複素関数・同演習 第28回

〜留数定理 (2) といくつかの有名な定理〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2023年1月18日

目次

本日の内容・連絡事項

- 飛ばしていた留数定理の証明を行う。
- 有名な代数学の基本定理の関数論を用いた証明を紹介する。

(これ以外にも説明すべきことはあるが、今年度はあきらめる。
参考までにこのスライドには入れておく。)

- 宿題 13 について簡単な説明をする。
- 以上済んだら授業を終了し、残りの時間は質問受付をする。
- 期末試験を 1 月 30 日 (月曜)9:30–11:30 に行う (試験時間 120 分)。
  - 形式は過去問と同様。授業 WWW サイトの過去問 PDF が参考になる。
  - 定積分計算なども根拠を詳しく書くことを勧める (そうすべきものであることは別にして、計算間違いをしたとき中間点をもらいやすい)。
  - 試験準備は、過去問を解く前に宿題の復習に取り組むことを勧める。過去問の多くは解答を公開しているが、それを読むよりは、似た問題の解答を参考にして解いてみて、照らし合わせることを勧める。
  - 今年度は追試はしない (試験が遅い分、採点期限まで余裕がない)。

11.2 留数定理 (続き) 11.2.3 留数定理の直観的な証明

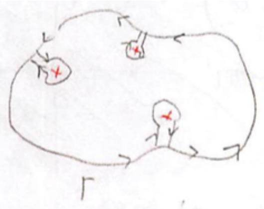
定理 26.19 (留数定理, the residue theorem)

D は $\mathbb{C}$ の有界領域で、$\mathbb{R}^2$ の領域とみなしたとき Green の定理が成立するとする (例えば、区分的に C^1 級の関数のグラフで挟まれた縦線領域)。$C := \partial D$ (進行方向の左手に D を見る向き) とおく。Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$\overline{D} \subset \Omega$ を満たす。$\{c_j\}_{j=1}^N$ は D 内の相異なる点で、$f\colon \Omega \setminus \{c_1, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき次式が成り立つ。

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}(f; c_j). \tag{1}$$

11.2.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



Γ の内部に × はないので $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

Γ の各パートに沿う積分に分解する:

$$\int_C f(z)\,dz + \int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

一般に往復するとキャンセルするので、$\displaystyle\int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz = 0$. ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

11.2.3 直観的な証明 (つづき)

これから

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^N \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \mathrm{Res}(f;c_j).$$

(最後の等号 $=$ は、Laurent 展開の係数についての公式で、$n=-1$ の場合を用いた。)

しかし、曲線 C が複雑だったり、N が大きい場合に、この証明は通用するだろうか？実は私は厳密な証明が書ける自信がない (読んだこともない)。以下ではこれとは違うやり方をする。

11.2.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j;2\varepsilon)\subset\Omega$ かつ $D(c_j;2\varepsilon)$ 内に c_k $(k\neq j)$ は含まれない。

各 j に対して、f は $0<|z-c_j|<\varepsilon$ で正則であるから、c_j の周りで Laurent 展開できる:

$$(\exists\{a_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}\quad(0<|z-c_j|<\varepsilon).$$

この主部 $f_j(z):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}$ $(j=1,2,\cdots,N)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_j\}$ で正則である。

$$g(z):=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)\quad(z\in\Omega\setminus\{c_1,\dots,c_N\})$$

とおくと g は $\Omega\setminus\{c_1,\dots,c_N\}$ で正則である。さらに任意の j に対して、c_j は g の除去可能特異点である。

(続く)

証明 (つづき)

(実際、$D(c_j;\varepsilon)\setminus\{c_j\}$ において

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)=\left(f(z)-f_j(z)\right)-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$$

が成り立つが、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0=\int_C g(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz-\sum_{j=1}^{N}\int_C f_j(z)\,dz,$$

$$\int_C f_j(z)\,dz=\int_C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz=a_{-1}^{(j)}\int_C\frac{dz}{z-c_j}.$$

($=$ について: $n\ne 1$ のとき、$\dfrac{1}{(z-c_j)^n}$ は原始関数を持つので、閉曲線 C に沿う線積分は 0 である。) (つづく)

11.2.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} a_{-1}^{(j)} \int_C \frac{dz}{z-c_j} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j) \int_C \frac{dz}{z-c_j}.$$

各 j につき、$\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-c_j}$ の積分路 C を、$|z-c_j|=\varepsilon$ で置き換えられるのを認めれば、値は $2\pi i$ である、ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j). \quad \square$$

(以上を振り返ると、良くある積分路を変形を用いる証明に対して、被積分関数の変形を用いる証明である、と短くまとめられるだろう。)

定義 28.1 (整関数)

$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ は整関数である。

定理 28.2 (Liouville(リウヴィユ)の定理, リウヴィルと読む人多い)

有界な整関数は定数関数である。

証明

$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は正則で、ある実数 M が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \le M$$

を満たすとする。

正則性の仮定より、f は原点で冪級数展開出来て、その収束半径は $+\infty$ である。すなわち、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\ge 0}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{2}$$

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

任意の正の数 R, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}}|d\zeta| \le \frac{M}{2\pi R^{n+1}}\int_{|\zeta|=R}|d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

(この不等式を Cauchy の評価式と呼ぶ。)

$R \to +\infty$ として $|a_n| \le 0$. ゆえに $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$ より $n \ge 1$ であることに注意). (2) に代入して

$$f(z) = a_0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

ゆえに f は定数関数である。 □

(余談: 今回は証明しないことにしたが、Riemann の除去可能特異点定理 (定理 28.7) の証明はこれと良く似ている。

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

定理 28.3 (代数学の基本定理)

$P(z)$ が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、$P(z)$ は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、$P(z)$ は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

証明.

背理法を用いる。$P(z)$ が根を持たない、すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) \neq 0$$

を満たすと仮定する。すると

$$f(z) := \frac{1}{P(z)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定義した f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

実は f は有界である。実際、$\lim_{z\to\infty} |P(z)| = +\infty$ であるから、ある実数 R が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |P(z)| \geq 1.$$

証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

一方、$|f|$ は $\mathbb{C}$ 全体で連続であるから、有界閉集合 $\overline{D}(0; R)$ における $|f|$ の最大値 M が存在する (Weierstrass の最大値定理)。$M' := \max\{1, M\}$ とおくと

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M'.$$

以上より、f は有界な整関数であるから、Liouville の定理によって、f は定数関数である。ゆえに P も定数関数である。これは $P(z)$ が次数 1 以上の多項式であることに矛盾する。 □

上で用いた $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = +\infty$ の証明は分かるだろうか。当たり前に感じる？しかし、例えば $\lim_{z\to\infty} |e^z| = \infty$ は成り立たない。念のため $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = +\infty$ を証明しておこう。

補題 28.4 (多項式の $z \to \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$, $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0)$ とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})\,(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1 - \varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n\,.$$

証明.

$z \to \infty$ のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \to 1.$$

ゆえに

$$\frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} \to 1.$$

ゆえに任意の正の数 ε に対して、ある実数 R が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad \left| \frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} - 1 \right| < \varepsilon.$$

これから

$$(1 - \varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n\,.$$

定理 28.5 (平均値の定理 (the mean-value property))

Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$ とするとき、$\overline{D}(c;r) \subset \Omega$ を満たす任意の $r > 0$ に対して

$$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta})d\theta.$$

(右辺は、円周 $|z-c| = r$ における f の平均値であることに注意)

証明.

Cauchy の積分公式を用い、積分路を $\zeta = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とパラメーターづけすると

$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta}\ d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

□

9.5 平均値の定理と最大値原理

定理 28.6 (最大値原理 (the maximum principle, maximum-modulus theorem))

Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$z_0 \in \Omega$,

$$(\forall z \in \Omega) \quad |f(z)| \le |f(z_0)| \quad (|f(z_0)| \text{ は } |f| \text{ の最大値である、ということ})$$

が成り立つならば、f は定数関数である。
(正則関数の絶対値が、ある内点で最大値を取れば、その関数は実は定数関数である。)

証明

$M := |f(z_0)|$ とおく。
Ω は開集合であるから、$(\exists \varepsilon > 0)\ D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$.
$\rho := \varepsilon/2$ とおくと、$\overline{D}(z_0; \rho) \subset \Omega$.
$0 < r \le \rho$ なる任意の r に対して、平均値の定理から

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

ゆえに

$$M = |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\, d\theta = M.$$

(つづく)

9.5 平均値の定理と最大値原理

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \, d\theta.$$

$\theta \mapsto \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|$ は連続で、$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| \le M$ であるから

$$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち $|f(z)| = M$ $(|z - z_0| = r)$.
($\because$ どこか 1 点 θ_0 で $\left| f(z_0 + re^{i\theta_0}) \right| < M$ であれば、連続性から θ_0 の十分小さな近傍で $\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| < M$). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

r の任意性から $|f(z) = M|$ $(|z - z_0| \le \rho)$.
ゆえに f 自身が $D(z_0; \rho)$ で定数関数 C に等しい ($\because$ Cauchy-Riemman のところで「絶対値が定数ならば関数自身が定数」を示した)。
一致の定理により Ω 全体で $f = C$. □

余談: 実は調和関数についても、平均値の定理と最大値原理が成り立ち、様々な応用がある。

定理 28.7 (Riemann の除去可能特異点定理)

$c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $f\colon \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-c| < \varepsilon\} \to \mathbb{C}$ は正則かつ有界とする。このとき c は f の除去可能特異点である。

証明

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z-c| < \varepsilon) \quad |f(z)| \le M.$$

f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則なことから、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;0,\varepsilon)).$$

そして、任意の $n \in \mathbb{Z}$ と $0 < r < \varepsilon$ を満たす任意の r に対して

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta.$$

10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}}|d\zeta| \le \frac{M}{2\pi r^{n+1}}\int_{|\zeta-c|=r}|d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に $n\in\mathbb{N}$ のとき

$$|a_{-n}| \le \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0<r<\varepsilon).$$

$r\to 0$ とすると $|a_{-n}|=0$. ゆえに $a_{-n}=0$.
ゆえに f の c における Laurent 展開の主部は 0 である。すなわち c は f の除去可能特異点である。 □

Liouville の定理 (定理 28.2) の証明と並べてみると、類似点が分かって面白く感じられるかもしれない。

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

定理 28.8 (Casorati-Weierstrass)

c が f の孤立真性特異点ならば

$$(\forall \beta \in \mathbb{C})(\exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall \in \mathbb{N}) z_n \neq c) \wedge \lim_{n\to\infty} z_n = c \wedge \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \beta.$$

特に $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は確定しない。

証明

$\beta \in \mathbb{C}$ とする。次を示せば良い。

$$(\star) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\forall r \in (0, R))(\exists z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| < \varepsilon$$

($(\star)$ を示せば良いことの確認: $n = 1, 2, \cdots$ に対して、$\varepsilon = r = \min\{\frac{1}{n}, R\}$ として用いると、

$$(\exists z_n) : 0 < |z_n - c| < \frac{1}{n} \wedge |f(z_n) - \beta| < \frac{1}{n}.$$

こうして作った $\{z_n\}$ に対して、$n \to \infty$ のとき $z_n \to c$ かつ $f(z_n) \to \beta$ が成り立つ。)

(つづく)

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き)

　$(\star)$ を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \qquad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、g は $A(c; e, r)$ で正則であり (分母が 0 にならないから)、また $g(z) \neq 0$. 特に c は g の孤立特異点である。さらに $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ が成り立つので、Riemann の除去可能特異点定理によって、c は g の除去可能特異点である。ゆえに g は $D(c; r)$ で正則であるように拡張できる。

　$(*)$ を $f(z)$ について解く。

$$f(z) = \beta + \frac{1}{g(z)} \quad (z \in A(c; 0, r)).$$

(つづく)

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き).

場合分けする。

(i) $g(c) \neq 0$ ならば c は f の除去可能特異点である。

(ii) $g(c) = 0$ ならば、c は g の零点である。その位数を k とすると、c は f の k 位の極である。

どちらも、c が f の真性特異点であることに矛盾する。 □

10.4.3 孤立特異点の lim による特徴づけ

定理 28.9 (孤立特異点の lim による特徴づけ)

c が f の孤立特異点とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

1. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は収束。すなわち $(\exists A\in\mathbb{C})$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=A$.
2. c が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$.
3. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は収束しないし、∞ に発散もしない。

証明.

(1), (2) の $\Rightarrow$ は証明済みである (比較的簡単)。

Casorati-Weierstrass の定理により、(3) の $\Rightarrow$ が成立することも分かった。

任意の孤立特異点は、除去可能特異点、極、真性特異点のいずれかであるので、(1), (2), (3) の $\Leftarrow$ が成立する。 $\square$

10.4.3 孤立特異点の lim による特徴づけ

Cf. 分類になっているとき、$\Rightarrow$ から $\Leftarrow$ が導かれる、という論法は、次の定理の証明でも使える。

実係数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、$D := b^2 - 4ac$ とおくとき

- $D > 0 \Leftrightarrow$ 2 つの相異なる実根を持つ。
- $D = 0 \Leftrightarrow$ 1 つの実根 (重根) を持つ。
- $D < 0 \Leftrightarrow$ 2 つの相異なる虚根を持つ。

以上で、例年説明していることはほぼすべて説明できた。

長い話、最後まで視聴してくれた人、お疲れさまです。

「複素関数・同演習」の後に

- この先の関数論について。キーワードの紹介くらい。

  留数定理のさらなる応用、*Riemann* 球面 $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, *Riemann* の写像定理、楕円関数、代数関数、*Riemann* 面、特殊関数、多変数関数論、佐藤超函数論、などなど

  関数論はなかなか広大。
- 現象数理学科には「応用複素関数」という科目がある。(残念ながら？) 上に書いた関数論の続きというよりは、応用事例の紹介が主な内容である (「コンピューター数理」の科目)。留数定理による級数の和の計算、流体のポテンシャル流、ポテンシャル問題、等角写像の数値計算、数値積分の誤差解析、佐藤の超函数の紹介、などなど (毎年迷いながらやっている)。