信号処理とフーリエ変換 第3回

〜 Fourier 級数の収束 (続き), 直交性 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/

2022 年 10 月 5 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 今回は、主に講義ノート [1] の §1.3 の部分 (直交性) の内容を講義します。

本日の内容・連絡事項

- 今回は、主に講義ノート [1] の §1.3 の部分 (直交性) の内容を講義します。
- 前回、Mathematica を使いました。(レポート課題 1 の半分くらいは前回やったことと同じような内容なので) 自分の Mac で Mathematica を整備して、例に出したプログラムが動くようにしておいて下さい。

1.2.3 やり残し: 3 つの収束の強弱

1.2.3 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \le \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

1.2.3 やり残し: 3 つの収束の強弱

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \leq \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

1.2.3 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \le \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx &\le \int_a^b \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx \\ &= \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

1.2.3 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \le \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx &\le \int_a^b \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx \\ &= \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (この後に紹介する例 1)。

1.2.3 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \le \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a,b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \le \int_a^b \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx$$
$$= \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b-a) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (この後に紹介する例 1)。
- 各点収束しても L^p 収束するとは限らない (例 2)。

1.2.3 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \le \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a,b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

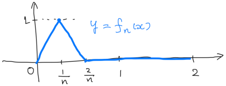
$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \le \int_a^b \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx$$
$$= \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b-a) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (この後に紹介する例 1)。
- 各点収束しても L^p 収束するとは限らない (例 2)。
- (これは説明を省略する) L^p 収束すれば、ある部分列が存在して、ほとんどいたるところ各点収束する (伊藤 [2])。

以下の例の説明はカットする。

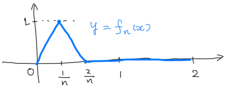
1.2.3 3つの収束の強弱　例 1

$f_n \colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。



1.2.3 3つの収束の強弱　例1

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。

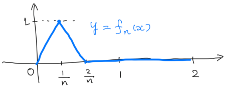


- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。

$$(\forall x \in [0,2]) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$ (なぜか考えてみよう。p. **??** で解説。).

1.2.3 3つの収束の強弱　例1

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。

$$(\forall x \in [0,2]) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

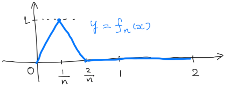
（なぜか考えてみよう。p. **??** で解説。).

- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、任意の p に対して定数関数 0 に L^p 収束する $(1 \le p < \infty)$。

$\because$ $0 \le f_n(x) \le 1$ であるから、$|f_n(x)|^p \le |f_n(x)|$ であるので

$$\int_0^2 |f_n(x) - 0|^p \, dx = \int_0^2 |f_n(x)|^p \, dx \le \int_0^2 |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n} \to 0.$$

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。



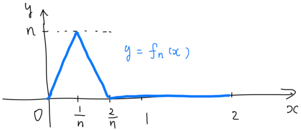
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。
$$(\forall x \in [0,2]) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$ (なぜか考えてみよう。p. **??** で解説。).

- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、任意の p に対して定数関数 0 に L^p 収束する $(1 \le p < \infty)$。
$\because$ $0 \le f_n(x) \le 1$ であるから、$|f_n(x)|^p \le |f_n(x)|$ であるので
$$\int_0^2 |f_n(x) - 0|^p \, dx = \int_0^2 |f_n(x)|^p \, dx \le \int_0^2 |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n} \to 0.$$

- しかし $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束しない。背理法で証明する。もしある f に一様収束するならば、f に各点収束するので、$f(x) = 0$.
$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = 1 \not\to 0 \quad (n \to \infty).$$

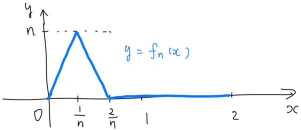
($\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各点収束するが一様収束しない。これは、Gibbs の現象に似ている。)

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



1.2.3 3つの収束の強弱　例 2

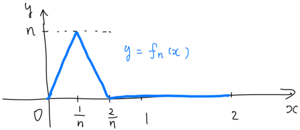
$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する (例 1 と同様)。

1.2.3 3つの収束の強弱　例2

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。

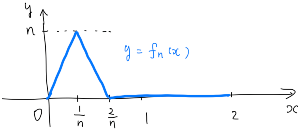


- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する (例 1 と同様)。
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は (やはり) 一様収束しない。もし f に一様収束するならば、$f = 0$ のはずであるが

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = n \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

1.2.3 3つの収束の強弱　例2

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する (例 1 と同様)。
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は (やはり) 一様収束しない。もし f に一様収束するならば、$f=0$ のはずであるが

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)-0| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = n \to +\infty \quad (n\to\infty).$$

- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は L^1 収束しない。実際 (f に L^1 収束するならば、実は $f=0$ であることがやはり分かるので)

$$\int_0^2 |f_n(x)-0|\,dx = \int_0^2 |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n = 1 \not\to 0 \quad (n\to\infty).$$

($1<p<\infty$ のとき $\displaystyle\int_0^2 |f(x)-0|^p\,dx = \frac{2n^{p-1}}{p+1} \to \infty$. ゆえに L^p 収束もしない。)

1.2.4 Fourier 級数の収束に関するお勧めの 3 つの定理

例 1 については次の定理がぴったりである。

定理 3.2 (連続かつ区分的に滑らかならば一様収束)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π, 連続かつ区分的に C^1 級ならば、f の Fourier 級数は f に一様収束する (ゆえに各点収束かつ任意の p に対して L^p 収束)。

1.2.4 Fourier 級数の収束に関するお勧めの 3 つの定理

例 1 については次の定理がぴったりである。

定理 3.2 (連続かつ区分的に滑らかならば一様収束)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π, 連続かつ区分的に C^1 級ならば、f の Fourier 級数は f に一様収束する (ゆえに各点収束かつ任意の p に対して L^p 収束)。

しかし、この定理は、例 2 には使えない。代わりに次の定理が使える。

定理 3.3 (区分的に滑らかならば各点収束)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π かつ区分的に C^1 級ならば、Fourier 級数は各点収束する。実際、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} f(x) & (f \text{ が } x \text{ で連続のとき}) \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & (f \text{ が } x \text{ で連続でないとき}). \end{cases}$$

ここで

$$f(x+0) = \lim_{y\to x+0} f(y) \quad (\text{右側極限}), \qquad f(x-0) = \lim_{y\to x-0} f(y) \quad (\text{左側極限}).$$

1.2.4 Fourier 級数の収束に関するお勧めの 3 つの定理

次の定理も紹介しておく (後で重要になる)。これも例 2 の関数に適用できる。

定理 3.4 (区分的に滑らかならば L^2 収束)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π かつ区分的に C^1 級ならば、f の Fourier 級数は f に L^2 収束する。すなわち

$$\int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x) - f(x)|^2 \, dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

実は「区分的に C^1 級」という条件は、f が $(-\pi, \pi)$ で 2 乗可積分 (そのことを $f \in L^2(-\pi, \pi)$ と書く)、すなわち Lebesgue 可測で $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < +\infty$ を満たす、というより弱い条件で置き換えることが出来る。次のように定理が 1 行で書ける。

$$f \in L^2(-\pi, \pi) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_{L^2} = 0.$$

直交性の話をする。実はすごく重要である。

直交性の話をする。実はすごく重要である。

- 他の Fourier 変換にも、しばしば直交性が現れる。
- 内積を使った処理・考え方に慣れるべき。早めに触れよう。
- Fourier 級数は、直交系による展開で、係数の公式 (定理**??**) は非常に広く一般的に成り立つ。ぜひともマスターしよう。
  (通常の Fourier 級数だけでなく、Fourier の方法に現れる固有関数による「一般の Fourier 級数展開」, 直交多項式による展開などでも、この公式で係数が求まる。)
- 内積から導かれるノルムによる収束が重要になる。

1.3 直交性　1.3.1 三角関数と指数関数の直交性

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。次は知っているはず。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}), \qquad (m = n \text{ でも OK})$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。次は知っているはず。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}), \quad (m = n \text{ でも OK})$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。次は知っているはず。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}), \quad (m = n \text{ でも OK})$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.

$\overline{e^{inx}}$ の $\overline{}$ は、共役複素数を表す記号である。

$$\overline{1 + 2i} = 1 - 2i, \quad \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。次は知っているはず。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}), \qquad (m = n \text{ でも OK})$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.

$\overline{e^{inx}}$ の $\overline{}$ は、共役複素数を表す記号である。

$$\overline{1+2i} = 1 - 2i, \quad \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.$$

注意: (1a), (1c) の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\mathbb{Z}$ で置き換えることは出来ない。(1b) の $\mathbb{N}$ を $\mathbb{Z}$ で置き換えることも出来ない。例えば $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos(-mx) dx = \pi \neq 0.$

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする[1]。

[1]最初から $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに $\mathbb{C}$ の場合はしばしば面倒になる。$\mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする [1]。

この講義では、周期 2π かつ区分的に C^1 級の関数の全体を考える。

$$X_{2\pi} = X_{2\pi,\mathbb{K}} := \left\{ f \;\middle|\; f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}\quad \text{周期 } 2\pi, \text{区分的に } C^1 \text{ 級} \right\}. \tag{2}$$

これは $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である (和 $f+g$, $c \in \mathbb{K}$ との積 cf が定義できる)。
$_{2\pi}$ は省略しない方が良い。

[1] 最初から $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに $\mathbb{C}$ の場合はしばしば面倒になる。$\mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする[1]。

この講義では、周期 2π かつ区分的に C^1 級の関数の全体を考える。

$$X_{2\pi} = X_{2\pi,\mathbb{K}} := \left\{ f \,\middle|\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad \text{周期 } 2\pi, \text{区分的に } C^1 \text{ 級} \right\}. \tag{2}$$

これは $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である (和 $f+g$, $c \in \mathbb{K}$ との積 cf が定義できる)。

$_{2\pi}$ は省略しない方が良い。

(本当は、二乗可積分関数の全体

$$L^2(-\pi,\pi) = \left\{ f \,\middle|\, f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{C} \text{ Lebesgue 可測かつ } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < +\infty \right\}$$

で話をしたい。そうすると、すっきりした完璧に近い議論が出来る。)

[1] 最初から $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに $\mathbb{C}$ の場合はしばしば面倒になる。$\mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

$$(3)\quad (f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ のときは } \overline{} \text{ がなくても同じ})$$

とおき、f と g の**内積** (L^2 内積) と呼ぶ。

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

(3)　$(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$　($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは $\overline{}$ がなくても同じ)

とおき、f と g の**内積** (L^2 内積) と呼ぶ。

(4)
$$\|f\| := \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx}$$

とおき、f の**ノルム** (L^2 ノルム, 長さ, 大きさ) とよぶ。

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

(3)　$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$　($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは $\overline{}$ がなくても同じ)

とおき、f と g の**内積** (L^2 内積) と呼ぶ。

(4)
$$\|f\| := \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx}$$

とおき、f の**ノルム** (L^2 ノルム, 長さ, 大きさ) とよぶ。

注意: 一般に $c \in \mathbb{C}$ に対して $c\bar{c} = |c|^2$ であるから $f(x)\overline{f(x)} = |f(x)|^2$

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$ ならば $(\cos mx, \cos nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ならば $(\sin mx, \sin nx) = 0$.
- $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ ならば $(\cos mx, \sin nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ ならば $\left(e^{imx}, e^{inx}\right) = 0$.

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m\neq n$ ならば $(\cos mx,\cos nx)=0$.
- $m,n\in\mathbb{N}$, $m\neq n$ ならば $(\sin mx,\sin nx)=0$.
- $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$ ならば $(\cos mx,\sin nx)=0$.
- $m,n\in\mathbb{Z}$, $m\neq n$ ならば $\left(e^{imx},e^{inx}\right)=0$.

ノルムについても調べておこう。

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad \|\cos nx\|=\|\sin nx\|=\sqrt{\pi},\quad \|\cos 0x\|=\|1\|=\sqrt{2\pi},$$
$$(\forall n\in\mathbb{Z})\quad \left\|e^{inx}\right\|=\sqrt{2\pi}.$$

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m,n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $m\ne n$ ならば $(\cos mx,\cos nx)=0$.
- $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ne n$ ならば $(\sin mx,\sin nx)=0$.
- $m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $n\in\mathbb{N}$ ならば $(\cos mx,\sin nx)=0$.
- $m,n\in\mathbb{Z}$, $m\ne n$ ならば $\left(e^{imx},e^{inx}\right)=0$.

ノルムについても調べておこう。

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad \|\cos nx\|=\|\sin nx\|=\sqrt{\pi},\quad \|\cos 0x\|=\|1\|=\sqrt{2\pi},$$
$$(\forall n\in\mathbb{Z})\quad \left\|e^{inx}\right\|=\sqrt{2\pi}.$$

例えば

$$\|\cos nx\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|^2dx}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx}=\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}.$$

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m,n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $m\ne n$ ならば $(\cos mx,\cos nx)=0$.
- $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ne n$ ならば $(\sin mx,\sin nx)=0$.
- $m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $n\in\mathbb{N}$ ならば $(\cos mx,\sin nx)=0$.
- $m,n\in\mathbb{Z}$, $m\ne n$ ならば $\left(e^{imx},e^{inx}\right)=0$.

ノルムについても調べておこう。

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad \|\cos nx\|=\|\sin nx\|=\sqrt{\pi},\quad \|\cos 0x\|=\|1\|=\sqrt{2\pi},$$
$$(\forall n\in\mathbb{Z})\quad \left\|e^{inx}\right\|=\sqrt{2\pi}.$$

例えば

$$\|\cos nx\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|^2dx}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx}=\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}.$$

「数学とメディア」を履修していない場合、履修したけれど自信がない人は、このスライドに書いてあることを自分で計算して確認することを勧める。

1.3 直交性　1.3.4 内積の公理

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.5 (L^2 内積が内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot, \cdot)$ は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

1. $(\forall f \in X)\ (f, f) \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0$.
2. $(\forall f, g \in X)\ (g, f) = \overline{(f, g)}$.
3. $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.5 (L^2 内積が内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot,\cdot)$ は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

(i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f, g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}$.

(iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)

細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「“ほとんどいたるところ” 0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.5 (L^2 内積が内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot,\cdot)$ は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

(i) $(\forall f \in X)$ $(f,f) \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f,g \in X)$ $(g,f) = \overline{(f,g)}$.

(iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)$ $(\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})$ $(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)

細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「"ほとんどいたるところ" 0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

この定理から次式が導かれる。

$$(5) \qquad (f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1}(f, g_1) + \overline{c_2}(f, g_2),$$

$$(6) \qquad \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + (f,g) + (g,f) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2 .$$

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.5 (L^2 内積が内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot,\cdot)$ は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

1. $(\forall f \in X)$ $(f,f) \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow$ $f = 0$.
2. $(\forall f, g \in X)$ $(g,f) = \overline{(f,g)}$.
3. $(\forall f_1, f_2, g \in X)$ $(\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})$ $(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)

細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「"ほとんどいたるところ" 0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

この定理から次式が導かれる。

$$(f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1}(f, g_1) + \overline{c_2}(f, g_2), \tag{5}$$

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + (f,g) + (g,f) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2 . \tag{6}$$

(注: $(g,f) = \overline{(f,g)}$, $c + \overline{c} = 2\,\mathrm{Re}\,c$ により $(f,g) + (g,f) = 2\,\mathrm{Re}(f,g)$)

定義 3.6 (内積空間)

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X と、$X \times X$ で定義された関数 $(\cdot,\cdot)$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(\cdot,\cdot)$ を X の**内積**、X を $\mathbb{K}$ 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

(i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \geq 0.$ 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0.$

(ii) $(\forall f, g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}.$

(iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g).$

定義 3.6 (内積空間)

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X と、$X \times X$ で定義された関数 $(\cdot,\cdot)$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(\cdot,\cdot)$ を X の**内積**、X を $\mathbb{K}$ 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

1. $(\forall f \in X)\ (f,f) \geq 0.$ 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0.$
2. $(\forall f, g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}.$
3. $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g).$

$X_{2\pi}$ は、((3) で定めた $(\,,\,)$ と合わせて) 内積空間である。

定義 3.6 (内積空間)

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X と、$X \times X$ で定義された関数 $(\cdot,\cdot)$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(\cdot,\cdot)$ を X の**内積**、X を $\mathbb{K}$ 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

(i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f,g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}$.

(iii) $(\forall f_1,f_2,g \in X)\ (\forall c_1,c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1,g) + c_2 (f_2,g)$.

$X_{2\pi}$ は、((3) で定めた $(,)$ と合わせて) 内積空間である。

$X_{2\pi}$ 以外の内積空間の例を (もちろん) ずっと前から知っている。

- $\mathbb{R}^N$ は、$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j$ を内積とする $\mathbb{R}$ 上の内積空間である。
- $\mathbb{C}^N$ は、$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{j=1}^{N} x_j \overline{y_j}$ を内積とする $\mathbb{C}$ 上の内積空間である。

(このスライドの内容は 10/5 には説明しなかった。次回に説明する。)

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.7 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f,g)=0 \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2.$$

(このスライドの内容は 10/5 には説明しなかった。次回に説明する。)

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.7 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f,g)=0 \quad\Rightarrow\quad \|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2.$$

さらに $f_1, f_2, \cdots, f_n \in X$ が互いに直交している ($j \neq k \Rightarrow (f_j, f_k)=0$) ならば

$$\|f_1+f_2+\cdots+f_n\|^2=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2+\cdots+\|f_n\|^2.$$

（このスライドの内容は 10/5 には説明しなかった。次回に説明する。）

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.7 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f,g)=0 \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2.$$

さらに f_1, f_2, $\cdots$, $f_n \in X$ が互いに直交している ($j \neq k \Rightarrow (f_j,f_k)=0$) ならば

$$\|f_1+f_2+\cdots+f_n\|^2=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2+\cdots+\|f_n\|^2.$$

証明.

$$\|f+g\|^2=(f+g,f+g)=(f,f)+2\,\mathrm{Re}(f,g)+(g,g)=(f,f)+(g,g)=\|f\|^2+\|g\|^2.$$

□

命題 3.8 (Schwarz の不等式)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して

$$|(f,g)| \le \|f\| \, \|g\| .$$

証明.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のときに示す。$f=0$ のときは両辺とも 0 であるから成立。以下 $f\neq 0$ とする。任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$0 \le \|tf+g\|^2 = \|f\|^2 t^2 + 2t(f,g) + \|g\|^2 .$$

これから

$$0 \ge \frac{\text{判別式}}{4} = |(f,g)|^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 .$$

(ていねいに考えると、等号の成立条件も分かるけれど、それは省略する。) □

□

(証明: $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合)

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合は、$(f,g)=re^{i\theta}$ $(r\geq 0,\ \theta\in\mathbb{R})$ として、$\lambda := te^{-i\theta}$ $(t\in\mathbb{R})$ を用いて

$$0\leq \|\lambda f+g\|^2=\|f\|^2 t^2+2t\,|(f,g)|+\|g\|^2$$

となることから分かる。 $\square$

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。(2014〜).

[2] 伊藤清三：ルベーグ積分入門, 裳華房 (1963), Lebesgue 積分のテキストとして定評がある.