信号処理とフーリエ変換 第1回

〜ガイダンス, Fourier 級数概観〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/

2022年9月21日

目次

自己紹介

- 桂田 祐史 (かつらだ まさし)
- 専門は数値解析 (数値計算法の数理の関数解析的研究)
- 研究室は高層棟 910 号室
- 質問・相談はメールでも可
  (メールアドレスは `katurada` あっと `meiji` どっと `ac` ドット `jp`)
- 授業 WWW サイト
  `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/`
  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/` (障害時用のミラー)

この科目の内容・連絡事項

広い意味の Fourier 変換 (Fourier 級数も含む) による解析 (Fourier 解析) を説明する。

この科目の内容・連絡事項

広い意味の Fourier 変換 (Fourier 級数も含む) による解析 (Fourier 解析) を説明する。

Fourier 解析は、大学のほとんどの理工系の学科で講義されているが、具体的な内容については、かなりの違いがある。この科目で何をするかは、シラバス、講義ノート、過去問を見ると良い (「複素関数」と比べると、割と真面目にシラバスを書いています。)。

この科目の内容・連絡事項

広い意味の Fourier 変換 (Fourier 級数も含む) による解析 (Fourier 解析) を説明する。

Fourier 解析は、大学のほとんどの理工系の学科で講義されているが、具体的な内容については、かなりの違いがある。この科目で何をするかは、シラバス、講義ノート、過去問を見ると良い (「複素関数」と比べると、割と真面目にシラバスを書いています。)。

「数学とメディア」(Fourier 解析入門) を履修していることを前提にして講義を進める。何か特別な事情でこちらだけを履修する場合は、特に Fourier 級数の部分を自習 (問題演習) すること。

この科目の内容・連絡事項

広い意味の Fourier 変換 (Fourier 級数も含む) による解析 (Fourier 解析) を説明する。

Fourier 解析は、大学のほとんどの理工系の学科で講義されているが、具体的な内容については、かなりの違いがある。この科目で何をするかは、シラバス、講義ノート、過去問を見ると良い (「複素関数」と比べると、割と真面目にシラバスを書いています。)。

「数学とメディア」(Fourier 解析入門) を履修していることを前提にして講義を進める。何か特別な事情でこちらだけを履修する場合は、特に Fourier 級数の部分を自習 (問題演習) すること。

数学科では、Fourier 解析の講義科目は、もっと上の学年に配置されて、例としても微分方程式への応用が多い。ここでは例として信号処理を多く取り上げる。

この科目の内容・連絡事項

広い意味の Fourier 変換 (Fourier 級数も含む) による解析 (Fourier 解析) を説明する。

Fourier 解析は、大学のほとんどの理工系の学科で講義されているが、具体的な内容については、かなりの違いがある。この科目で何をするかは、シラバス、講義ノート、過去問を見ると良い (「複素関数」と比べると、割と真面目にシラバスを書いています。)。

「数学とメディア」(Fourier 解析入門) を履修していることを前提にして講義を進める。何か特別な事情でこちらだけを履修する場合は、特に Fourier 級数の部分を自習 (問題演習) すること。

数学科では、Fourier 解析の講義科目は、もっと上の学年に配置されて、例としても微分方程式への応用が多い。ここでは例として信号処理を多く取り上げる。

演習は各自でやって下さい。練習問題を用意してある (略解つき)。過去問と講義ノートを見て対策しよう。

この科目の内容・連絡事項

広い意味の Fourier 変換 (Fourier 級数も含む) による解析 (Fourier 解析) を説明する。

Fourier 解析は、大学のほとんどの理工系の学科で講義されているが、具体的な内容については、かなりの違いがある。この科目で何をするかは、シラバス、講義ノート、過去問を見ると良い (「複素関数」と比べると、割と真面目にシラバスを書いています。)。

「数学とメディア」(Fourier 解析入門) を履修していることを前提にして講義を進める。何か特別な事情でこちらだけを履修する場合は、特に Fourier 級数の部分を自習 (問題演習) すること。

数学科では、Fourier 解析の講義科目は、もっと上の学年に配置されて、例としても微分方程式への応用が多い。ここでは例として信号処理を多く取り上げる。

演習は各自でやって下さい。練習問題を用意してある (略解つき)。過去問と講義ノートを見て対策しよう。

収束の議論はほどほどにとどめる (現時点でちゃんとやるのは無理だから)。

この科目の内容・連絡事項

広い意味の Fourier 変換 (Fourier 級数も含む) による解析 (Fourier 解析) を説明する。

Fourier 解析は、大学のほとんどの理工系の学科で講義されているが、具体的な内容については、かなりの違いがある。この科目で何をするかは、シラバス、講義ノート、過去問を見ると良い (「複素関数」と比べると、割と真面目にシラバスを書いています。)。

「数学とメディア」(Fourier 解析入門) を履修していることを前提にして講義を進める。何か特別な事情でこちらだけを履修する場合は、特に Fourier 級数の部分を自習 (問題演習) すること。

数学科では、Fourier 解析の講義科目は、もっと上の学年に配置されて、例としても微分方程式への応用が多い。ここでは例として信号処理を多く取り上げる。

演習は各自でやって下さい。練習問題を用意してある (略解つき)。過去問と講義ノートを見て対策しよう。

収束の議論はほどほどにとどめる (現時点でちゃんとやるのは無理だから)。

学期中に 3 回のレポートを課し (30%)、最後に期末試験 (70%) をする予定である。

この科目の内容・連絡事項

広い意味の Fourier 変換 (Fourier 級数も含む) による解析 (Fourier 解析) を説明する。

Fourier 解析は、大学のほとんどの理工系の学科で講義されているが、具体的な内容については、かなりの違いがある。この科目で何をするかは、シラバス、講義ノート、過去問を見ると良い (「複素関数」と比べると、割と真面目にシラバスを書いています。)。

「数学とメディア」(Fourier 解析入門) を履修していることを前提にして講義を進める。何か特別な事情でこちらだけを履修する場合は、特に Fourier 級数の部分を自習 (問題演習) すること。

数学科では、Fourier 解析の講義科目は、もっと上の学年に配置されて、例としても微分方程式への応用が多い。ここでは例として信号処理を多く取り上げる。

演習は各自でやって下さい。練習問題を用意してある (略解つき)。過去問と講義ノートを見て対策しよう。

収束の議論はほどほどにとどめる (現時点でちゃんとやるのは無理だから)。

学期中に 3 回のレポートを課し (30%)、最後に期末試験 (70%) をする予定である。

(Fourier 級数は別にして) 計算は人手では大変なので、なるべくコンピューターに任せよう、コンピューターを使えるようになろう、という方針でやっている。個々の概念の定義と、どういう定理が成り立つかを理解するのが大事である。その次は自分でプログラムを書けるように、かな。

Fourier 解析の大まかな歴史 (1) Fourier (1768–1830, フランス)

「熱の解析的理論」 (1809, 1812, 1822 [1]) を著した。

Fourier 解析の大まかな歴史 (1) Fourier (1768–1830, フランス)

「熱の解析的理論」 (1809, 1812, 1822 [1]) を著した。

熱伝導現象の数理モデル (**熱方程式**) を提示した。

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \triangle u \tag{1}$$

$$u = u(x,t) = u(x_1,x_2,x_3,t), \quad \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Fourier 解析の大まかな歴史 (1) Fourier (1768–1830, フランス)

「熱の解析的理論」 (1809, 1812, 1822 [1]) を著した。

熱伝導現象の数理モデル (**熱方程式**) を提示した。

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \triangle u \tag{1}$$

$$u = u(x,t) = u(x_1, x_2, x_3, t), \quad \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Fourier 級数、Fourier 変換、Fourier の変数分離法を導入して、熱伝導問題を解いた。

多くの微分方程式 (例えば波動方程式) がこの方法で解ける。

解析学の大革命 (解析が息を吹き返す)。今では解析学の背骨。

17C 後半〜18C	19C	20C
微積分 (Newton, Leibniz 他, Euler)	Fourier 解析 複素関数論	関数解析 コンピュータ

表 1: 解析学の発展 (独断と偏見による)

注: 微分方程式はずっと問題とされている

Fourier 解析の大まかな歴史 (2) Shannon, FFT

Claude Elwood Shannon (1916–2001)

- 「通信の数学的理論」(1948) [2] (翻訳 [3] がある) を著した。
- 情報のエントロピー, bit, サンプリング定理

Fourier 解析の大まかな歴史 (2) Shannon, FFT

Claude Elwood Shannon (1916–2001)

- 「通信の数学的理論」(1948) [2] (翻訳 [3] がある) を著した。
- 情報のエントロピー, bit, サンプリング定理

FFT (Fast Fourier Transform, 高速 Fourier 変換)

- 離散 Fourier 変換の非常に高速なアルゴリズム
- Cooley-Tukey (1965) [4]

$\Rightarrow$ **信号処理に応用されるようになった**

定理 1.1 (本当は定理もどき)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数で、ある程度の滑らかさを持つとする。このとき

(2) $$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

(3) $$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で $\{a_n\}_{n\ge 0}$, $\{b_n\}_{n\ge 1}$ を定めると、級数

(4)
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) := \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

はある意味で収束し、$f(x)$ に等しい。すなわち

(5) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1.1.1 実 Fourier 級数

「ある程度の滑らかさ」、「ある意味で」は曖昧なので (この後に少し説明する)、厳密には定理じゃない。

1.1.1 実 Fourier 級数

「ある程度の滑らかさ」、「ある意味で」は曖昧なので (この後に少し説明する)、厳密には定理じゃない。

- a_n, b_n を f の **Fourier 係数**
- (4) を f の **Fourier 級数**
- (5) を f の **Fourier 級数展開**

という。

1.1.1 実 Fourier 級数

「ある程度の滑らかさ」、「ある意味で」は曖昧なので (この後に少し説明する)、厳密には定理じゃない。

- a_n, b_n を f の **Fourier 係数**
- (4) を f の **Fourier 級数**
- (5) を f の **Fourier 級数展開**

という。

注意 1.2

- (4) の収束も、(5) の等式成立も無条件では成り立たない。
- 関数列であるため、数列とは異なり、複数の種類の収束が定義される (有限次元空間での極限を扱う「数学解析」の守備範囲外！)。すぐ後で、代表的なものを紹介する。おおざっぱに言って、f の「滑らかさ (何回微分可能であるかとか)」が強いと良い収束をする。

1.1.2 複素 Fourier 級数

三角関数でなく、複素指数関数を使ったバージョンもある (見かけが違うだけ)。

定理 1.3 (本当は定理もどき)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数で、ある程度の滑らかさを持つとする。このとき

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6}$$

で $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定めると、級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{7}$$

はある意味で収束し、$f(x)$ に等しい。すなわち

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{8}$$

念のため: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 数学的にはまったく同等

問 a_n, b_n, c_n を上の式で定めたとき

1. $n \in \mathbb{N}$ ならば

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right), \quad c_0 = \frac{1}{2}a_0.$$

また

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad a_0 = 2c_0,$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

2. f が実数値であれば

$$a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad c_{-n} = \overline{c_n} \quad (\text{特に } c_0 \in \mathbb{R}),$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\, c_n, \quad b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n.$$

(1) の前半部分は、「練習問題」問 10 で、解答を載せてある。

1.1.3 実 Fourier 級数 vs. 複素 Fourier 級数

大事なことを言っておく。

複素指数関数バージョンに慣れること

なぜか？

1.1.3 実 Fourier 級数 vs. 複素 Fourier 級数

大事なことを言っておく。

複素指数関数バージョンに慣れること

なぜか？

1. 式を簡潔に書くことは意外に大事なこと。

大事なことを言っておく。

複素指数関数バージョンに慣れること

なぜか?

1. 式を簡潔に書くことは意外に大事なこと。
2. この科目に登場する他の Fourier 変換では (Fourier 級数も含めて、全部で 4 種類の Fourier 変換が登場する)、複素指数関数バージョンで説明する。

大事なことを言っておく。

複素指数関数バージョンに慣れること

なぜか？

1. 式を簡潔に書くことは意外に大事なこと。
2. この科目に登場する他の Fourier 変換では (Fourier 級数も含めて、全部で 4 種類の Fourier 変換が登場する)、複素指数関数バージョンで説明する。
3. コンピューターを使う場合もそう。

1.1.4 バリエーション (1) 一般の周期

(実際の応用で重要、分かれば簡単なこと、慣れるように心がける)

1.1.4 バリエーション (1) 一般の周期

(実際の応用で重要、分かれば簡単なこと、慣れるようにに心がける)

積分の範囲

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}$ は $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}$ でも同じである。見かけ上の違いにすぎない。

(被積分関数は周期 2π なので、$(\forall c \in \mathbb{R})$ $\displaystyle\int_{c-\pi}^{c+\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}$ だから。)

1.1.4 バリエーション (1) 一般の周期

(実際の応用で重要、分かれば簡単なこと、慣れるように心がける)

積分の範囲

$\int_{-\pi}^{\pi}$ は $\int_{0}^{2\pi}$ でも同じである。見かけ上の違いにすぎない。

(被積分関数は周期 2π なので、$(\forall c \in \mathbb{R})$ $\int_{c-\pi}^{c+\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}$ だから。)

一般の周期

周期が (2π でなくて) 一般の正の数 T である場合も、似たような級数で展開できる。

1.1.4 バリエーション (1) 一般の周期

(実際の応用で重要、分かれば簡単なこと、慣れるようにに心がける)

積分の範囲

$\int_{-\pi}^{\pi}$ は $\int_{0}^{2\pi}$ でも同じである。見かけ上の違いにすぎない。

(被積分関数は周期 2π なので、$(\forall c \in \mathbb{R})$ $\int_{c-\pi}^{c+\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}$ だから。)

一般の周期

周期が (2π でなくて) 一般の正の数 T である場合も、似たような級数で展開できる。実際、$\cos nx$, $\sin nx$, e^{inx} の代わりに

$$\cos\frac{2n\pi}{T}x, \quad \sin\frac{2n\pi}{T}x, \quad \exp\left(i\frac{2n\pi}{T}x\right) \quad (T = 2\pi \text{ のとき}\cdots)$$

を使って

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right),$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx.$$

係数を表す公式は、後で簡単な求め方を紹介する (丸暗記しないことを勧める!)。

奇関数・偶関数

$$f\text{ が奇関数} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = -f(x).$$
$$f\text{ が偶関数} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = f(x).$$

奇関数・偶関数

$$f \text{ が奇関数} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = -f(x).$$

$$f \text{ が偶関数} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = f(x).$$

$n \in \mathbb{Z}$ とするとき、$f(x) = x^n$ は、n が奇数ならば奇関数, n が偶数ならば偶関数である。

奇関数・偶関数

$$f \text{ が奇関数} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = -f(x).$$

$$f \text{ が偶関数} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = f(x).$$

$n \in \mathbb{Z}$ とするとき、$f(x) = x^n$ は、n が奇数ならば奇関数, n が偶数ならば偶関数である。

$\cos x$ は偶関数、より一般に $\cos nx$ は偶関数である ($n = 0, 1, \cdots$)。
$\sin x$ は奇関数、より一般に $\sin nx$ は奇関数である ($n = 1, 2, \cdots$)。

1.1.5 バリエーション (2) 正弦級数展開, 余弦級数展開

命題 1.4 (Fourier 正弦級数展開, Fourier 余弦級数展開)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 周期 2π, ある程度滑らかとする。

1. f が奇関数ならば、

1.1.5 バリエーション (2) 正弦級数展開, 余弦級数展開

命題 1.4 (Fourier 正弦級数展開, Fourier 余弦級数展開)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 周期 2π, ある程度滑らかとする。

1. f が奇関数ならば、$a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. さらに

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1.1.5 バリエーション (2) 正弦級数展開, 余弦級数展開

命題 1.4 (Fourier 正弦級数展開, Fourier 余弦級数展開)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 周期 2π, ある程度滑らかとする。

1. f が奇関数ならば、$a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. さらに

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. f が偶関数ならば、$b_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. さらに

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad (n = 0, 1, \cdots).$$

1.1.5 バリエーション (2) 正弦級数展開, 余弦級数展開

命題 1.4 (Fourier 正弦級数展開, Fourier 余弦級数展開)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 周期 2π, ある程度滑らかとする。

1. f が奇関数ならば、$a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. さらに

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. f が偶関数ならば、$b_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. さらに

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad (n = 0, 1, \cdots).$$

証明の要点　奇 $\times$ 奇 $=$ 偶, 偶 $\times$ 偶 $=$ 偶, 偶 $\times$ 奇 $=$ 奇, $\int_{-a}^{a}$ 奇 $dx = 0$,
$\int_{-a}^{a}$ 偶 $dx = 2 \int_0^a$ 偶 dx.

1.1.5 バリエーション (2) 正弦級数展開, 余弦級数展開

命題 1.4 (Fourier 正弦級数展開, Fourier 余弦級数展開)

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 周期 2π, ある程度滑らかとする。

1. f が奇関数ならば、$a_n = 0\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$. さらに

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (x\in\mathbb{R}), \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad (n\in\mathbb{N}).$$

2. f が偶関数ならば、$b_n = 0\ (n = 1, 2, \cdots)$. さらに

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (x\in\mathbb{R}), \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad (n = 0, 1, \cdots).$$

証明の要点　奇 $\times$ 奇 $=$ 偶, 偶 $\times$ 偶 $=$ 偶, 偶 $\times$ 奇 $=$ 奇, $\displaystyle\int_{-a}^{a}$ 奇 $dx = 0$,

$$\int_{-a}^{a} \text{偶}\, dx = 2\int_0^a \text{偶}\, dx.$$

注意　周期 T の周期関数でも同様のことが成り立つ。

1.1.6 バリエーション (3) 周期関数でなくても使える

関数が周期関数であることは、絶対必要というわけではない。

1.1.6 バリエーション (3) 周期関数でなくても使える

関数が周期関数であることは、絶対必要というわけではない。

$f\colon (-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$ に対して、

1.1.6 バリエーション (3) 周期関数でなくても使える

関数が周期関数であることは、絶対必要というわけではない。

$f\colon (-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$ に対して、

$$\widetilde{f}(x) := f(y) \quad (x \in \mathbb{R} \text{ に対して } y \in (-T/2, T/2],\ x \equiv y \pmod{T})$$

で定義される $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は、周期 T の周期関数である ($\widetilde{f}$ は f の周期的拡張)。ゆえに

1.1.6 バリエーション (3) 周期関数でなくても使える

関数が周期関数であることは、絶対必要というわけではない。

$f\colon (-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$ に対して、

$$\widetilde{f}(x) := f(y) \quad (x \in \mathbb{R} \text{ に対して } y \in (-T/2, T/2],\ x \equiv y \pmod{T})$$

で定義される $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は、周期 T の周期関数である ($\widetilde{f}$ は f の周期的拡張)。ゆえに

$$\widetilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \widetilde{f}(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \widetilde{f}(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx$$

が成り立つ。

1.1.6 バリエーション (3) 周期関数でなくても使える

関数が周期関数であることは、絶対必要というわけではない。

$f\colon (-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$ に対して、

$$\widetilde{f}(x) := f(y) \quad (x \in \mathbb{R} \text{ に対して } y \in (-T/2, T/2],\ x \equiv y \pmod{T})$$

で定義される $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は、周期 T の周期関数である ($\widetilde{f}$ は f の周期的拡張)。ゆえに

$$\widetilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \widetilde{f}(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \widetilde{f}(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx$$

が成り立つ。$(-T/2, T/2]$ で $\widetilde{f}$ は f に一致するので

1.1.6 バリエーション (3) 周期関数でなくても使える

関数が周期関数であることは、絶対必要というわけではない。

$f\colon(-T/2,T/2]\to\mathbb{C}$ に対して、

$$\widetilde{f}(x):=f(y)\quad (x\in\mathbb{R} \text{ に対して } y\in(-T/2,T/2],\ x\equiv y \pmod{T})$$

で定義される $\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は、周期 T の周期関数である ($\widetilde{f}$ は f の周期的拡張)。ゆえに

$$\widetilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)\quad(x\in\mathbb{R}),$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\widetilde{f}(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\widetilde{f}(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx$$

が成り立つ。$(-T/2,T/2]$ で $\widetilde{f}$ は f に一致するので

$$\text{(9a)}\qquad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)\quad(x\in(-T/2,T/2]),$$

$$\text{(9b)}\qquad a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx.$$

この話の偶関数、奇関数バージョンもある。また、$f\colon[0,T]\to\mathbb{C}$ のときは、$\int_0^T$ とすれば良い。

1.1.7 バリエーション (4) $[0, L]$ で定義された関数の余弦級数展開、正弦級数展開

次のことを示せ。

$f\colon [0, L] \to \mathbb{C}$ はある程度滑らかとする。

1.
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

とおくとき

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \quad (x \in [0, L]).$$

2. $f(0) = f(L) = 0$ が成り立つならば

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

とおくとき

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad (x \in [0, L]).$$

1.1.7 バリエーション (4) $[0, L]$ で定義された関数の余弦級数展開、正弦級数展開

解

$$f_e(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in [0, L]) \\ f(-x) & (x \in (-L, 0)), \end{cases} \qquad f_o(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in [0, L]) \\ -f(-x) & (x \in (-L, 0)) \end{cases}$$

とおくと、$f_e, f_o \colon (-L, L] \to \mathbb{C}$ はそれぞれ偶関数、奇関数である。f_e, f_o のそれぞれに (3) で述べたことを用いると

$$a_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_e(x)\cos\frac{2n\pi x}{2L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

$$b_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_o(x)\sin\frac{2n\pi x}{2L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくと

$$f_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{2L}, \quad f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi x}{2L} \quad (x \in (-L, L]).$$

$[0, L]$ では f_e も f_o も f に等しいので

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad (x \in [0, L]).$$

自習の手引き　授業WWWサイトの利用

授業WWWサイト

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/

に

- 講義ノート https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/fourier-lecture-notes.pdf
- 「練習問題」(略解つき) https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/fourier2022-ex.pdf
- 過去問

が置いてある。適宜参考にすること。

自習の手引き　授業WWWサイトの利用

授業 WWW サイト

`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/`

に

- 講義ノート `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/fourier-lecture-notes.pdf`
- 「練習問題」(略解つき) `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/fourier2022-ex.pdf`
- 過去問

が置いてある。適宜参考にすること。

例えば、今回の授業について、「練習問題」から

- 問 6 「以下の関数 f を区間 $[-\pi,\pi]$ で Fourier 級数に展開せよ。(2) $f(x)=x^2$ $(-\pi\le x\le\pi)$」は、次回の授業に関係あるので、それを解いてみるとか。
- 問 8 (周期 T の関数の Fourier 級数展開)

自習の手引き　参考書

残念ながら、1 冊で、この科目全般の参考になるような本は多くないです (木村 [5] は近いけれど新刊は購入できない)。

前半部分の Fourier 級数、(普通の) Fourier 変換は、比較的オーソドックスな内容なので、書名に「フーリエ解析」を含む本の多くが参考になると思われます。シラバスに掲載した参考書 (大石 [6], 木村 [5] などなど) は、図書館に所蔵されているはずなので、参考にして下さい。

最近出版された倉田 [7] も追加しておきます。

参考文献 I

[1] フーリエ著, 西村 重人翻訳, 高瀬 正仁翻訳, 監修, 解説：フーリエ 熱の解析的理論, 朝倉書店 (2019/10/15).

[2] Shannon, C. E.: A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, No. 3, pp. 379–423 (1948), `https://people.math.harvard.edu/~ctm/home/text/others/shannon/entropy/entropy.pdf` で読める.

[3] クロード・E. シャノン：通信の数学的理論, 筑摩書房 (2009), 1948 年の論文 [2] の翻訳. ワレン ウィーバー (解説), 植松 友彦 (翻訳, 解説).

[4] Cooley, J. W. and Tukey, J. W.: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Mathematics of Computation*, Vol. 19, No. 90, pp. 297–301 (1965), `http://www.ams.org/journals/mcom/1965-19-090/S0025-5718-1965-0178586-1/S0025-5718-1965-0178586-1.pdf` で公開されている。

参考文献 II

[5] 木村英紀（ひでのり）：Fourier-Laplace 解析, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1993), 2007/01/18 に「フーリエーラプラス解析」という単項本になったけれど品切れ状態.

[6] 大石進一：フーリエ解析, 岩波書店 (1989).

[7] 倉田和浩：フーリエ解析の基礎と応用, 数理工学社 (2020/7/10).