複素関数練習問題 No. 7

桂田 祐史

2017 年 1 月 14 日, 2022 年 8 月 24 日

念のため: $D(c;r)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<r\}$,　$A(c;R_1,R_2)=\{z\in\mathbb{C}\mid R_1<|z-c|<R_2\}$

Cauchy の積分公式から導かれる正則関数の性質

積分公式やそれから導かれるべき級数展開可能性から、**一致の定理**、**最大値原理**、**Liouville の定理**、**収束半径の評価**などが得られる。一致の定理と収束半径は必修。

問題 107. U は $\mathbb{C}$ の開集合, $c\in U$, $f\colon U\to\mathbb{C}$ は正則とするとき、次の 2 条件は同値であることを示せ。

(i) U で正則な関数 g が存在して、$f(z)=(z-c)^k g(z)$ $(z\in U)$, $g(c)\neq 0$.

(ii) $f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0$, $f^{(k)}(c)\neq 0$.

(この条件が成り立つときに、c は f の k **位の零点**という。この命題の証明は講義ノート §11 にある。(i)⇒(ii) は、多項式の場合と同じ論法で証明できる。(ii)⇒(i) は、冪級数展開を用いる。)

問題 108. Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$c\in\Omega$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則, $f(c)=0$, $f\not\equiv 0$ ならば、

$$\exists\varepsilon>0\ (\forall z: 0<|z-c|<\varepsilon)\quad f(z)\neq 0$$

が成り立つこと (定数関数 0 でない正則関数の零点は孤立している) を示せ。

(これから、正則関数の一致の定理 (identity theorem) が導かれる。)

問題 109. 加法定理 $\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w$ $(z,w\in\mathbb{C})$ を、実三角関数の加法定理と、一致の定理を用いて証明せよ。

問題 110. 関数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ の、実数 a のまわりの冪級数展開 (Taylor 展開) の収束半径を求めよ。ただし冪級数展開そのものは実行しないで求めること。

(この問題をある年、宿題に出してみたら、大勢の人が 1 と間違えた。)

問題 111. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3}$ の 0 のまわりの Taylor 展開は $f(z)=-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{3^{n+1}}$ であるが、収束半径をなるべくたくさんの方法で求めよ。

問題 112. Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$\forall z\in\Omega$ $f(z)\neq 0$, さらに f は定数関数ではないとするとき、$\displaystyle\min_{z\in\Omega}|f(z)|$ は存在しないことを示せ。

問題 113. $f(z)$ が $|z|\le 1$ の開近傍 (それを含むある開集合という意味) で正則であって、$|f(z)|$ が $|z|=1$ で定数 m で、しかも $|z|<1$ で零点を持たなければ、$f(z)$ は定数であることを示せ。

問題 114. 次の命題 (**Schwarz の Lemma** と呼ばれる有名な定理) を証明せよ。

$f\colon D(0;1)\to\mathbb{C}$ は正則で、$|f(z)|\le 1$ $(z\in D(0;1))$, $f(0)=0$ とするとき、$|f(z)|\le|z|$ かつ $|f'(0)|\le 1$ が成り立つ。さらに、$f(z)=cz$, $|c|=1$ となる c が存在する場合を除くと

$$|f(z)|<|z|\quad(0<|z|<1),\quad \left|f'(0)\right|<1.$$

孤立特異点と Laurent 展開

問題 115. 次の用語の定義を述べよ。(1) 孤立特異点　(2) 除去可能特異点　(3) 極　(4) 孤立真性特異点　(5) 留数

問題 116. 複素関数 f の孤立特異点 c が、f の k 位の極であるとはどういうことか、定義を述べよ。

問題 117. 複素関数が Laurent 展開可能であることを結論とする定理 (授業で紹介した) を一つ書け。(展開が成り立つ変数の範囲、Laurent 展開の係数などについて言及すること。)

問題 118. c が f の孤立特異点、$k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の 2 条件は互いに同値であることを示せ。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) c を含むある開集合 U で正則な関数 g が存在して、

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (z \in U \setminus \{c\}), \quad g(c) \neq 0.$$

(この命題の証明は講義ノート §11 にある。(i)⇒(ii) にしても、(ii)⇒(i) にしても、関数を展開してしまえば、後は簡単である。)

問題 119. 以下の (1),(2),(3) を証明せよ (Casorati-Weierstrass の定理を使わずに証明せよ)。

(1) $(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists z \in A(0;0,\varepsilon))\ \exp \dfrac{1}{z} = a.$

(2) $(\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}})\ \lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0 \wedge \lim\limits_{n \to \infty} \exp \dfrac{1}{z_n} = 0.$

(3) $(\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}})\ \lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0 \wedge \lim\limits_{n \to \infty} \exp \dfrac{1}{z_n} = \infty.$

これを解くために孤立特異点の知識は必要なく、$e^z = \exp z$, $\log$ の性質の話である。(1) は $a = re^{i\theta}$ とするとき、z を r, θ で具体的に表せば良い。

問題 120. $f(z) = \dfrac{1}{z(2-z)}$ について、以下のものを求めよ。(a) 0 のまわりの Laurent 展開　(b) 2 のまわりの Laurent 展開　(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < \infty\}$ における Laurent 展開

問題 121. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z+2)}$ について、以下のものを求めよ。(a) $D(0;1)$ における Taylor 展開 (b) $A(0;1,2)$ における Laurent 展開　(c) $A(0;2,\infty)$ における Laurent 展開

問題 122. $f(z) = \dfrac{1-e^{z^2}}{z^4}$ を 0 のまわりで Laurent 展開せよ。

問題 123. $f(z) := \dfrac{z^2+1}{(z+1)(2z-1)}$ について、以下の問に答えよ。
(1) 0 のまわりの Taylor 展開を求めよ。　(2) $1/2 < |z| < 1$ における Laurent 展開を求めよ。
(3) $1 < |z| < \infty$ における Laurent 展開を求めよ。

留数

問題 124. 次の用語・記号の定義を述べよ。(1) 区分的に滑らかな曲線　(2) 単純曲線　(3) 閉曲線 (4) 領域　(5) $\mathbb{C}$ の部分集合 D に対する $\overline{D}$　(6) 正の向き

問題 125. 留数定理を書き、例を 1 つあげよ。

問題 126. $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $\Omega := D(c; R)$, $P\colon \Omega \to \mathbb{C}$ と $Q\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $(\forall n \in \mathbb{N})\ P^{(n)}(c) = 0$ ならば P は定数関数であることを示せ。

(2) $(\exists k \in \mathbb{N})\ P(c) = P'(c) = \cdots = P^{(k-1)}(c) = 0$, $P^{(k)}(c) \neq 0$ が成り立つならば、Ω で正則な関数 P_1 で、$P(z) = (z-c)^k P_1(z)$ $(z \in \Omega)$ を満たすものが存在することを示せ。また、このとき $P_1(c)$ の値を P, k, c で表わせ。

(3) P が (2) の仮定を満たすとき、$f := \dfrac{Q}{P}$ は c を高々k 位の極とすること (特に $Q(c) \neq 0$ であれば k 位の極) とすることを示せ (c が高々 k 位の極とは、k 以下の自然数 k' が存在して c は k' 位の極であるか、または c は f の除去可能特異点であることをいう)。

(1), (2) は正則関数の冪級数展開可能性からすぐ分かる。(3) は (2) を用いる。(1), (2), (3) の順に難しくなる？この (3) をきちんと覚えて使えるようになることが**とても重要**。

問題 127. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^3}$ のとき、$\mathrm{Res}(f; 0)$, $\mathrm{Res}(f; 1)$, $\mathrm{Res}(f; 2)$ を求めよ。

問題 128. 次の各関数の極とその位数、その点における留数を求めよ。

(1) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$　(2) $f(z) = \dfrac{1+z}{(z^2+a^2)^2}$ (a は複素数の定数)　(3) $f(z) = \dfrac{1}{z \sin z}$

問題 129. c が f の高々 k 位の極であれば、$n \geq -k$ を満たす任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$a_n = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n+k} \left[(z-c)^k f(z)\right]$$

が成り立つことを示せ。ただし a_n は Laurent 展開の係数: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ $(0 < |z-c| < \varepsilon)$。

問題 130. $\mathrm{Res}(f; c) = a_{-1}$ とするとき、次のものを求めよ ($\mathrm{Res}(f; c)$ は f について線型であることに注意)。

(1) $\mathrm{Res}(f(z) + \cos z; c)$　(2) $\mathrm{Res}(3f(z); c)$

問題 131. f は $0 < |z| < R$ で正則で、

$$f(-z) = f(z) \quad (0 < |z| < R)$$

を満たすとするとき、$\mathrm{Res}(f; 0) = 0$ であることを示せ。

問題 132. c は f の 1 位の極で $\mathrm{Res}(f; c) = a_{-1}$ とする。また φ は c の近傍で正則とする。このとき $\mathrm{Res}(\varphi(z) f(z); c)$ を求めよ。

問題 133. (1) $\pi \cot \pi z = \pi \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ の極とその位数、留数を求めよ。　(2) $c \in \mathbb{C}$ が複素関数 f の 1 位の極, g は c の近傍で正則とするとき、$\mathrm{Res}(fg; c) = g(c)\,\mathrm{Res}(f; c)$ を示せ。　(3) $\displaystyle\int_{|z|=5/2} z^2 \pi \cot \pi z \, dz$ を求めよ。

収束半径

問題 134. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ の収束半径がそれぞれ R_1, R_2 で、$0 < R_1 < R_2 < \infty$ を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ の収束半径は R_1 であることを示せ。

零点と極の位数

問題 135. 次の関数 f と複素数 c に対して、c が f の何位の零点であるか答えよ。

(1) $\sin(z^2)$, $c=0$ (2) $\dfrac{1-\cos x}{x}$, $c=0$ (3) $\dfrac{\sin\left(z^2\right)}{1-\cos\left(z^3\right)}$, $c=0$

問題 136. $k\in\mathbb{Z}$ に対して、c が f の k 位の零点であることを、

(i) $k>0$ のときは普通の定義、すなわち c の近傍 U と、U で正則な関数 g が存在して、$f(z)=(z-c)^k g(z)$ $(z\in U)$, $g(c)\neq 0$.

(ii) $k=0$ のとき、f は c のある近傍で正則で、$f(c)\neq 0$.

(iii) $k<0$ のとき、c は f の $-k$ 位の極である。

と定義するとき、以下を証明せよ。

(1) $k,\ell\in\mathbb{Z}$, $c\in\mathbb{C}$, c は f の k 位の零点, g の ℓ 位の零点とするとき、c は fg の $k+\ell$ 位の零点である。

(2) $k,\ell\in\mathbb{Z}$, $c\in\mathbb{C}$, c は f の k 位の零点, g の ℓ 位の零点とするとき、c は $\dfrac{f}{g}$ の $k-\ell$ 位の零点である。

留数定理の定積分計算への応用

公式を使う練習をするために全部解こう、などと考えないように。それよりは、授業で紹介した公式 (定理) を自分で証明できるように良く復習すること。

問題 137. a を正数, n を自然数とする。以下の積分を求めよ。

(1) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$ (2) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$ (3) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ (4) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+a^6}$

(5) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{(x^2+a^2)^4}\,dx$ (6) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+a^4)^3}\,dx$ (7) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

(8) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^{2n}+a^{2n}}$

問題 138. (1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx$ (Ahlfors, P. 173) (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx$, $a>0$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}$ (5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+3x^2+2}dx$

問題 139. $P(z)$, $Q(z)$ を互いに素な m,n 次の実係数の多項式で、$m\geq n+1$ とし、α を正数とする。$P(z)=0$ が実根をもたず、上半平面では、単根 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ のみをもてば、

(1)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(x)}{P(x)}\cos\alpha x\,dx=-2\pi\,\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{Q(\alpha_j)}{P'(\alpha_j)}e^{i\alpha a_j}\right)$$

(2)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(x)}{P(x)}\sin\alpha x\,dx=2\pi\,\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{Q(\alpha_j)}{P'(\alpha_j)}e^{i\alpha a_j}\right)$$

が成立することを示せ。

問題 140. $P(z),\, Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \neq 0$, $a > 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)} e^{iaz}; c\right)$$

が成り立つ、という定理を授業で紹介するが、$a < 0$ のときはどうすればよいか。

問題 141. 正数 a, α に対して以下の積分を求めよ。
(1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + a^2}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + a^2}\, dx$ (3) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(x^2 + a^2)^2}\, dx$ (4) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^4 + a^4}\, dx$
(5) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^4 + a^4}\, dx$

問題 142. n は自然数, a と b は正数, $0 < r < R$ とする。以下の積分を求めよ。
(1) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta\, d\theta$ (2) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{2n} \theta\, d\theta$ (3) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$
(4) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$ (5) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}$ (6) $I = \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}}\right) d\theta$
(7) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta\right)^2}$ (8) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}$ $(a > b > 0)$
(9) $I + iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta} d\theta, \quad J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta} d\theta.$$

(10) $I + iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos\left(a\sin\theta - n\theta\right) d\theta, \quad J = \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \sin\left(a\sin\theta - n\theta\right) d\theta.$$

問題 143. $f(z) = Q(z)/P(z)$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in (0, \infty)\ P(x) \neq 0$, 0 は $f(z)$ の正則点または 1 位の極とするとき、

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = -\sum_{c \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)} \operatorname{Res}\left(f(z) \log z; c\right)$$

が成り立つ (ただし $\log z$ は $\operatorname{Im} \log z \in (0, 2\pi)$ となるような分枝を取る)。これを証明せよ。

広義積分の収束, Cauchy の主値

問題 144. f が実軸上の区間 $[a, b]$ で C^1 級で、$c \in (a, b)$ とするとき、

$$\text{p.v.} \int_a^b \frac{f(x)}{x - c}\, dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)}{x - c}\, dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{f(x)}{x - c}\, dx\right)$$

が存在することを示せ。(ヒント: $\exists g$ s.t. $f(x) = f(c) + (x - c) g(x)$)

問題 145. $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ が成り立つとき、広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx$$

が絶対収束することを示せ (これは微積分の比較的簡単な問題)。

問題 146. $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \neq 0$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が成り立つとき、広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx$$

が収束することを示せ (絶対収束しないケースで少し難しい)。

(注意: $a > 0$ のとき、$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{iax}\, dx$ の値 (Cauchy の主値！) が留数で求まることを証明するだけで、広義積分の収束証明をさぼっているテキストが時々ある。授業での証明は、広義積分の存在も同時に証明している。微積分の手法で広義積分の存在を示すのは、面白い問題である。良くテキストに載っている $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ の収束証明が参考になる。)

問題 147. f は c の近傍で正則とする。C_ε: $z = c + \varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ に対し、次式が成り立つことを示せ。

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - c}\, dz = \pi i f(c).$$

解答

解答 107. 講義ノート 11 を見て下さい。

解答 108. Ω は開集合、$c\in\Omega$ であるから $(\exists r>0)$ $D(c;r)\subset\Omega$. ゆえに $\exists\{a_n\}_{n\geq 0}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D(c;r)).$$

もしも $(\forall k\in\mathbb{N})$ $f^{(k)}(c)=0$ であれば、$f(z)=0$ $(z\in D(c;r))$. 連結性の議論を用いると $f\equiv 0$ となり、仮定に反する。ゆえに $(\exists k\in\mathbb{N})$ $f^{(k)}(c)\neq 0$. このような k のうちで最小のものを取ると、**67** の (ii) が成り立つ。ゆえに Ω で正則な関数 g が存在して、

$$f(z)=(z-c)^k g(z) \quad z\in\Omega, \quad g(c)\neq 0.$$

g が連続であるから、c の十分近くでは $g\neq 0$ である。実際、$(\exists\delta>0)$ $(\forall z\colon |z-c|<\delta)$ $|g(z)-g(c)|<|g(c)|$. このとき $|g(z)|=|g(c)-(g(c)-g(z))|\geq|g(c)|-|g(c)-g(z)|>0$ であるから、$g(z)\neq 0$. すると、$0<|z-c|<\delta$ であれば、$f(z)=(z-c)^k g(z)\neq 0$. ■

解答 109. 宿題の問 10 解説 (http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2014/toi10-answers.pdf) を見て下さい。

解答 110. $1+z^2=(z+i)(z-i)$ であるから、$z=\pm i$ であれば $1+z^2=0$, $z\neq\pm i$ であれば $1+z^2\neq 0$. ゆえに f は $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ で正則である。$a\in\mathbb{R}$ と i, $-i$ との距離はともに $\rho:=\sqrt{a^2+1}$. ゆえに $D(a;\rho)$ で f は正則であるが、$r>\rho$ を満たす任意の r に対して f は $D(a;r)$ では正則でない。ゆえに f の a のまわりの冪級数展開の収束半径は ρ である。■

解答 111. **70** と同様に解くことが出来る。$z^2-3=(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})$ であり、冪級数の中心 0 と $\pm\sqrt{3}$ との距離は $\sqrt{3}$ であるから、$\sqrt{3}$ が収束半径である (この説明は少しはしょってある。ていねいに書くとどうなるかは **70** の解説を見ること。)。— この解き方がこの講義の到達点である。

以下は、冪級数展開を求める解き方を説明する。

等比級数の和の公式から

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3}=-\frac{1}{3-z^2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(z^2/3)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}z^{2n}.$$

この級数が収束する $\Leftrightarrow$ $|$公比$|<1\Leftrightarrow\left|z^2/3\right|<1\Leftrightarrow|z|^2<3\Leftrightarrow|z|<\sqrt{3}$. 収束半径の定義 ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径が $\rho\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}|z-c|<\rho$ で収束、$|z-c|>\rho$ で発散) から、収束半径は $\sqrt{3}$. (一丁上がり)

以上が一番簡単であると思うが、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}z^{2n}$$

という冪級数展開の形を知った後で、d'Alembert の公式や Cauchy-Hadamard の公式を用いる方法もある。

(Cauchy-Hadamard の公式を用いる) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ という形に書くとき、

$$c=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{-1}{3^{n/2+1}} & (n\text{ が偶数})\\ 0 & (n\text{ が奇数})\end{cases}$$

であり、

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}\dfrac{1}{3^{1/2+1/n}} & (n\text{ が偶数})\\ 0 & (n\text{ が奇数})\end{cases}$$

であるから、収束半径を ρ とするとき、

$$\frac{1}{\rho}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{3^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ゆえに $\rho=\sqrt{3}$.

(d'Alembert の公式を用いる) 直接適用することは出来ない。$\zeta:=z^2$ とおくことで

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}\zeta^n.$$

右辺の ζ の冪級数の収束半径を求める。$b_n:=-\dfrac{1}{3^{n+1}}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^{n+2}}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}3=3.$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^n$ の収束半径は 3. (定義によって) これは $|\zeta|<3$ で収束、$|\zeta|>3$ で発散することを意味する。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}z^{2n}$ は $|z|<\sqrt{3}$ で収束、 $|z|>\sqrt{3}$ で発散する。ゆえに収束半径は $\sqrt{3}$. ■

解答 112. 対偶、すなわち「$\displaystyle\min_{z\in\Omega}|f(z)|$ が存在するならば、f は定数関数である」を証明しよう。$f(z)\neq 0$ であるから、$g(z):=\dfrac{1}{f(z)}$ とおくと、$g\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則である。$\displaystyle\min_{z\in\Omega}|f(z)|$ が存在すると仮定したので、$\displaystyle\max_{z\in\Omega}|g(z)|$ が存在する (実際、$\dfrac{1}{\displaystyle\min_{z\in\Omega}|f(z)|}$ が $\displaystyle\max_{z\in\Omega}|g(z)|$ である)。正則関数の (絶対) 最大値の原理によって、g は定数関数である。ゆえに f も定数関数である。 ■

解答 114. 大抵の関数論の本に載っているので、急ぐ人は自分で調べて下さい。 ■

解答 115.

(1) $\Omega\subset\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ とする。c が f の孤立特異点であるとは、$(\exists r>0)$ f は $\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-c|<r\}$ で正則かつ $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<r\}$ では正則でない、が成り立つことをいう。

(2) $\Omega\subset\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ とする。c が f の除去可能特異点であるとは、c が f の孤立特異点であり、f の c のまわりの Laurent 展開の主部が 0 であることをいう。すなわち $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ を f の c のまわりの Laurent 展開とするとき、

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_{-n}=0$$

が成り立つことを意味する。

(3) $\Omega\subset\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ とする。c が f の極であるとは、c が f の孤立特異点であり、f の c のまわりの Laurent 展開の主部が 0 でなく、有限項を除いて 0 であることをいう。すなわち $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ を f の c のまわりの Laurent 展開とするとき、

$$(\exists k\in\mathbb{N})\quad a_{-k}\neq 0\wedge[(\forall n\in\mathbb{N}:n>k)\quad a_{-n}=0]$$

が成り立つことを意味する。

(4) $\Omega\subset\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ とする。c が f の孤立真性特異点であるとは、c が f の孤立特異点であり、f の c のまわりの Laurent 展開の主部が無限個の 0 でない項を持つことをいう。すなわち $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ を f の c のまわりの Laurent 展開とするとき、

$$(\forall k\in\mathbb{N})(\exists n\in\mathbb{N}:n>k)\quad a_{-n}\neq 0$$

が成り立つことを意味する。 (解答終わり)

以上、ばらして書くと結構長いが、もし (1)〜(4) を全部解答せよ、となったら、Laurent 展開の式を書いてしまって、

- c が f の除去可能特異点 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_{-n}=0$
- c が f の極 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists k\in\mathbb{N})\ a_{-k}\neq 0$ かつ $(\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n>k)\ a_{-n}=0$
- c が f の孤立真性特異点 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall k\in\mathbb{N})\ (\exists n\in\mathbb{N}\colon\ n>k)\ a_{-n}\neq 0$

と 1 行ずつ書けば良いので、少し短くなる。■

解答 116. c が複素関数 f の孤立特異点であるとき、f は c のまわりで Laurent 級数展開出来る。すなわち $(\exists r>0)\ (\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(|z-c|<r).$$

このとき c が f の k 位の極であるとは、

(i) $a_{-k}\neq 0$

(ii) $(\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n>k)\ a_{-n}=0$

が成り立つことをいう。■

解答 117. 1 つは円環領域に関する定理で、

$c\in\mathbb{C}$ で、R_1, R_2 は $0\le R_1<R_2\le\infty$ を満たすとする (R_1 は 0 以上の実数だが、R_2 は R_1 より大きい実数であるか、または ∞ に等しい)。f が $A(c;R_1,R_2)$ で正則ならば、$\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(R_1<|z-c|<R_2).\tag{3}$$

(3) の右辺の級数は、$R_1<r_1<r_2<R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$\overline{A}(c;r_1,r_2)$ で一様に絶対収束する (特に一様収束であり、絶対収束である)。
(係数の一意性) 等式 (3) が成り立っているならば、$R_1<r<R_2$ を満たす任意の r に対して、

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz\quad(n\in\mathbb{Z}).\tag{4}$$

もちろん全部書ければ結構だが、青字の部分だけでもこの問題の解答としては良しとする。
孤立特異点に限定して述べることも出来る。

c が複素関数 f の孤立特異点とするとき、$\exists R\in(0,\infty)\cup\{\infty\}$, $\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(0<|z-c|<R).\tag{5}$$

(5) の右辺の級数は、$0<r_1<r_2<R$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$\overline{A}(c;r_1,r_2)$ で一様に絶対収束する (特に一様収束であり、絶対収束である)。
(係数の一意性) 等式 (5) が成り立っているならば、$0<r<R$ を満たす任意の r に対して、

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz\quad(n\in\mathbb{Z}).\tag{6}$$

解答 118. c が複素関数 f の孤立特異点であれば、$(\exists R \in (0,\infty)\cup\{\infty\})$ $(\exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R).$$

(i) c が f の k 位の極であるとは、

$$a_{-k} \neq 0 \quad \wedge \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0$$

であることを意味する。ゆえに

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \frac{a_{-1}}{z-c} + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \cdots + \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} \quad (0 < |z-c| < R). \end{aligned}$$

ゆえに

$$(z-c)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^{n+k} + a_{-1}(z-c)^{k-1} + a_{-2}(z-c)^{k-1} + \cdots + a_{-k} \quad (0 < |z-c| < R).$$

右辺の冪級数は $D(c;R)$ で収束するが、その和を $g(z)$ とおく:

$$g(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^{n+k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

$U := D(c;R)$ とおくと、g は U で正則で、$g(c) = a_{-k} \neq 0$,

$$\frac{g(z)}{(z-c)^k} = f(z) \quad (z \in U \setminus \{c\})$$

を満たす。

(ii) g は c を含む開集合 U で正則であるから、$(\exists R > 0)$ $D(c;R) \subset U$ かつ g は $D(c;R)$ で正則である。ゆえに $(\exists \{b_n\}_{n\geq 0})$ s.t.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

このとき $a_n := b_{n+k}$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z-c)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z-c)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R). \end{aligned}$$

そして $a_{-k} = b_0 = g(c) \neq 0$. ■

(この辺は、$\sum$ を使って一般的に書くと、それなりに長くなるけれど、やっていることは単純なことなので、敬遠せずに理解してもらいたいところである。)

解答 119. (時間が足りないので、古いメモをコピペする。ちょっと粗いけれど…) まず復習から。実数の世界では、$e^x=c$ を満たす x は一意的である。実際、

$$(\forall c\in(0,\infty))(\exists! x\in\mathbb{R})\quad e^x=c.$$

複素数の世界では、

$$(\forall c\in\mathbb{C}\setminus\{0\})(\exists z\in\mathbb{C})\quad \exp z=c$$

が成り立つが、与えられた c に対して、$\exp z=c$ を満たす z は一意的ではない。実際、

$$c=re^{i\theta},\quad r>0,\quad \theta\in[0,2\pi),\qquad z=x+iy,\quad x,y\in\mathbb{R}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\exp z=c &\iff e^x e^{iy}=re^{i\theta}\\ &\iff e^x=r\quad\text{and}\quad e^{iy}=e^{i\theta}\quad(\Longrightarrow \text{は両辺の絶対値を取る})\\ &\iff x=\log r\quad\text{and}\quad(\exists n\in\mathbb{Z})\quad y-\theta=2n\pi i\\ &\iff(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=\log r+i(\theta+2n\pi)\end{aligned}$$

であるから、次の「公式」が得られる。

丸暗記は危険かな ???

“多価関数” log の値は

$$(\sharp)\qquad \log re^{i\theta}=\log r+i(\theta+2n\pi)\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

この $(\sharp)$ の本当の意味は、

$$\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\exp z=re^{i\theta}\right\}=\{\log r+i\,(\theta+2n\pi)\mid n\in\mathbb{Z}\}$$

ということである。

解答

(1) $a=re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in[0,2\pi))$ とする。$\exp\dfrac{1}{z}=a=re^{i\theta}$ は

$$(\exists n\in\mathbb{Z})\quad \frac{1}{z}=\log r+i(\theta+2n\pi)$$

と同値である。ゆえに

$$(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=\frac{1}{\log r+i(\theta+2n\pi)}$$

と同値である。$\forall\varepsilon>0$ に対して、$n\in\mathbb{N}$ を十分大きく取れば、$\theta+2n\pi>1/\varepsilon$ となり (当然 $|\log r+i(\theta+2n\pi)|\ge|\theta+2n\pi|\ge\theta+2n\pi>1/\varepsilon$)、このとき $z:=\dfrac{1}{\log r+i(\theta+2n\pi)}$ とおけば、$0<|z|<\varepsilon$, $\exp\dfrac{1}{z}=re^{i\theta}=a.$

(2) $z_n:=-\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ とおくと、明らかに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=0.$ そして、

$$\exp\frac{1}{z_n}=\exp\frac{1}{-\frac{1}{n}}=\exp(-n)=e^{-n}\to0\quad(n\to\infty).$$

(3) $z_n:=\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ とおくと、明らかに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=0.$ そして、

$$\exp\frac{1}{z_n}=\exp\frac{1}{\frac{1}{n}}=\exp n=e^n\to\infty\quad(n\to\infty).\blacksquare$$

(要するに (2) と (3) は $\lim_{x\to\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ という高校で学んだ事実を使っているわけ。)

解答 120. f の $A(c; R_1, R_2)$ における Laurent 展開とは

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (R_1 < |z-c| < R_2)$$

という形の式のことであり、係数には一意性があるので、どういうやり方でも、この形の式に変形出来れば良い。具体的なやり方は一通りではない。

(解 1) $f(z)$ は次のように部分分数分解できる。

$$f(z) = \frac{1}{z(2-z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2}\right).$$

(1) $\dfrac{1}{z}$ はそれ自身が 0 のまわりの Laurent 展開である。$-\dfrac{1}{z-2}$ の 0 のまわりの Laurent 展開は (実は Taylor 展開である)

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(z/2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (|z| < 2).$$

ゆえに f の 0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} \quad (0 < |z| < 2).$$

(2) $-\dfrac{1}{z-2}$ はそれ自身が 2 のまわりの Laurent 展開である。$\dfrac{1}{z}$ の 2 のまわりの Laurent 展開は

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2)+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n \quad (|z-2| < 2).$$

ゆえに f の 2 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n - \frac{1}{z-2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z-2)^n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2} \quad (0 < |z-2| < 2).$$

(3) $\dfrac{1}{z}$ はそれ自身が $A(0; 2, \infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < \infty\}$ における Laurent 展開である。$-\dfrac{1}{z-2}$ の $A(0; 2, \infty)$ における Laurent 展開は

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z(1-2/z)} = -\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad (2 < |z| < \infty).$$

ゆえに f の $A(0; 2, \infty)$ における Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}\right) = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{z^n} \quad (2 < |z| < \infty).\blacksquare$$

(別解)

(1) $\dfrac{1}{2-z}$ の 0 のまわりの Laurent 展開

$$\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z-2}=\cdots(\text{上と同じ})\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad(|z|<2)$$

の両辺に $-\dfrac{1}{z-2}$ をかけて

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2-z}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}\quad(0<|z|<2).$$

(2) $\dfrac{1}{z}$ の 2 のまわりの Laurent 展開

$$\frac{1}{z}=\cdots(\text{上と同じ})\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n\quad(|z-2|<2)$$

の両辺に $\dfrac{1}{z}$ をかけて

$$f(z)=-\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z}=-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z-2)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z-2)^n-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}\quad(0<|z-2|<2).$$

(3) $\dfrac{1}{2-z}$ の $A(0;2,\infty)$ における Laurent 展開

$$\frac{1}{2-z}=\cdots(\text{上と同じ})\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}\quad(2<|z|<\infty)$$

から

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2-z}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^{n+1}}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{z^n}\quad(2<|z|<\infty).\blacksquare$$

解答 121. これは、小松・辻 (編), 大学演習函数論, 裳華房、という演習書から拝借した問題である。
まず部分分数分解しよう。実係数の範囲までだったら、

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z+2)}=\frac{az+b}{z^2+1}+\frac{c}{z+2}$$

とおいて、分母を払って⋯

$$f(z)=\frac{1}{5}\left(-\frac{z-2}{z^2+1}+\frac{1}{z+2}\right).$$

$\dfrac{1}{z+2}$ は簡単である。

$$\frac{1}{z+2}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n & (|z|<2),\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{z^n} & (2<|z|<\infty)\end{cases}$$

$\dfrac{-z+2}{z^2+1}$ はちょっと考え込むが…

$$\frac{1}{z^2+1} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} & (|z|<1) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^{2n}} & (1<|z|<\infty). \end{cases}$$

この $(-z)$ 倍と 2 倍の和と考えれば計算出来る。

$$\frac{-z}{z^2+1} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} z^{2n+1} & (|z|<1) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{2n-1}} & (1<|z|<\infty), \end{cases} \qquad \frac{2}{z^2+1} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2 z^{2n} & (|z|<1) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2}{z^{2n}} & (1<|z|<\infty). \end{cases}$$

後は $|z|<1$, $1<|z|<2$, $2<|z|<\infty$ の 3 つの場合に、適当に組み合わせる。というわけで方針はそれほど難しくはないが、計算は結構面倒である。

(解答) $f(z)$ の部分分数分解は

$$f(z) = \frac{1}{5}\left(-\frac{z-2}{z^2+1} + \frac{1}{z+2}\right).$$

(a) $|z|<1$ のとき、$|-z^2|<1$, $|z/2|<1$ であるから、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{1-(-z^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-z/2)}\right] = \frac{1}{5}\left[-(z-2)\sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}2(-1)^k z^{2k} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right] \\ &= \frac{1}{5}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^{k+1} - \frac{1}{2^{2k+2}}\right]z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k 2 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right]z^{2k}\right\} \\ &= \frac{1}{5}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^{k+1} - \frac{1}{4^{k+1}}\right]z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^k}\right]z^{2k}\right\} \quad (|z|<1) \end{aligned}$$

となる[1]。初めの数項を表示すると

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{5}\left[\left(2+\frac{1}{2}\right) + \left(-1-\frac{1}{4}\right)z + \left(-2+\frac{1}{8}\right)z^2 + \left(1-\frac{1}{16}\right)z^3 + \left(2+\frac{1}{32}\right)z^4 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}z^2 + \frac{3}{16}z^3 + \frac{13}{32}z^4 - \frac{13}{64}z^5 - \cdots \end{aligned}$$

(b) $1<|z|<2$ のとき、$|-1/z^2|<1$, $|-z/2|<1$ であるから、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2(1+1/z^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-z/2)}\right] = \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right] = \frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{z^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2}{z^{2k+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{z^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2}{z^{2k}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right] \quad (1<|z|<2) \end{aligned}$$

[1] 一応検算済み。

となる[2]。
(c) $2<|z|<\infty$ のとき、$|-1/z^2|<1,\ |2/z|<1$ であるから、

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2(1+1/z^2)}+\frac{1}{z(1+2/z)}\right] = \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^k+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+2}}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^n}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{z^{2k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2}{z^{2k+2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{z^n}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+2^{2k}}{z^{2k+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2-2^{2k-1}}{z^{2k}}\right] \quad (2<|z|<\infty).
\end{aligned}$$

(別解)　複素係数の範囲までの部分分数分解

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z+2)}=\frac{2i-1}{10}\cdot\frac{1}{z+i}-\frac{2i+1}{10}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+2}$$

に基づいた展開を示す。
　$|z|<1$ のとき、

$$f(z)=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2-i)i^{-n}+(2+i)i^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]z^n.$$

$1<|z|<2$ のとき、

$$f(z)=\frac{1}{10}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)i^n+(2+i)i^{-n}}{z^n}\right).$$

$2<|z|<\infty$ のとき、

$$f(z)=-\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n+(2-i)i^n+(2+i)i^{-n}}{z^n}.$$

(案外すっきりしている。)
　念のため、最初の数項を書くと、$|z|<1$ では、

$$f(z)=\frac{1}{10}\left\{5-\frac{5z}{2}-\frac{15z^2}{4}+\frac{15z^3}{8}+\frac{65z^4}{16}-\frac{65z^5}{32}-\frac{255z^6}{64}+\frac{255z^7}{128}+\frac{1025z^8}{256}-\frac{1025z^9}{512}-\frac{4095z^{10}}{1024}-\cdots\right\}$$

$1<|z|<2$ では、

$$f(z)=\frac{1}{10}\left[\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\frac{z^4}{16}-\cdots\right)-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{4}{z^4}-\frac{2}{z^5}+\frac{4}{z^6}+\frac{2}{z^7}-\frac{4}{z^8}-\frac{2}{z^9}+\frac{4}{z^{10}}+\cdots\right].$$

$2<|z|<\infty$ では、

$$f(z)=\frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^4}+\frac{3}{z^5}-\frac{6}{z^6}+\frac{13}{z^7}-\frac{26}{z^8}+\frac{51}{z^9}-\frac{102}{z^{10}}+\cdots.$$

(正直ちょっとくたびれる。) ■

[2] これも検算済み。

解答 122.

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \quad (z\in\mathbb{C})$$

の z に z^2 を代入して

$$e^{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(z^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2n} \quad (z\in\mathbb{C}).$$

ゆえに

$$1-e^{z^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2n} \quad (z\in\mathbb{C})$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{1-e^{z^2}}{z^4}&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2n-4}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2(n-2)}=-\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^{2n}\\ &=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^{2n}-\frac{1}{z^2} \quad (0<|z|<\infty).\blacksquare \end{aligned}$$

解答 123. f を部分分数分解する。割算して $z^2+1=\frac{1}{2}\cdot(z+1)(2z-1)+\frac{3}{2}-\frac{z}{2}$ であるから、

$$f(z)=\frac{z^2+1}{(z+1)(2z-1)}=\frac{1}{2}+\frac{3-z}{2(z+1)(2z-1)}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2z-1}.$$

(1) $|z|<1/2$ のとき、

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad \frac{1}{2z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^n$$

などを使って、

$$f(z)=-1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{3}\cdot(-1)^n+\frac{5}{6}\cdot 2^n\right]z^n \quad (|z|<1/2).$$

以下は略解。

(2) $1/2<|z|<1$ のときも同様にして、

$$f(z)=-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n+\frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{z^n}.$$

(3) $1<|z|<\infty$ のときは

$$f(z)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{2}{3}(-1)^{n-1}\right]\frac{1}{z^n}.\blacksquare$$

解答 124. (**反省**「区分的に滑らか」は曖昧で良くないと思ったので、「区分的に C^1 級」と呼ぶようにしてきた。だから、問題もそうすべきであった。また (2) と (3) は順番を入れ替えるべきであった。数学用語の定義は色々積み上げて行われるので、こうしてかみ砕いて書いてみると結構長くなるものだなあ…)
(解答)

(1) $\mathbb{R}$ の有界閉区間から $\mathbb{C}$ の部分集合 Ω への連続写像を、Ω 内の曲線と呼ぶ。すなわち $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, $\Omega\subset\mathbb{C}$, $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\Omega$ が連続であるとき、φ のことを Ω 内の曲線と呼ぶ。それが区分的に滑らかというのは、φ が区分的に C^1 級であることをいう。それは

$$\alpha=a_0<a_1<\cdots<a_n=\beta$$

を満たす $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ が存在して、φ を各小区間 $[a_{j-1}, a_j]$ に制限したとき C^1 級 (微分が出来て導関数が連続) となるという意味である。(a_j では片側微分係数が存在するけれど、右と左が一致しなくても良い、ということである。)

余談: 写像の記号 φ を曲線と呼んでも良いはずであるが、写像の記号とは別に C, γ, Γ などの記号で曲線を表すことが多い。C: $z=\varphi(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) などと書いたりする。(独白：「パラメーターの取り方を変えても◯◯は同じ」というのがあって、同値関係の剰余類のことを曲線と考えているのだろうか？)

(2) 曲線が単純であるとは、自分自身とは交わらないことをいう。曲線が閉曲線でない場合は、写像として単射、つまり

$$t_1, t_2 \in [\alpha,\beta],\quad t_1\neq t_2 \quad\Rightarrow\quad \varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$$

が成り立つことをいう。曲線が閉曲線の場合は

$$t_1, t_2 \in [\alpha,\beta),\quad t_1\neq t_2 \quad\Rightarrow\quad \varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$$

が成り立つことをいう。

余談: 単純曲線のことを Jordan 弧 (Jordan 曲線), 単純閉曲線のことを Jordan 閉曲線 (Jordan 曲線) ということもある。この辺は完全に統一されていなくて、「Jordan 曲線」と言われたときに、どちらの意味で言っているのか、曖昧である。

(3) 曲線が閉曲線とは、始点と終点が一致する (すなわち $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ が成り立つ) ことをいう。

(4) $\mathbb{C}$ の部分集合 Ω が領域であるとは、Ω が開集合かつ弧連結なことをいう。

余談: 開集合かつ連結と定義してある本が多いが、開集合という前提のもとでは、「弧連結」と「連結」は同値である。弧連結の方がイメージが湧きやすいと考えたので、この講義では弧連結にしておいた。

念のため: Ω が開集合であるとは

$$(\forall c\in\Omega)(\exists\varepsilon>0)\quad D(c;\varepsilon)\subset\Omega$$

が成り立つことをいう。ここで $D(c;\varepsilon)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<\varepsilon\}$.

念のため: Ω が弧連結であるとは、Ω 内の任意の二点 c_1, c_2 に対して、c_1 を始点、c_2 を終点とする (つまり $\varphi(\alpha)=c_1$, $\varphi(\beta)=c_2$) ような Ω 内の曲線が存在することをいう。

(5) D を $\mathbb{C}$ の部分集合とするとき、

$$\overline{D} \overset{\text{def.}}{=} \{z\in\mathbb{C}\mid (\forall\varepsilon>0)\ D(z;\varepsilon)\cap D\neq\emptyset\}.$$

$\overline{D}$ のことを D の閉包と呼ぶ。

(6) 正の向きというのは、図形として領域の境界になっているような (単純閉) 曲線についての用語である。

領域 D に対して $\partial D=\{z\in\mathbb{C}\mid(\forall\varepsilon>0)D(z;\varepsilon)\cap D\neq\emptyset \text{ かつ } D(z;\varepsilon)\cap D^c\neq\emptyset\}$ を D の境界と呼ぶ (D^c は D の補集合である)。D の境界が $\mathbb{C}$ 内の区分的に滑らかな単純閉曲線 C の像 $\varphi([\alpha,\beta])=\{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ と等しく、つねに C の進行方向 ($\varphi'(t)$ の方向) の左手に D があるとき (ここは少し曖昧だけど、頬かむりする)、曲線 C は正の向きであるという。■

解答 125. そんなに長くはないけれど、理解するには **84** をマスターする必要があるわけだ。
(解答) $\mathcal{D}$ は $\mathbb{C}$ の有界領域で、その境界 $\partial\mathcal{D}$ は区分的に C^1 級の単純閉曲線であるとする。また、Ω は $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega$ を満たす領域、$\{c_j\}_{j=1}^N$ は $\mathcal{D}$ 内の相異なる点、$f\colon \Omega \setminus \{c_1, \ldots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}(f; c_j).$$

ただし $\partial\mathcal{D}$ は正の向きの曲線であるとする ($\partial\mathcal{D}$ の進行方向の左手に $\mathcal{D}$ を見る)。■

解答 126. これは実質的に **78** と同じですね。整理してまとめるべきでした。

解答 127.

- f が適当な $R > 0$ に対して $|z - c| < R$ で正則なとき、$\operatorname{Res}(f; c) = 0$ と定義してある。
- f が c の近傍で正則な P, Q を用いて $f = \dfrac{Q}{P}$ と表され、c が P の k 位の零点であれば c は f の高々 k 位の極である。($Q(c) \neq 0$ であれば、c は f の k 位の極である。)
- 正則関数の零点の位数というのは、多項式の根の重複度を一般化した概念である (だから、多項式に関しては高校数学で考えれば良い)。一応、一般化して書いておくと、
  (a) $f(z) = (z - c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$ を満たす正則関数 g が存在するならば、c は f の k 位の零点である。
  (b) $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ (正確に書くと $0 \leq j \leq k - 1$ なる任意の整数 j に対して $f^{(j)}(c) = 0$), $f^{(k)}(c) \neq 0$ ならば c は f の k 位の零点である。
- c が高々 k 位の極であるとは、k 以下のある自然数 k' に対して c が f の k' 位の極であるか、または c が f の除去可能特異点であることをいう。
- c が f の高々 k 位の極であれば

$$\operatorname{Res}(f; c) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \left[(z - c)^k f(z)\right].$$

(解答) $P(z) := (z - 1)(z - 2)^3$, $Q(z) := z$ とおくと、$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ であり、P と Q は $\mathbb{C}$ で正則である。

$P(0) \neq 0$ であるから、f は 0 のある近傍 (例えば $D(0; 1)$) で正則である。ゆえに

$$\operatorname{Res}(f; 0) = 0.$$

1 は P の 1 位の零点であるから、1 は f の高々1 位の極である。($Q(1) \neq 0$ であるから、1 は f の 1 位の極である。) ゆえに

$$\operatorname{Res}(f; 1) = \lim_{\substack{z \neq 1 \\ z \to 1}} (z - 1) f(z) = \lim_{\substack{z \neq 1 \\ z \to 1}} \frac{z}{(z - 2)^3} = \frac{1}{(1 - 2)^3} = -1.$$

2 は P の 3 位の零点であるから、2 は f の高々3 位の極である。($Q(2) \neq 0$ であるから、2 は f の 3 位の極である。) ゆえに

$$\operatorname{Res}(f; 2) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{\substack{z \neq 2 \\ z \to 2}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1} \left[(z - 2)^3 f(z)\right] = \frac{1}{2} \lim_{\substack{z \neq 2 \\ z \to 2}} \left(\frac{z}{z - 1}\right)''.$$

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{(z-1)\cdot(z)' - (z-1)'\cdot z}{(z-1)^2} = \frac{z - 1 - z}{(z-1)^2} = \frac{-1}{(z-1)^2} = -(z-1)^{-2},$$
$$\left(\frac{z}{z-1}\right)'' = \left(-(z-1)^{-2}\right)' = 2(z-1)^{-3} = \frac{2}{(z-1)^3}$$

であるから

$$\mathrm{Res}(f;2) = \frac{1}{2}\lim_{\substack{z\neq 2\\ z\to 2}} \frac{2}{(z-1)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(2-1)^3} = 1.\blacksquare$$

解答 128.

(1) $P(z) := z^2+1$, $Q(z) := z$ とおくと、$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ で、P と Q は $\mathbb{C}$ で正則で、$P(z)$ の零点は $\pm i$ で位数はともに 1, $Q(\pm i) \neq 0$ であるから、$f = \dfrac{Q}{P}$ in $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$. $\pm i$ は f の 1 位の極である。

$$\mathrm{Res}(f;i) = \left.\frac{Q(z)}{P'(z)}\right|_{z=i} = \left.\frac{z}{2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{2},\quad \mathrm{Res}(f;-i) = \left.\frac{Q(z)}{P'(z)}\right|_{z=-i} = \left.\frac{z}{2z}\right|_{z=-i} = \frac{1}{2}.$$

(2) $P(z) := (z^2+a^2)^2$, $Q(z) := 1+z$ とおくと、$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ で、P と Q は $\mathbb{C}$ で正則で、$P(z)$ の零点は $\pm ai$ である。

$a \neq 0, \pm i$ であれば、$ai \neq -ai$, $\pm ai \neq -1$ であり、$\pm ai$ の P の零点としての位数はともに 2, $Q(\pm ai) \neq 0$ であるから、$\pm ai$ はともに f の 2 位の極である。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f;ai) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{\substack{z\neq ai\\ a\to ai}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-ai)^2 f(z)\right] = \lim_{\substack{z\neq ai\\ a\to ai}} \left(\frac{1+z}{(z+ai)^2}\right)' \\
&= \lim_{\substack{z\neq ai\\ a\to ai}} \frac{(z+ai)^2\cdot(1+z)' - \left((z+ai)^2\right)'\cdot(1+z)}{(z+ai)^4} \\
&= \lim_{\substack{z\neq ai\\ a\to ai}} \frac{(z+ai)-2(1+z)}{(z+ai)^3} = \frac{-2}{(2ai)^3} = -\frac{i}{4a^3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f;-ai) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{\substack{z\neq -ai\\ a\to -ai}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z+ai)^2 f(z)\right] = \lim_{\substack{z\neq -ai\\ a\to -ai}} \left(\frac{1+z}{(z-ai)^2}\right)' \\
&= \lim_{\substack{z\neq -ai\\ a\to -ai}} \frac{(z-ai)^2\cdot(1+z)' - \left((z-ai)^2\right)'\cdot(1+z)}{(z-ai)^4} \\
&= \lim_{\substack{z\neq -ai\\ a\to -ai}} \frac{(z-ai)-2(1+z)}{(z-ai)^3} = \frac{-2}{(-2ai)^3} = \frac{i}{4a^3}.
\end{aligned}$$

$a=0$ であれば、$f(z) = \dfrac{1+z}{z^4} = \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^4}$ であるから、0 が唯一の極で、その位数は 4, 留数は $\dfrac{1}{z}$ の係数であるから

$$\mathrm{Res}(f;0) = 0.$$

$a = \pm i$ であれば、

$$f(z) = \frac{1+z}{(z^2-1)^2} = \frac{1+z}{(z+1)^2(z-1)^2} = \frac{1}{(z+1)(z-1)^2}$$

であるから、極は $-1, 1$ で、位数はそれぞれ 1, 2.

$$\mathrm{Res}(f;-1) = \lim_{\substack{z\neq -1\\ a\to -1}} (z+1)f(z) = \lim_{\substack{z\neq -1\\ a\to -1}} \frac{1}{(z-1)^2} = \left.\frac{1}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathrm{Res}(f;1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{\substack{z\neq 1\\ a\to 1}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-1)^2 f(z)\right] = \lim_{\substack{z\neq 1\\ a\to 1}} \left(\frac{1}{z+1}\right)' = \lim_{\substack{z\neq 1\\ a\to 1}} \frac{-1}{(z+1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

(途中からの別解) 留数の計算は、この場合は、部分分数分解した方が見通しが良いかもしれない。

$$f(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}$$

を見ると、

- -1 での Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z-(-1)}$ であるから、$\operatorname{Res}(f;-1)=\dfrac{1}{4}$.
- 1 での Laurent 展開の主部は $-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(z-1)^2}$ であるから、$\operatorname{Res}(f;1)=-\dfrac{1}{4}$.

(これは僕が作ったものではなくて、どこから持ってきた問題なのだけど、結構面倒くさいですね。)

(3) $P(z):=z\sin z$, $Q(z):=1$ とおくと、P,Q は $\mathbb{C}$ で正則な関数である。$P(z)n=0\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})$ $z=n\pi$. $P'(z)=\sin z+z\cos z$, $P''(z)=\cos z+\cos z-z\sin z=2\cos z-z\sin z$.

$n\neq 0$ のとき $P'(n\pi)=(-1)^n n\pi\neq 0$ であるから、$n\pi$ は P の 1 位の零点であり、f の 1 位の極である。

$$\operatorname{Res}(f;n\pi)=\frac{Q(n\pi)}{P'(n\pi)}=\frac{(-1)^n}{n\pi}.$$

$n=0$ のときの $n\pi$, つまり 0 については、$P(0)=0$, $P'(0)=0$, $P''(0)=2\neq 0$ であるから、0 は f の 2 位の零点であり、f の 2 位の極である。

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;0)&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-0)^2 f(z)\right]=\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}\left(\frac{z}{\sin z}\right)'=\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}\frac{\sin z\cdot(z)'-(\sin z)'\cdot z}{\sin^2 z}\\&=\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}\frac{\sin z\cdot(z)'-(\sin z)'\cdot z}{\sin^2 z}=\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}\end{aligned}$$

Taylor 展開から

$$\sin z-z\cos z=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)-z\left(1-\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)z^3+O(z^5),$$

$$\sin^2 z=z^2+O(z^4)$$

であるから、

$$\operatorname{Res}(f;0)=0.\quad(\text{一応ここで解答終わり})$$

上の $\operatorname{Res}(f;0)$ の計算は分かりづらい (納得しづらい) かもしれないので、別解をいくつか。**91**「偶関数の 0 における留数は 0 である」を用いても良い。また Laurent 展開の 2 次以下の部分が

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6}+\frac{7}{360}z^2+\cdots.$$

であることからも分かる。(今年度は説明しなかったが、教科書には冪級数の逆数の計算の仕方が説明されていて、それを使えば $\dfrac{z}{\sin z}=\dfrac{1}{(\sin z)/z}=\dfrac{1}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots}$ の冪級数展開の最初の 3 項 $1+\frac{1}{6}z^2+\frac{7}{360}z^4+\cdots$ が得られ、それを z^2 で割って上の Laurent 展開の出だしの 3 項が得られる。) ■

解答 129. $(z-c)^k f(z)$ を $g(z)$ とおくと、c は g の除去可能特異点になって、g は c の近傍で正則で、Taylor 展開の係数は $g^{(n)}(c)/n!$ で得られる。それは (番号がずれているけれど) f の Laurent 展開の係数だ、という話である。
(解答) 仮定から $(\exists R>0)$ $(\exists\{a_n\}_{n\geq -k})$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}a_n(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(0<|z-c|<R).$$

このとき

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{-k+n}(z-c)^n\quad(0<|z-c|<R)$$

とおくと、$g\colon D(c;R)\to\mathbb{C}$ は正則で、$g(z)=(z-c)^k f(z)$ $(0<|z-c|<R)$. $b_n:=a_{-k+n}$ とおくと、$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ であり、Taylor 展開に関する良く知られた定理から、

$$b_n=\frac{g^{(n)}(c)}{n!}\quad (n\ge 0).$$

ゆえに $n\ge 0$ に対して

$$a_{-k+n}=\frac{g^{(n)}(c)}{n!}=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^n g(z)\Big|_{z=c}=\frac{1}{n!}\lim_{\substack{z\ne c\\ z\to c}}\left(\frac{d}{dz}\right)^n g(z)=\frac{1}{n!}\lim_{\substack{z\ne c\\ z\to c}}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

言い換えると $n\ge -k$ に対して

$$a_n=\frac{1}{(n+k)!}\lim_{\substack{z\ne c\\ z\to c}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n+k}\left[(z-c)^k f(z)\right].\blacksquare$$

解答 130.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<R_1),$$
$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<R_2)$$

であれば

$$f(z)+g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}+b_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<\min\{R_1,R_2\})$$

であるから、

$$\operatorname{Res}(f+g;c)=a_{-1}+b_{-1}=\operatorname{Res}(f;c)+\operatorname{Res}(g;c)$$

である。同様に

$$\operatorname{Res}(\lambda f;c)=\lambda\operatorname{Res}(f;c)$$

も導ける。

(1)

$$\operatorname{Res}(f(z)+\cos z;c)=\operatorname{Res}(f(z);c)+\operatorname{Res}(\cos z;c)=a_{-1}+0=a_{-1}.$$

(2)

$$\operatorname{Res}(3f(z);c)=3\operatorname{Res}(f(z);c)=3a_{-1}.\blacksquare$$

解答 131. 0 の近傍で正則な関数の Taylor 展開は、f が偶関数ならば偶数次の項だけからなり、f が奇関数ならば奇数次の項だけからなることを知っていると思うが、それと同様のことが成り立つ。
(解答) f が $0<|z|<R$ で正則であるから、ある $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が存在して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}\quad (0<|z|<R).$$

仮定 $f(-z)=f(z)$ より

$$f(z)=f(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-z)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(-z)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-1)^n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_{-n}}{z^n}\quad (0<|z|<R).$$

Laurent 展開の係数の一意性から

$$(\forall n\in\mathbb{Z})\quad a_n=(-1)^n a_n.$$

これから n が奇数のとき $a_n = 0$ が成り立つ。特に $a_{-1} = 0$ であるから、

$$\operatorname{Res}(f; c) = a_{-1} = 0. \blacksquare$$

解答 132. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が正則で、c が f の 1 位の極であるとすると、$\Omega \cup \{c\}$ で正則な関数 g が存在して

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-c} \quad (z \in \Omega \setminus \{c\}).$$

φ が c の近傍 U で正則とすると、

$$\varphi(z) f(z) = \frac{\varphi(z) g(z)}{z-c} \quad (z \in (\Omega \cap U) \setminus \{c\}).$$

φg は $\Omega \cap U$ で正則であるから、c は φf の高々 1 位の極である。ゆえに

$$\operatorname{Res}(\varphi f; c) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} (z-c)\varphi(z) f(z) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \varphi(z) \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} (z-c) f(z) = \varphi(c) \operatorname{Res}(f; c) = \varphi(c) a_{-1}. \blacksquare$$

極 c の位数が一般の $k \in \mathbb{N}$ とした場合は、次のようになる。$\Omega \cup \{c\}$ で正則な関数 g が存在して

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (z \in \Omega \setminus \{c\}).$$

φ が c の近傍 U で正則とすると、

$$\varphi(z) f(z) = \frac{\varphi(z) g(z)}{(z-c)^k} \quad (z \in (\Omega \cap U) \setminus \{c\}).$$

φg は $\Omega \cap U$ で正則であるから、c は φf の高々 k 位の極である。ゆえに

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(\varphi f; c) &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \left[(z-c)^k \varphi(z) f(z)\right] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} [\varphi(z) g(z)] \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \varphi^{(k-1-r)}(z) g^{(r)}(z) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \varphi^{(k-1-r)}(c) g^{(r)}(c).
\end{aligned}$$

$g^{(0)}(c) = g(c) = a_{-1}$ だけでなく、k 個の係数が必要になるわけである。$\blacksquare$

解答 133.

(1) $P(z) := \sin \pi z$, $Q(z) := \pi \cos \pi z$, $f(z) := Q(z)/P(z) = \pi \cot \pi z$ とおく。$P(z) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. $z = n\pi$. $P'(z) = \pi \cos \pi z = Q(z)$. $P'(n) = Q(n) = \pi \cos n\pi = (-1)^n \pi \neq 0$. ゆえに f の極は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、その位数は 1, 留数は $\operatorname{Res}(f; n) = \dfrac{Q(n)}{P'(n)} = \dfrac{Q(n)}{Q(n)} = 1$.

(2) (これは **92** ですね) f は c を 1 位の極に持つので、$\operatorname{Res}(f; c) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} (z-c) f(z)$. また g は c の近傍で正則なので、特に連続で、$\lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} g(z) = g(c)$. c は fg の高々 1 位の極であるから、

$$\operatorname{Res}(fg; c) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} [(z-c) f(z) g(z)] = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} g(z) \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} (z-c) f(z) = g(c) \operatorname{Res}(f; c).$$

(3) 留数定理を用いればよい。$|z| = 5/2$ の囲む範囲にある f の極は $0, \pm 1, \pm 2$. $|z| = 5$ の上に f の極はない。$g(z) = z^2$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=5/2} z^2 \pi \cot \pi z \, dz &= \int_{|z|=5/2} f(z) g(z) \, dz = 2\pi i \sum_{|c|<5/2} \operatorname{Res}(fg; c) = 2\pi i \sum_{n=-2}^{2} \operatorname{Res}(fg; n) \\
&= 2\pi i \sum_{n=-2}^{2} g(n) \operatorname{Res}(f; n) = 2\pi i \sum_{n=-2}^{2} n^2 \cdot 1 = 2\pi i (4 + 2 + 0 + 2 + 4) = 20\pi i. \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 134. (準備中)

解答 135. (準備中)

解答 136. (準備中)

解答 137. (1) $\dfrac{\pi}{a}$ (2) $\dfrac{\pi}{a^3\sqrt{2}}$ (3) $\dfrac{\pi}{2a^3}$ (4) $\dfrac{2\pi}{3a^5}$ (5) $\dfrac{\pi}{16a^3}$ (6) $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{64a^9}$ (7) $\dfrac{\pi(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n-2)!!}$
(注: $n!! = n(n-2)\cdots 2$ (n : 偶数), $n!! = n(n-2)\cdots 5\cdot 3$ (n: 奇数)) (8) $\dfrac{\pi}{na^{2n-1}\sin\dfrac{\pi}{2n}}$

解答 138. (1) $\dfrac{\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$ (2) $\dfrac{5\pi}{12}$ (3) $\dfrac{\pi}{16\,|a|^3}$ (4) $\dfrac{\pi}{4}$ (5) $\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$

解答 139. (講義ノートを見て下さい。)

解答 141. (1) $\dfrac{\pi e^{-a\alpha}}{a}$ (2) $\pi e^{-a\alpha}/2$ (3) $\dfrac{\pi(1+a\alpha)e^{-a\alpha}}{2a^3}$ (4) $\dfrac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}a^3}\left(\cos\dfrac{a\alpha}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{a\alpha}{\sqrt{2}}\right)$
(5) $\dfrac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{a^2}\sin\dfrac{ab}{\sqrt{2}}$

解答 142. (1) $\dfrac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (2) $\dfrac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (3) $\dfrac{2\pi}{ab}$ (4) $\dfrac{2\pi}{3}$ (5) $\dfrac{2\pi}{R^2-r^2}$ (6) 1 (7) $\dfrac{2\pi(R^2+r^2)}{(R^2-r^2)^3}$
(8) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (9) $I=\dfrac{2\pi}{R^2-r^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^m$, $J=0$ (10) $I=\dfrac{2\pi a^n}{n!}$, $J=0$

解答 143. (準備中)

解答 144. (準備中)

解答 145. (準備中)