# 3.2.5 例　特にマスターして欲しい例

## 例 11.19

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$ (実は $\sin z$ の Taylor 展開だがそのことは使わない)。

$$c=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n\text{ は奇数, }k\text{ を }n=2k+1\text{ で定めて})\\ 0 & (n\text{ は偶数}).\end{cases}$$

$a_n=0$ となる $n$ が無限個あるので、d'Alembert の公式は直接は使えない。

$\zeta := z^2$ とおくと [a]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k.$$

[a] 共通因数 $z$ をくくり出したわけだが、「一般に級数の一般項に (0 以外の) 定数をかけることで収束発散は変わらない」ことに注意すると、収束する場合も、収束しない場合も正しいことが分かる。

## 例 11.19 (つづき)

そこで

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k$$

の収束発散が問題となる。

$$b_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(\star)$ の収束半径は $+\infty$. ゆえに $(\star)$ は任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して収束する。

ゆえに元の級数は、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに $\rho = +\infty$. また収束円は $\mathbb{C}$.