 $\mathrm{Res}(f;1) = 0$.

例 26.3

(3)
$$f(z) = \exp\frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

0 は f の孤立特異点である。0 の周りの Laurent 展開は
$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \quad (z \in A(0;0,+\infty)).$$

Laurent 展開の主部は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$ である。0 でない項が無限個あるので、0 は f の真性特異点であり、留数 $\mathrm{Res}(f;0) = \frac{1}{1!} = 1$.

11.1.1 簡単に求まる場合　Laurent 展開から留数を求める (復習)

例 26.4

(4)
$$f(z)=\frac{\sin z}{z}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

0 は f の孤立特異点である。0 のまわりの Laurent 展開は
$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\quad (z\in A(0;0,+\infty)).$$

Laurent 展開の主部は 0. ゆえに 0 は f の除去可能特異点であり、留数は $\mathrm{Res}(f;0)=0$.

例 26.5

(5)
$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

0 は f の孤立特異点である。0 のまわりの Laurent 展開は
$$f(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1}+\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots (z\in A(0;0,+\infty)$$

この Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{z}$. ゆえに 0 は f の 1 位の極であり、留数は $\mathrm{Res}(f;0)=1$.

例 26.6 (有理関数の留数 — 部分分数分解すれば分かる)

f を有理関数とする。$f(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z)$, $q(z)$ は共通因数のない多項式) と表すことが出来る。$p(z)$ の相異なる根を $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ で、α_j の重複度を m_j とすると、部分分数分解により

$$f(z)=z\text{ の多項式}+\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{m_j}\frac{A_{j,m}}{(z-\alpha_j)^m},\quad A_{j,m_j}\neq 0\quad (j=1,2,\cdots,r)$$

と変形できる。関数 f は $\mathbb{C}\setminus\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ で正則であり、α_j は f の m_j 位の極である。

f の α_j のまわりの Laurent 展開の主部は

$$\sum_{m=1}^{m_j}\frac{A_{j,m}}{(z-\alpha_j)^m}$$

である (他は c の近傍で正則だから)。ゆえに留数は $\operatorname{Res}(f;\alpha_j)=A_{j,1}$.

このように、有理関数は部分分数分解するだけで、Laurent 展開の主部と留数が分かる。

実は、留数を求めるだけならば、部分分数分解もサボれることを、この後説明する。

11.1.2 極の場合の留数の計算

この項では、c が f の極である場合に、Laurent 展開を求めずに、$\mathrm{Res}(f;c)$ を知る便利な方法をいくつか説明する。

(繰り返し: c が f の除去可能特異点または正則点ならば $\mathrm{Res}(f;c)=0$.)

「k 位の極」という言葉を定義済みであるが、「高々(たかだか) k 位の極」と言う言葉も定義しておくと便利である。

$$c \text{ が } f \text{ の}\textbf{高々 } k \textbf{ 位の極} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l}(\exists k'\in\mathbb{N}\colon k'\le k)\ c \text{ は } f \text{ の } k' \text{ 位の極または} \\ c \text{ は } f \text{ の除去可能特異点または正則点}\end{array}$$

(例えば、高々3 位の極とは、3 位の極または 2 位の極または 1 位の極または除去可能特異点または正則点である。)

これは次の条件と同値である。

$$(\exists R>0)(\exists\{a_n\}_{n=-k}^{\infty})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (z\in A(c;0,R)).$$

式の形は k 位の極の場合に似ているが、$a_{-k}\neq 0$ **という条件はつけていない**ところに注意する。

11.1.2 極の場合の留数の計算

「c が高々 k 位の極ならば」という条件をチェックするために、次の補題は使いやすい。

補題 26.7 (c が分母の k 位の零点ならば高々 k 位の極)

U は c を含む $\mathbb{C}$ の開集合で、$p, q\colon U \to \mathbb{C}$ は正則, $f = \dfrac{q}{p}$ とする。

$k \in \mathbb{N}$, **c が p の k 位の零点ならば**、次の (1), (2) が成り立つ。

1. c が q の零点でないならば、c は f の k 位の極である。
2. c が q の零点ならば、c は f の高々 $k-1$ 位の極である。

いずれにしても、**c は f の高々 k 位の極**である。

証明.

仮定より、U で正則な関数 p_1 が存在して、$p(z) = (z-c)^k p_1(z)$, $p_1(c) \neq 0$.

1. $g(z) := \frac{q(z)}{p_1(z)}$ とおくと、g は c のある近傍で正則で、$f(z) = \frac{q(z)}{(z-c)^k p_1(z)} = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$. 仮定 $q(c) \neq 0$ より $g(c) \neq 0$ であるから、c は f の k 位の極である。
2. (駆け足証明) q が定数関数 0 であれば証明の必要はない。そうでない場合は、ある自然数 ℓ が存在して、c は q の ℓ 位の零点である。$f(z) = \frac{(z-c)^\ell q_1(z)}{(z-c)^k p_1(z)}$. $\ell \geq k$ ならば c は f の除去可能特異点、$\ell < k$ ならば c は f の $k-\ell$ 位の極である。

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 26.8 (極の場合の留数の計算)

$k\in\mathbb{N}$, c が f の高々 k 位の極であれば

(6) $$\mathrm{Res}(f;c)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

特に $k=1$ のとき

(7) $$\mathrm{Res}(f;c)=\lim_{z\to c}(z-c)f(z).$$

($\lim\limits_{z\to c}$ は $\lim\limits_{\substack{z\to c\\ z\neq c}}$ と書く方が良いかも。) 証明は次のスライドに書くが、要するに

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \text{ (収束冪級数) のとき } a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

を導くのと同様の議論を用いる。

(少し脱線) 実は $\mathrm{Res}(f;c)=a_{-1}$ だけでなく、a_n $(n\geq -k)$ を求められる:

$$a_n=\frac{1}{(n+k)!}\lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n+k}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

証明.

c が f の高々 k 位の極であることから、ある $R > 0$ と複素数列 $\{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$ が存在して

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots (0 < |z-c| < R).$$

分母を払って

$$(z-c)^k f(z) = a_{-k} + a_{-(k-1)}(z-c) + \cdots + a_{-1}(z-c)^{k-1} + a_0(z-c)^k + a_1(z-c)^{k+1} + \cdots$$

$k-1$ 回微分すると、a_{-1} を含む定数項が先頭に現れる。

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right] = (k-1)!a_{-1} + \frac{k!}{1!}a_0(z-c) + \frac{(k+1)!}{2!}a_1(z-c)^2 + \cdots.$$

$z \to c$ としてから、両辺を $(k-1)!$ で割れば a_{-1} が得られる。 □

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 26.9

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

まず部分分数分解を使って留数を求めてみよう。

$$f(z)=\frac{1/2}{z}+\frac{-1}{z-1}+\frac{1/2}{z-2}$$

であるから

$$\mathrm{Res}(f;0)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{Res}(f;1)=-1,\quad \mathrm{Res}(f;2)=\frac{1}{2}.$$

一方、定理 26.8 の公式 (8) を使うには…0, 1, 2 は分母の 1 位の零点であるから、補題 26.7 より f の高々1 位の極である (分子の零点ではないので、実は 1 位の極である)。ゆえに定理 26.8 から

$$\mathrm{Res}(f;0)=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}}\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\left.\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right|_{z=0}=\frac{1}{(-1)(-2)}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Res}(f;1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{\substack{z\to 1\\ z\neq 1}}\frac{1}{z(z-2)}=\left.\frac{1}{z(z-2)}\right|_{z=1}=\frac{1}{1(-1)}=-1,$$

$$\mathrm{Res}(f;2)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{\substack{z\to 2\\ z\neq 2}}\frac{1}{z(z-1)}=\left.\frac{1}{z(z-1)}\right|_{z=2}=\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}.$$

例 26.10

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ のとき、$\mathrm{Res}(f;i)$ は？

(解答) $z^2+1=(z-i)(z+i)$ であるから、i は分母の 1 位の零点であるから、i は f の高々1 位の極である。定理 26.8 の公式 (8) より

$$\mathrm{Res}(f;i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{\substack{z\to i\\ z\neq i}}\frac{1}{z+i}=\left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 26.11

$f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z-3)^2}$ のとき、3 は f の高々2 位の極である ($\because$ 3 は分母の 2 位の零点であるから。実は 3 は分子の零点でないので、3 は 2 位の極である。)

定理 26.8 の公式 (6) を使うと

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f;3) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 3}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-3)^2 f(z)\right] = \lim_{\substack{z\to 3\\ z\neq 3}}\left(\frac{z}{z+1}\right)' \\ &= \lim_{\substack{z\to 3\\ z\neq 3}}\frac{(z+1)\cdot 1 - z\cdot 1}{(z+1)^2} = \left.\frac{1}{(z+1)^2}\right|_{z=3} = \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

(おまけ) 一方、部分分数分解すると

$$f(z)=\frac{1/16}{z+1}+\frac{1/16}{z-3}+\frac{3/4}{(z-3)^2}$$

であるから、$\mathrm{Res}(f;3)=\dfrac{1}{16}$.

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 26.12

$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ とするとき、(f は $A(0;0,\pi)$ で正則であるから) 0 は f の孤立特異点である。$\mathrm{Res}(f;0)$ は？

Laurent 展開の計算はちょっと面倒である (後で時間があれば紹介する)。

0 は f の高々1 位の極である ($\because$ 0 は、f の分母 sin の 1 位の零点である)。ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;0)=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

この流れで、よく使う便利な公式を導いておこう。

定理 26.13 (分母の 1 位の零点における留数)

P と Q は c のある開近傍で正則で、c は P の 1 位の零点とするとき、c は $\dfrac{Q}{P}$ の高々 1 位の極であり

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c\right)=\frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

証明.

補題 26.7 (2) より、c は f の高々1 位の極である。$P(c)=0$ に注意して、定理 26.8 の公式 (8) を使うと

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c\right)=\lim_{z\to c}(z-c)\frac{Q(z)}{P(z)}=\lim_{z\to c}\frac{z-c}{P(z)-P(c)}Q(z)=\frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

□

11.1.2 極の場合の留数の計算

特に $P(z)$ が多項式でない場合に便利なので [1]、次の例を強調したい。

例 26.14 (解き直し)

$f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ に対して $\mathrm{Res}(f;0)$ は？

(解答) 0 は分母 $\sin z$ の 1 位の零点であるから、定理 26.13 が適用できて

$$\mathrm{Res}(f;0) = \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=0} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

[1] 共通因数を簡単には消すことが出来ない。

11.1.2 極の場合の留数の計算

もちろん多項式の例も見せる。

例 26.15 (よく出て来るパターン)

$f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$, $c = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき、$\mathrm{Res}(f;c)$ を求めよ。

(解答) $P(z) = z^4+1$, $Q(z) = 1$ とすると、$f = \dfrac{Q}{P}$. $P(c) = 0$, $P'(z) = 4z^3$, $P'(c) = 4c^3 \neq 0$ であるから、c は P の 1 位の零点である。定理 26.13 を適用すると、

$$\mathrm{Res}(f;c) = \left.\frac{Q(z)}{P'(z)}\right|_{z=c} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=c} = \left.\frac{z}{4z^4}\right|_{z=c} = \frac{c}{4\cdot(-1)} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}. \quad \square$$

(注) $\dfrac{1}{4c^3} = \dfrac{c}{4c^4} = \dfrac{c}{4(-1)} = -\dfrac{c}{4}$ で計算するのはちょっとした工夫であるが、$c = e^{i\pi/4}$ であるから、$\dfrac{1}{4c^3} = \dfrac{1}{4e^{i3\pi/4}} = 4e^{-3\pi/4} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$ とすることも出来る。 $\square$

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 26.16

c が f の 1 位の極、φ が c のある開近傍で正則ならば、c は $f\varphi$ の高々 1 位の極であり

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \operatorname{Res}(f; c)\varphi(c). \tag{8}$$

(注意: 極 c の位数が 2 以上のときには、この (8) は成り立たない。)

証明.

(前半) c が f の高々1 位の極であることから、c のある近傍で正則な関数 g が存在して、$f(z) = \dfrac{g(z)}{z-c}$ が成り立つ。

$$f(z)\varphi(z) = \frac{g(z)\varphi(z)}{z-c}$$

が成り立ち、分母・分子 は $z = c$ の近傍で正則であり、c は分母の 1 位の零点であるから、c は $f\varphi$ の高々1 位の極である。

(後半)

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)\varphi(z) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)\cdot\lim_{z\to c}\varphi(z) = \operatorname{Res}(f; c)\varphi(c). \qquad \square$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

(このスライドは、定理 26.16 の適用例であるが、1 月 10 日の授業ではカットした。)

例 26.17 (とある問題から)

$f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$, $\varphi(z)=\operatorname{Log}\dfrac{z+1}{z-1}$ とする。

φ は $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ で定義されて正則である ($\because$ $z\notin[-1,1]$ のとき $\dfrac{z+1}{z-1}\notin(-\infty,0]$ であることが証明できるから。ここでは認めて議論する。)。

c を f の極とするとき ($c=\dfrac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$ (複号任意))、$\operatorname{Res}(f\varphi;c)$ を求めよ。

(何でこんなものを求めるのか — 実は $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4+1}=\sum_{c^4+1=0}\operatorname{Res}(f\varphi;c)$ という式が成り立つ。つまり定積分の値を留数を用いて計算できる。)

$c\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ であるので、φ は c のある近傍で正則である。ゆえに定理 26.16 から

$$\operatorname{Res}(f\varphi;c)=\varphi(c)\operatorname{Res}(f;c)=\varphi(c)\left.\frac{1}{(z^4+1)'}\right|_{z=c}=\varphi(c)\frac{c}{4c^4}=-\frac{c}{4}\operatorname{Log}\frac{c+1}{c-1}.$$

この後の具体的な計算は意外と面倒なので省略する。[1] の pp. 40–41 を見よ。 □

11.1.3 極の場合の留数の計算 (冪級数の割り算の利用)

次の例は授業では省略した (冪級数の割り算という紹介したい話であるが…)。

例 26.18 (冪級数の割り算を使う例)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)$$

$\tan z$ の $z=0$ の周りの Taylor 展開を数項だけでも求めてみよう (なお講義ノート [2] の §7.3 命題 7.15 には、Bernoulli 数を用いた tan の Taylor 展開が載っている)。

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots}{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots}=z\,\frac{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots}{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots}.$$

両辺を z で割り、$w=z^2$ とおくと、$\displaystyle\frac{\tan z}{z}=\frac{1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5!}w^2-\cdots}{1-\frac{1}{2!}w+\frac{1}{4!}w^2-\cdots}.$

この右辺は w の関数として、0 の近傍で正則である (分母と分子は収束冪級数で、分母は $w=0$ で 0 にならない)。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n$ と書けるはず。分母を払って

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n\right)\left(1-\frac{1}{2!}w+\frac{1}{4!}w^2-\cdots\right)=1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5!}w^2-\cdots.$$

例 26.18 (冪級数の割り算を使う例 (つづき))

左辺を展開して、両辺の係数を比較すると

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 - \frac{a_0}{2} = -\frac{1}{6},$$
$$a_2 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{24} = \frac{1}{120}, \cdots$$

上から順に解くことができて

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{15}, \quad \cdots$$

ゆえに

$$\tan z = z\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{2}{15}z^4 + \cdots\right), \quad \frac{\tan z}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{15}z + \cdots.$$

ゆえに

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4}; 0\right) = \frac{1}{3}. \quad \square$$

復習用: 留数の計算で使う定理のまとめ

- 定理 A 「c が f の k 位の極 $\Leftrightarrow$ c のある近傍 U と、U で正則な g が存在して、$f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z \in U \setminus \{c\})$, $g(c) \neq 0$ が成り立つ。」
- 定理 B 「c が f の k 位の零点 $\Leftrightarrow$ c のある近傍 U と、U で正則な g が存在して、$f(z) = (z-c)^k g(z)$ $(z \in U)$, $g(c) \neq 0$ が成り立つ。」
- 定理 C 「P と Q が c のある近傍 U で正則であり、c が P の k 位の零点で、$Q(c) \neq 0$ であれば、c は $f := \dfrac{Q}{P}$ の k 位の極である。」
  条件 $Q(c) \neq 0$ を省くと、結論は「c は $f := \dfrac{Q}{P}$ の**高々** k 位の極である。」となる。
- 定理 D 「c が f の高々 k 位の極ならば
  $$\mathrm{Res}(f;c) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].」$$
- 定理 E 「P と Q が c のある近傍で正則で、c が P の 1 位の零点ならば、(c は $f := \dfrac{Q}{P}$ の高々1 位の極であり) $\mathrm{Res}(f;c) = \dfrac{Q(c)}{P'(c)}$.」
- 定理 F 「c が φ の 1 位の極、ψ が c のある近傍で正則ならば、c は $f := \varphi\psi$ の高々 1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;c) = \mathrm{Res}(\varphi;c)\psi(c)$.」

PDF で 定理 X のところをクリックするとリンク先に飛びます。

定理 26.19 (留数定理, the residue theorem)

D は $\mathbb{C}$ の有界領域で、$\mathbb{R}^2$ の領域とみなしたとき Green の定理が成立するとする (例えば、区分的に C^1 級の関数のグラフで挟まれた縦線領域)。$C := \partial D$ (進行方向の左手に D を見る向き) とおく。Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$\overline{D} \subset \Omega$ を満たす。$\{c_j\}_{j=1}^N$ は D 内の相異なる点で、$f \colon \Omega \setminus \{c_1, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき次式が成り立つ。

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \mathrm{Res}(f; c_j). \tag{9}$$

11.2.2 留数定理は万能包丁

この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た線積分の計算のうち、閉曲線に沿うものの値は、大抵これで分かる。

例えば Cauchy の積分公式を導くための重要な積分

$$|a-c|<r \quad \Rightarrow \quad \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-a}; a\right) = 2\pi i.$$

また、Cauchy の積分公式も (a は $\dfrac{f(z)}{z-a}$ の高々1 位の極だから)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z-a}; a\right) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{z-a} = \lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

もちろん、

これらの等式の証明に留数定理を用いるのは、循環論法になってしまい反則

であるが、分かりやすいであろう。

例 26.20 (宿題を見直す)

(a) $\displaystyle\int_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)}$ (b) $\displaystyle\int_{|z-i|=2}\frac{dz}{z(z-2)}$ (c) $\displaystyle\int_C\frac{dz}{z(z-2)}$ (C は $z=\cos\theta+2i\sin\theta$ $(\theta\in[0,2\pi])$)

これは Cauchy の積分公式を用いて計算できる (答えはそれぞれ $\frac{\pi i}{2}$, $-\pi i$, $-\pi i$)。いずれも留数の計算に帰着できる。それをやってみよう。

さらに、Cauchy の積分公式では計算できない $\displaystyle\int_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)^3}$ なども計算できるようになる。

$$\begin{aligned}\int_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)^3}&=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2(z+2)^3};-2\right)\\&=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to-2}\left((z+2)^3\frac{1}{z^2(z+2)^3}\right)''=\pi i\left.\frac{(-2)(-3)}{z^4}\right|_{z=-2}\\&=\frac{6\pi i}{(-2)^4}=\frac{3\pi i}{8}.\end{aligned}$$

11.2.2 留数定理は万能包丁　Goursat の公式

(次の例は授業では時間の関係でカットした。)

例 26.21 (Goursat の公式を留数定理で解釈してみる)

既に紹介した公式 **Goursat の公式**: $n \in \mathbb{N}$ とするとき

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(a). \tag{10}$$

この公式そのものが留数定理を使って証明できる。実際

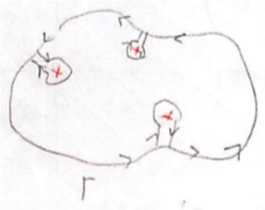
$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{n!}{2\pi i}\cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}; a\right) \\
&= n!\cdot\frac{1}{n!}\lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\left[(z-a)^{n+1}\cdot\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right] \\
&= \lim_{z\to a} f^{(n)}(z) = f^{(n)}(a).
\end{aligned}$$

(そういうわけで、Goursat の公式 (10) を覚えなくてもあまり困らない、というのが私の意見です。もっとも、Goursat の公式は、Cauchy の積分公式を a について微分しただけだから、覚えるのは難しくないかもしれないけれど。) □

2023 年 1 月 10 日の授業 (第 26 回) はここまでです。

11.2.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



Γ の内部に×はないので $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$

Γ の各パートに沿う積分に分解する:

$$\int_C f(z)\,dz - \int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^N \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

一般に往復するとキャンセルするので、$\displaystyle\int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz = 0.$ ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^N \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

11.2.3 直観的な証明 (つづき)

これから

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j).$$

(最後の等号 $=$ は、Laurent 展開の係数についての公式で、$n=-1$ の場合を用いた。)

しかし、曲線 C が複雑だったり、N が大きい場合に、この証明は通用するだろうか？実は私は厳密な証明が書ける自信がない (読んだこともない)。以下ではこれとは違うやり方をする。

11.2.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j; 2\varepsilon) \subset \Omega$ かつ $D(c_j; 2\varepsilon)$ 内に c_k $(k \neq j)$ は含まれない。

各 j に対して、f は $0 < |z - c_j| < \varepsilon$ で正則であるから、c_j の周りで Laurent 展開できる:

$$(\exists \{a_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} (z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}^{(j)}}{(z - c_j)^n} \quad (0 < |z - c_j| < \varepsilon).$$

この主部 $f_j(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}^{(j)}}{(z - c_j)^n}$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ は $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ で正則である。

$$g(z) := f(z) - \sum_{k=1}^{N} f_k(z) \quad (z \in \Omega \setminus \{c_1, \ldots, c_N\})$$

とおくと g は $\Omega \setminus \{c_1, \ldots, c_N\}$ で正則である。さらに任意の j に対して、c_j は g の除去可能特異点である。

(続く)

11.2.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

(実際

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)=\left(f(z)-f_j(z)\right)-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0=\int_C g(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz-\sum_{j=1}^{N}\int_C f_j(z)\,dz,$$

$$\int_C f_j(z)\,dz=\int_C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz=a_{-1}^{(j)}\int_C\frac{dz}{z-c_j}.$$

($=$ について: $n\ne1$ のとき、$\dfrac{1}{(z-c_j)^n}$ は原始関数を持つので、閉曲線 C に沿う線積分は 0 である。)

(つづく)

11.2.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} a_{-1}^{(j)} \int_C \frac{dz}{z-c_j} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j) \int_C \frac{dz}{z-c_j}.$$

各 j につき、$\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-c_j}$ の積分路 C を、$|z-c_j|=\varepsilon$ で置き換えられるのを認めれば、値は $2\pi i$ であるから、

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j). \quad \square$$

(以上を振り返ると、良くある積分路を変形を用いる証明に対して、被積分関数の変形を用いる証明である、と短くまとめられるだろう。)

13 定積分計算への留数の応用

もともと Cauchy が複素関数論を考えだした動機は、(主に実関数の) 定積分の計算を、なるべく統一的な方法を使って行えるようにするためだったそうであるが、そうして創られた理論は、定積分計算という当初の目的を大きく超えて発展することになった。

一方でこの §13 で説明するような (留数計算に基づく) 定積分の計算法は、使いこなすために関数論の堅実な理解が必要で、自己の知識に不十分なところがないかのチェックのための良い演習問題 (センセーにとっては試験問題) を提供してくれる。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

記号の約束

$$\mathbb{C}[z] := z \text{ の複素係数多項式全体}.$$

$P(z) \in \mathbb{C}[z]$ に対して

$$\deg P(z) := P(z) \text{ の次数 (degree)}.$$

定理 26.22 (有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, 任意の実数 x に対して $P(x) \neq 0$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f; c).$$

ここで $\displaystyle\sum_{\operatorname{Im} c>0}$ は、f の極 c のうち、$\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

13.1 有理関数の ℝ 上の積分

注意事項を 3 つ。

1. このように ℝ 全体での積分が頻出する。これらはいわゆる広義積分で

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1,R_2\to+\infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx.$$

上の定理の場合は (証明をみれば分かるように) 絶対収束するので

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

2. 微積分で、有理関数の原始関数は初等関数の範囲で求まることを学んだ (はずである)。だから上の定理の公式を使わなくても、積分は原理的には計算出来るが、上の定理を使う方がずっと見通しが良い。

3. 下半平面にある留数の和を取るとどうなるか？実は値が -1 倍になる。つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c<0} \operatorname{Res}(f;c).$$

(実は $\displaystyle\sum_{c} \operatorname{Res}(f;c) = 0$ が成り立つ。)

例 26.23

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 26.22 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\ge 0+1=1$ であるから $P(x)\ne 0$.

$$c \text{ が } \frac{Q}{P} \text{ の極} \Leftrightarrow P(c)=0 \Leftrightarrow c=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}\ (k=0,1,2,3) \Leftrightarrow c=\tfrac{1+i}{\sqrt{2}},\tfrac{1-i}{\sqrt{2}},\tfrac{-1+i}{\sqrt{2}},\tfrac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

$\operatorname{Im} c>0$ となるのは、$c_1:=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_2:=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. これらは $c^4=-1$ を満たし、P の 1 位の零点であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_j\right)=\frac{Q(c_j)}{P'(c_j)}=\frac{1}{4c_j^3}=\frac{c_j}{4c_j^4}=-\frac{c_j}{4}.$$

定理 26.22 から、

$$I=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_2\right)\right)=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(c_1+c_2)=-\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{2i}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

定理 26.22 の証明

仮定からある定数 M, $R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明: $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m$, $b_0 \neq 0$ とする。仮定から $n - m \geq 2$ である。

$$\left|z^{n-m} f(z)\right| = \left|z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)}\right| = \left|z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n}\right| \to \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \quad (z \to \infty)$$

が分かるから、$M := 2\left|\frac{b_0}{a_0}\right|$ とおくと、ある $R^*(\geq 1)$ が存在して

$$\left|z^{n-m} f(z)\right| \leq M \quad (|z| \geq R^*).$$

ゆえに

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{n-m}} \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (|z| \geq R^*)$$

が成り立つ。)

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

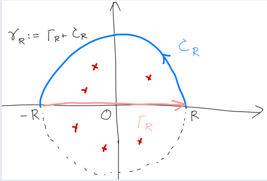
証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

$$I=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\,dx.\text{(一般には }\lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1}^{R_2}\text{ だけど}\cdots)$$

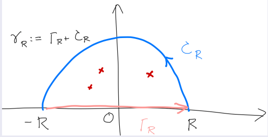
複素平面内の曲線 Γ_R, C_R, γ_R を次式で定める。

$$\Gamma_R\colon z=x\quad(x\in[-R,R]),$$
$$C_R\colon z=Re^{i\theta}\quad(\theta\in[0,\pi]),$$
$$\gamma_R:=\Gamma_R+C_R.$$



$R\geq R^*$ を満たす任意の R に対して、P の零点は $|z|<R$ に含まれる。$\mathrm{Im}\,c>0$ を満たす零点 c は γ_R の内部に含まれる。

証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{C_R} |f(z)|\,|dz| \le \frac{M}{R^2}\int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2}\cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0 \quad (R\to+\infty).$$

一方、留数定理より

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0} \mathrm{Res}(f;c).$$

ゆえに

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \to 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0} \mathrm{Res}(f;c) \quad (R\to+\infty). \qquad \square$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

f を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

これは応用上非常に重要な Fourier 変換、共役 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \qquad \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}^*) \qquad \widetilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

を求めることに利用できる。

念のため:

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \overline{e^{iax}} = e^{-iax}, \quad \cos(ax) = \operatorname{Re} e^{iax}, \quad \sin(ax) = \operatorname{Im} e^{iax}, \quad \left|e^{iax}\right| = 1$$

を思い出しておこう。

定理 26.24 (有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分)

$$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z],\ f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)},\ \deg P(z) \ge \deg Q(z) + 1,\ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$P(x) \neq 0$, $a > 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right). \tag{11}$$

ここで $\displaystyle\sum_{\operatorname{Im} c>0}$ は、f の極 (あるいは $f(z)e^{iaz}$ の極と言っても同じこと) c のうち、$\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

証明

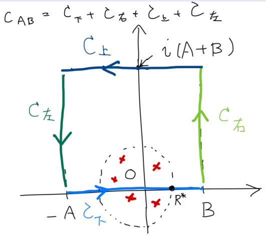
定理 26.22 の証明と同様にして、ある定数 M, $R^*(\ge 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \ge R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \le \frac{M}{|z|}.$$

(つづく)

証明 (つづき)

任意の $A, B > R^*$ に対して、曲線 $C_{下}$, $C_{右}$, $C_{上}$, $C_{左}$, C_{AB} を次のように定める。



$$
\begin{aligned}
C_{下} &: z = x \quad (x \in [-A, B]),\\
C_{右} &: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),\\
C_{上} &: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),\\
C_{左} &: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),\\
C_{AB} &:= C_{下} + C_{右} + C_{上} + C_{左}.
\end{aligned}
$$

P の零点はすべて $|z| < R^*$ に含まれ、上半平面に属するものは C_{AB} の内部にある (実軸上にはないので C_{AB} 上にもない)。ゆえに留数定理によって

$$
\int_{C_{AB}} f(z) e^{iax}\, dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c > 0} \mathrm{Res}\left(f(z) e^{iaz}; c\right).
$$

(つづく)

証明 (つづき)

$C_{下}$ に沿う積分は ($z = x$ ($x \in [-A, B]$) がパラメーター付けなので)

$$\int_{C_{下}} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx.$$

$C_{右}$ で

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \geq B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{B},$$
$$\mathrm{Re}(iaz) = \mathrm{Re}\left[ia(B + iy)\right] = -ay, \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{\mathrm{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから

$$\left|\int_{C_{右}} f(z)e^{iaz}\right| \leq \frac{M}{B}\int_0^{A+B} e^{-ay}dy \leq \frac{M}{B}\int_0^{\infty} e^{-ay}\,dy = \frac{M}{aB}.$$

$C_{左}$ もほぼ同様にして

$$\left|\int_{C_{右}} f(z)e^{iaz}\right| \leq \frac{M}{aA}.$$

証明 (つづき)

$C_{上}$ では

$$|z| = \sqrt{(-x)^2 + (A+B)^2} \geq A+B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A+B},$$

$$\mathrm{Re}(iaz) = \mathrm{Re}[ia(-x+i(A+B))] = -a(A+B), \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{-a(A+B)},$$

$$\left|\int_{C_{上}} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \leq \frac{M}{A+B}\int_{-A}^{B} e^{-a(A+B)}\,dx = Me^{-a(A+B)}.$$

ゆえに

$$I = \lim_{A,B\to+\infty}\int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx = \lim_{A,B\to+\infty}\left(\int_{C_{AB}} - \int_{C_{右}} - \int_{C_{上}} - \int_{C_{左}}\right)$$

$$= \lim_{A,B\to+\infty}\left(2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right) - \int_{C_{右}} - \int_{C_{左}} - \int_{C_{上}}\right)$$

$= 2\pi i \displaystyle\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right)$.(注: 広義積分の収束も同時に証明できている) □

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の注意は細かいので、講義では軽く触れるにとどめる (飛ばすかもしれない)。

注意 26.25 (定理 26.24 の仮定と証明法について)

仮定 $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ は、定理 26.22 の条件 $(\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2)$ より弱い。

強い条件 $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ を仮定した場合は (そういうテキストが少なくない)、$a \geq 0$ に対して (つまり $a = 0$ も OK になる) 広義積分が絶対収束であることも簡単に示せるし、積分路として、定理 26.22 の証明で用いた簡単な $\gamma_R = \Gamma_R + C_R$ が採用できる。また

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz}\, dz = 0$$

の証明も

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} e^{-aR \sin\theta}\, d\theta = 0$$

に帰着され、簡単である ($0 < e^{-aR \sin\theta} \leq 1$ より $0 < \int_0^{\pi} e^{-aR \sin\theta} d\theta \leq \pi$ が導かれる)。

Cf. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ は発散、$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ は絶対収束, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ は条件収束 (絶対収束しない)。 □

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 26.24 の証明を検討すると、$a \le 0$ のときは、(11) が成立しないことが分かる。$a < 0$ の場合は、代わりに次が成り立つ。

系 26.26 ($a < 0$ の場合の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $P(x) \ne 0$, $a < 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c < 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right). \tag{12}$$

しかし、系 26.26 を使うのでなく、計算の工夫により、定理 26.24 に帰着できる例を説明するテキストが多い。これについては、以下の例を見よ。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

例 26.27

$$(13)\qquad (\forall a\in\mathbb{R})\quad I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx=\pi e^{-|a|}.$$

$a>0$ の場合は、定理 26.24 から

$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1};i\right)=2\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}=2\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i}=\pi e^{-a}.$$

$a=0$ の場合は、定理 26.22 から

$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1};i\right)=2\pi i\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i}=\pi.$$

$a<0$ のとき、$e^{iax}=\overline{e^{-iax}}$, $-a>0$ に注意して、定理 26.24 から

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\frac{e^{-iax}}{x^2+1}}\,dx=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iax}}{x^2+1}\,dx}=\overline{2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-iaz}}{z^2+1};i\right)}=\overline{2\pi i\cdot\left.\frac{e^{-iaz}}{2z}\right|_{z=i}}$$
$$=\overline{\pi e^{a}}=\pi e^{a}.$$

例 26.27 (つづき)

以上をまとめて (13) を得る。

なお、 (13) の実部を取ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-|a|}$$

が得られる。 □

余談 1 (Mathematica で検算するときに)

Mathematica で計算する際に、a の符号を教えるには、例えば

```
Assuming[a>0, Integrate[Exp[I a x]/(x^2+1),{x,-Infinity,Infinity}]
```

のようにすれば良い。 □

例 26.28

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、$\sin x=\operatorname{Im}e^{ix}$ であることから

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx.$$

$P(z):=z^2+1$, $Q(z):=z$, $a:=1$ とすると、定理 26.24 の条件が成り立つ。ゆえに

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2+1}e^{iz};i\right)\right)=\operatorname{Im}\left(\pi i\cdot\left.\frac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=i}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\pi ie^{i^2}\right)=\frac{\pi}{2e}.\quad\square$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 26.29

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2}.$$

であるから

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5-4\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{5z-2(z^2+1)} dz \\
&= i\int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2-5z+2} = i\int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(z-2)} \\
&= i\cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)}; c\right) = -2\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)}; \frac{1}{2}\right) \\
&= -2\pi \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(2z-1)(z-2)} = -2\pi \frac{1}{2(\frac{1}{2}-2)} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$ があっても OK.

例 26.30

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\sin\theta}$$

$z = e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3+\frac{1}{2i}(z-1/z)}\cdot\frac{dz}{iz} = 2\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6iz-1} \\ &= 2\cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+6iz-1}; c\right) = 4\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+6iz+1}; (-3+2\sqrt{2})i\right) \\ &= 4\pi i \lim_{z\to(-3+2\sqrt{2})i}\frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})i} = 4\pi i\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

結局 $\cos\theta$, $\sin\theta$ の有理式の $[0,2\pi]$ における積分は、このやり方で計算できることが分かる。

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

一応定理の形にまとめておくが、一般の形で証明しておく必要はないであろう。

定理 26.31 (三角関数の有理関数の周期積分)

$r(x,y)$ を x, y の有理式とするとき、

(14a)
$$\int_0^{2\pi} r(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}(f; c).$$

ただし f は

(14b)
$$f(z) := \frac{1}{iz}\, r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で定義し、$f(z)$ は単位円周 $|z|=1$ 上に極を持たないとする。また $\sum_{|c|<1}$ は、f の極 c のうち、単位円盤内 $|z|<1$ に属するものすべてについての和を意味する。

注意: $\cos\theta = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\sin\theta = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ であるが、そう変形してしまうと、z の正則関数ではないので、留数定理が使えなくなる。$\overline{z}$ でなくて、z^{-1} を使うのがポイント。

例 26.32

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta}$$

$z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおくと、これは $|z|=1$ のパラメーター表示であり、

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}.$$

また $dz=ie^{i\theta}d\theta$ より、$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$. ゆえに $\left(\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{2}\right.$ に注意して$\left.\right)$

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\int_{|z|=1}\frac{dz}{2iz+i(z^2+1)/2+(z^2-1)/2}$$

$$=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{(i+1)z^2+4iz+(i-1)}=(1-i)\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2(1+i)z+i}.$$

ここからどうするか。閉曲線に沿う線積分だから、留数定理の利用を考える。特異点を探せ。それは分母の零点だ。それを求めよう。それから閉曲線の中に入っているものを探す。そして留数を計算する。図を描いて考える。 (つづく)

例 26.32 (つづき)

$z^2+2(1+i)z+i=0$ の根は

$$z=-(1+i)\pm\sqrt{(1+i)^2-i}=-(1+i)\pm\sqrt{i}=-(1+i)\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$
$$=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),-1+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

前者を α, 後者を β とすると、このうち $|z|<1$ にあるのは β.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2(1+i)z+i};\beta\right)=\lim_{z\to\beta}\left((z-\beta)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right)=\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)}.$$

ゆえに

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta}=(1-i)\cdot 2\pi i\frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)}=\sqrt{2}\pi. \quad \square$$

定積分計算の話題に詳しいテキストとして、一松 [3] をあげておく。色々面白い例が載っている。

参考文献

[1] 桂田祐史：数値積分ノート, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2019/numerical-integration.pdf (2016〜).

[2] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf (2014〜).

[3] 一松信（ひとつまつしん）：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。