信号処理とフーリエ変換 第4回

～直交系による展開, Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/

2022 年 10 月 12 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の §1.3 (続き), 1.4 の部分 (最短距離 $\Leftrightarrow$ 垂直) の内容を講義します。
- レポート課題 1 を出します (締め切りは 11 月 8 日 18:00)。

  `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/kadai1.pdf`

  におくようにします。

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが内積空間でも成立する。

命題 4.1 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f,g)=0 \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2 .$$

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが内積空間でも成立する。

命題 4.1 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f,g)=0 \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2.$$

さらに f_1, f_2, $\cdots$, $f_n\in X$ が互いに直交している ($j\ne k \Rightarrow (f_j,f_k)=0$) ならば

$$\|f_1+f_2+\cdots+f_n\|^2=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2+\cdots+\|f_n\|^2.$$

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが内積空間でも成立する。

命題 4.1 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f, g) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

さらに $f_1, f_2, \cdots, f_n \in X$ が互いに直交している ($j \neq k \Rightarrow (f_j, f_k) = 0$) ならば

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2 .$$

証明.

$(f, g) = 0$ ならば $(g, f) = \overline{(f, g)} = \overline{0} = 0$ に注意しよう。

$$\|f + g\|^2 = (f+g, f+g) = (f, f)+(f, g)+(g, f)+(g, g) = (f, f)+(g, g) = \|f\|^2+\|g\|^2 .$$

n 個の場合、$j \neq k$ である場合は 0 なので、$j = k$ の項が残り

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} f_j, \sum_{k=1}^{n} f_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(f_j, f_k) = \sum_{j=1}^{n}(f_j, f_j) = \sum_{j=1}^{n}\|f_j\|^2 .$$

□

定義 4.2 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

定義 4.2 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$

定義 4.2 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$
2. $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう:

$$(\forall m, n) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

定義 4.2 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$
2. $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう:

$$(\forall m, n) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

(実は「直交系」という言葉はきちんと定義されないことが多く、$(\varphi_n, \varphi_n) \neq 0$ という条件を要求するのは珍しいと思われるが、そう定義しておくと、次の命題 4.3 や定理 4.6 が成り立つ。これらは便利なので、この講義ではこの定義を採用する。)

定義 4.2 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$
2. $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう:

$$(\forall m, n) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

(実は「直交系」という言葉はきちんと定義されないことが多く、$(\varphi_n, \varphi_n) \neq 0$ という条件を要求するのは珍しいと思われるが、そう定義しておくと、次の命題 4.3 や定理 4.6 が成り立つ。これらは便利なので、この講義ではこの定義を採用する。)

もちろん、正規直交系は直交系である ($\because$ $m \neq n$ ならば $\delta_{mn} = 0$, $\delta_{nn} = 1 \neq 0$)。

次は常識的なことで断りなく使われることも多い (簡単なので慣れて欲しい)。

命題 4.3 (正規化)

$\{\varphi_n\}$ が直交系であるとき、$\psi_n := \dfrac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n$ とおくと、$\{\psi_n\}$ は正規直交系である。

次は常識的なことで断りなく使われることも多い (簡単なので慣れて欲しい)。

命題 4.3 (正規化)

$\{\varphi_n\}$ が直交系であるとき、$\psi_n := \dfrac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n$ とおくと、$\{\psi_n\}$ は正規直交系である。

証明.

$$(\psi_m, \psi_n) = \left(\frac{1}{\|\varphi_m\|}\varphi_m, \frac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n\right) = \frac{1}{\|\varphi_m\| \, \|\varphi_n\|}(\varphi_m, \varphi_n).$$

$m \neq n$ ならば $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ であるから $(\psi_m, \psi_n) = 0$.
$m = n$ ならば

$$(\psi_m, \psi_n) = (\psi_n, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}(\varphi_n, \varphi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\|\varphi_n\|^2 = 1.$$

$\square$

Fourier 級数で用いる個々の関数の L^2 ノルムは求めてあるので (前回スライド 13)、それで割り算すれば正規直交系が得られる。

思い出し: $X_{2\pi}$ = 周期 2π の区分的 C^1 級の関数全体の集合

例 4.4

$\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。

Fourier 級数で用いる個々の関数の L^2 ノルムは求めてあるので (前回スライド 13)、それで割り算すれば正規直交系が得られる。

思い出し: $X_{2\pi}$ = 周期 2π の区分的 C^1 級の関数全体の集合

例 4.4

$\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。

例 4.5

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \cdots\right\}$$

は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (1)

定理 4.6 (直交系による展開の係数)

X は内積空間で、$(,)$ はその内積とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が X の直交系で、$f \in X$ が

(1)
$$f = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$$

と表されるならば

(2)
$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

2. $\{\varphi_n\}$ が X の正規直交系で、$f \in X$ が

$$f = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$$

と表されるならば

$$c_n = (f, \varphi_n) \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \displaystyle\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \displaystyle\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n)$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right)$$

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{N} c_m \left(\varphi_m, \varphi_n \right)$$

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f=\sum_{m=1}^{N} c_m\varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1\le n\le N)$ に対して、

$$(f,\varphi_n)=\left(\sum_{m=1}^{N} c_m\varphi_m,\varphi_n\right)=\sum_{m=1}^{N} c_m\left(\varphi_m,\varphi_n\right)=c_n\left(\varphi_n,\varphi_n\right).$$

($m\ne n$ のとき $(\varphi_m,\varphi_n)=0$ に注意。)

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \displaystyle\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{N} c_m (\varphi_m, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

($m \ne n$ のとき $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ に注意。)

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

□

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。内積から定まるノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を用いて

$$(3) \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\| = 0$$

で級数の和を定義すると

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。内積から定まるノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を用いて

$$(3) \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\| = 0$$

で級数の和を定義すると

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

証明.

任意の n に対して、$N \geq n$ を満たす N に対して、

$$(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \left(f - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right).$$

Schwarz の不等式を用いて

$$|(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n)| = \left| \left(f - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) \right| \leq \left\| f - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m \right\| \|\varphi_n\|.$$

$N \to \infty$ とすると右辺は 0 に収束する。ゆえに左辺は 0. ゆえに $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$. □

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (4) 例

例 4.7 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$\{1\} \cup \{\cos nx \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ は直交系である。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (4) 例

例 4.7 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$\{1\} \cup \{\cos nx \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ は直交系である。$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\star) \qquad a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\cos nx}\,dx}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx,$$

$$b_n = \frac{(f, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\sin nx}\,dx}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\ dx.$$

例 4.7 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}\cdot 1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

$\{1\}\cup\{\cos nx \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{\sin nx \mid n\in\mathbb{N}\}$ は直交系である。$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$(\star)\qquad a_n=\frac{(f,\cos nx)}{(\cos nx,\cos nx)}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{\cos nx}dx}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\;dx,$$

$$b_n=\frac{(f,\sin nx)}{(\sin nx,\sin nx)}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{\sin nx}dx}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\;dx.$$

また $a_0/2$ は $1=\cos(0\cdot x)$ の係数であるから

$$\frac{a_0}{2}=\frac{(f,1)}{(1,1)}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{1}\;dx}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\;dx\quad\therefore\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\;dx.$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (5) 例 (続き)

(授業では、以下の例は省略した。)

例 4.7 (通常の Fourier 級数を振り返る (続き))

一方

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

に対しては

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (5) 例 (続き)

(授業では、以下の例は省略した。)

例 4.7 (通常の Fourier 級数を振り返る (続き))

一方

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

に対しては

$$c_n = \frac{(f, e^{inx})}{(e^{inx}, e^{inx})} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{inx}}\,dx}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{inx}}\,dx} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (6) 一般の周期

例 4.8 (一般の周期関数の Fourier 級数)

周期 T の関数 f の Fourier 級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

の場合の a_n, b_n も、周期 T の関数の空間 X_T における内積を

$$(f, g) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義して

例 4.8 (一般の周期関数の Fourier 級数)

周期 T の関数 f の Fourier 級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

の場合の a_n, b_n も、周期 T の関数の空間 X_T における内積を

$$(f, g) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\overline{g(x)}dx$$

で定義して

$$a_n = \frac{(f, \cos \frac{2n\pi}{T} x)}{(\cos \frac{2n\pi}{T} x, \cos \frac{2n\pi}{T} x)}, \quad b_n = \frac{(f, \sin \frac{2n\pi}{T} x)}{(\sin \frac{2n\pi}{T} x, \sin \frac{2n\pi}{T} x)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)}$$

から求まる (やってみよう — おまけ (p. 22) も見てみよう)。これだけでは展開可能なことの "証明" にはならないけれど、係数の式は自信を持って書き下せるだろう。

1.4 Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似

以下次のことが成り立つことを示す。

- Fourier 級数の部分和は直交射影と呼ばれるものになっている。
- (一般の内積空間で) 直交射影は、ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ で測って最良近似である。
- (上 2 つの結果を合わせて) Fourier 級数の部分和は最良近似である。

また、有名な Bessel の不等式を示し、ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ についての収束と完全系の概念を定義する。

1.4.1 垂線の足 (直交射影) は最も近い点

- 直線 $\ell = V$ とその上にない点 F. ℓ 上の動点 G.
- 平面 $\pi = V$ とその上にない点 F. π 上の動点 G.

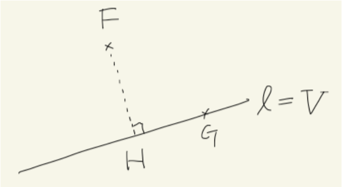

図 1: $V = \ell$

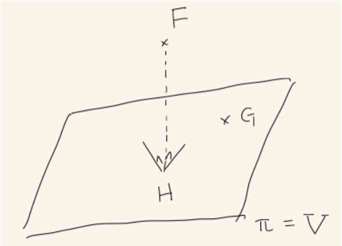

図 2: $V = \pi$

問　V 上の点 G をなるべく F に近くしたい。FG が最短距離となる G を求められるか？

1.4.1 垂線の足 (直交射影) は最も近い点

- 直線 $\ell = V$ とその上にない点 F. ℓ 上の動点 G.
- 平面 $\pi = V$ とその上にない点 F. π 上の動点 G.

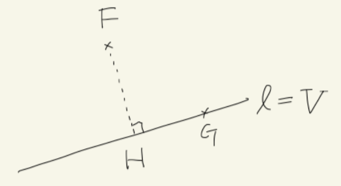

図 1: $V = \ell$

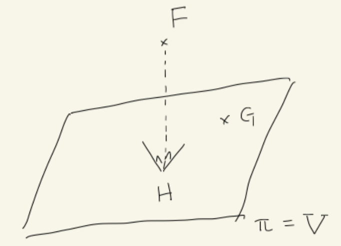

図 2: $V = \pi$

問　V 上の点 G をなるべく F に近くしたい。FG が最短距離となる G を求められるか？

答　F から V に引いた垂線と V との交点 H (「F から V に下した垂線の足」)

H のことを「F の V への**直交射影**」という。

論理を (短く) 言い切ると「最短 $\Leftrightarrow$ 垂直」

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点　定理にする

x が V の任意の要素と直交することを $x \perp V$ と書くことにする (つまり $(\forall v \in V)\ (x, v) = 0$)。

h から f に向かうベクトルは、$f - h$ であることを思い出しておこう。

定理 4.9 (垂直 $\Leftrightarrow$ 最短)

体 $\mathbb{K}$ 上の内積空間 X の部分空間 V と $f \in X$, $h \in V$ 対して

$$h \text{ は } f \text{ の } V \text{ への直交射影} \Leftrightarrow h \text{ が最も } f \text{ に近い}$$

つまり次の 2 つが成り立つ。ただし $\|\quad\|$ は内積から定まるノルムである。

1. $f - h \perp V$ となる $h \in V$ があれば、$\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$.
2. $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$ となる h (最短距離を達成する h) があれば、$f - h \perp V$.

(1) の証明　(直角三角形 $\triangle FGH$ の図を描く)

(1) の証明　(直角三角形 $\triangle FGH$ の図を描く)　$\forall g \in V$ に対して

$$\|f-h\|^2 + \|g-h\|^2 = \|f-g\|^2 \quad (\text{ピタゴラスの定理})$$

であるから $\|f-h\| \le \|f-g\|$. ゆえに $\|f-h\| = \inf_{g \in V} \|f-g\|$.

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点　定理の証明

(1) の証明　(直角三角形 $\triangle FGH$ の図を描く)　$\forall g \in V$ に対して

$$\|f-h\|^2+\|g-h\|^2=\|f-g\|^2 \quad \text{(ピタゴラスの定理)}$$

であるから $\|f-h\| \le \|f-g\|$. ゆえに $\|f-h\| = \inf_{g\in V}\|f-g\|$.

(2) の証明　任意の $v \in V$, $t \in \mathbb{K}$ に対して、$g := h+tv$ も V に属する。ゆえに

$$\varphi(t) := \|f-(h+tv)\|^2 \quad (t \in \mathbb{K}).$$

は $t=0$ で最小値を取る。これから実は $(f-h, v)=0$ が導かれる。

(1) の証明　(直角三角形 $\triangle FGH$ の図を描く)　$\forall g \in V$ に対して

$$\|f-h\|^2 + \|g-h\|^2 = \|f-g\|^2 \quad \text{(ピタゴラスの定理)}$$

であるから $\|f-h\| \le \|f-g\|$. ゆえに $\|f-h\| = \inf_{g\in V} \|f-g\|$.

(2) の証明　任意の $v \in V$, $t \in \mathbb{K}$ に対して、$g := h + tv$ も V に属する。ゆえに

$$\varphi(t) := \|f-(h+tv)\|^2 \quad (t \in \mathbb{K}).$$

は $t=0$ で最小値を取る。これから実は $(f-h,v)=0$ が導かれる。

ここでは $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合のみ証明する ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合は講義ノートにある)。

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= ((f-h)-tv, (f-h)-tv) \\ &= \|f-h\|^2 - 2(f-h,v)t + t^2\|v\|^2\end{aligned}$$

が $t=0$ のとき最小値をとるので、1 次の項の係数 $-2(f-h,v)$ は 0 である。ゆえに $(f-h,v)=0$. $\square$

系 4.10 (直交射影を表す式)

体 $\mathbb{K}$ 上の内積空間 X の部分空間 V が直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ で張られている、つまり

$$V = \operatorname{span}\langle \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N \rangle \overset{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \;\middle|\; c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K} \right\}$$

であれば、任意の $f \in X$ に対して、f に最も近い $h \in V$ は (一意的に存在して)

$$h = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n. \tag{4}$$

これは f の V への直交射影でもある。

系 4.10 (直交射影を表す式)

体 $\mathbb{K}$ 上の内積空間 X の部分空間 V が直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ で張られている、つまり

$$V = \operatorname{span}\langle \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N \rangle \overset{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \;\middle|\; c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K} \right\}$$

であれば、任意の $f \in X$ に対して、f に最も近い $h \in V$ は (一意的に存在して)

$$h = \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n. \tag{4}$$

これは f の V への直交射影でもある。

V の範囲内で、f を近似するものを選ぶ、と考えると、(4) の h は、誤差 $\|f - h\|$ を最小にするので、「最良近似」と呼ぶのにふさわしい。

系 4.10 (直交射影を表す式)

体 $\mathbb{K}$ 上の内積空間 X の部分空間 V が直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ で張られている、つまり

$$V = \mathrm{span}\langle\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N\rangle \overset{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^N c_n\varphi_n \,\middle|\, c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K} \right\}$$

であれば、任意の $f \in X$ に対して、f に最も近い $h \in V$ は (一意的に存在して)

$$h = \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}\varphi_n. \tag{4}$$

これは f の V への直交射影でもある。

V の範囲内で、f を近似するものを選ぶ、と考えると、(4) の h は、誤差 $\|f - h\|$ を最小にするので、「最良近似」と呼ぶのにふさわしい。

Fourier 級数の部分和 s_N は、(4) の h に他ならない。ゆえに、Fourier 級数の部分和は (V の範囲内で) 最も f に近い。

証明　$h \in V$ であるから、ある $c_1, \cdots, c_N$ が存在して

$$h = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n.$$

証明　$h \in V$ であるから、ある $c_1, \cdots, c_N$ が存在して

$$h = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、$f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

証明　$h \in V$ であるから、ある $c_1, \cdots, c_N$ が存在して

$$h = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、$f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n)$$

証明　$h \in V$ であるから、ある $c_1, \cdots, c_N$ が存在して

$$h = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、$f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_n \right)$$

証明　$h \in V$ であるから、ある $c_1, \cdots, c_N$ が存在して

$$h = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、$f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_n \right) = \sum_{j=1}^{N} c_j \left(\varphi_j, \varphi_n \right)$$

証明　$h \in V$ であるから、ある $c_1, \cdots, c_N$ が存在して

$$h = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、$f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_n \right) = \sum_{j=1}^{N} c_j (\varphi_j, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

(等号 $=$ は説明済み)

証明　$h \in V$ であるから、ある $c_1, \cdots, c_N$ が存在して

$$h = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、$f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_n \right) = \sum_{j=1}^{N} c_j (\varphi_j, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

(等号 $=$ は説明済み)

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \quad \square$$

例 4.11 (Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似)

(三角関数を用いた) Fourier 級数の部分和

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は、f の $V := \mathrm{span}\langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos Nx, \sin Nx \rangle$ への直交射影であり、f の V における最良近似でもある ($\|f - s_N\|$ が最も短いという意味)。

例 4.11 (Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似)

(三角関数を用いた) Fourier 級数の部分和

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は、f の $V := \mathrm{span}\langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos Nx, \sin Nx \rangle$ への直交射影であり、f の V における最良近似でもある ($\|f - s_N\|$ が最も短いという意味)。

(複素指数関数を用いた) Fourier 級数の部分和

$$s_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

は、f の $V := \mathrm{span}\langle e^{-iNx}, \cdots, e^{-ix}, e^{i0x}, e^{ix}, \cdots, e^{iNx} \rangle$ への直交射影であり、f の V における最良近似でもある (やはり $\|f - s_N\|$ が最も短いという意味)。 □

1.4.2 Bessel の不等式

有名な Bessel の不等式を紹介する。

命題 4.12 (Bessel の不等式)

内積空間 X の直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ と任意の $f \in X$ に対して

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\left|(f, \varphi_n)\right|^2}{\left\|\varphi_n\right\|^2} \le \|f\|^2 \tag{5}$$

が成り立つ。無限個の $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の場合は (極限を取って)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|(f, \varphi_n)\right|^2}{\left\|\varphi_n\right\|^2} \le \|f\|^2 \quad \textbf{(Bessel の不等式)}. \tag{6}$$

1.4.2 Bessel の不等式

有名な Bessel の不等式を紹介する。

命題 4.12 (Bessel の不等式)

内積空間 X の直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ と任意の $f \in X$ に対して

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \le \|f\|^2 \tag{5}$$

が成り立つ。無限個の $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の場合は (極限を取って)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \le \|f\|^2 \quad (\textbf{Bessel の不等式}). \tag{6}$$

特に $\{\psi_n\}$ が正規直交系の場合は ($\|\psi_n\| = 1$ なので)

$$\sum_{n=1}^{N} |(f,\psi_n)|^2 \le \|f\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f,\psi_n)|^2 \le \|f\|^2. \tag{7}$$

1.4.2 Bessel の不等式

証明　0, h (直交射影), f を頂点とする直角三角形の図を描く。ピタゴラスの定理から

$$\|h\|^2 + \|f - h\|^2 = \|f\|^2 .$$

ゆえに

$$\|h\|^2 \leq \|f\|^2 .$$

1.4.2 Bessel の不等式

証明　0, h (直交射影), f を頂点とする直角三角形の図を描く。ピタゴラスの定理から

$$\|h\|^2 + \|f - h\|^2 = \|f\|^2 .$$

ゆえに

$$\|h\|^2 \le \|f\|^2 .$$

この左辺は、やはりピタゴラスの定理を用いて次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\|h\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left\| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \right|^2 \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^4} \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} .
\end{aligned}$$

証明 0, h (直交射影), f を頂点とする直角三角形の図を描く。ピタゴラスの定理から

$$\|h\|^2 + \|f - h\|^2 = \|f\|^2 .$$

ゆえに

$$\|h\|^2 \le \|f\|^2 .$$

この左辺は、やはりピタゴラスの定理を用いて次のように計算できる。

$$\|h\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N} \frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left\| \frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)} \varphi_n \right\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)} \right|^2 \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^4} \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2}.$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \le \|f\|^2 .$$

無限個の場合、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、この不等式が得られる。部分和が上に有界であるから $N \to \infty$ のとき収束して、(6) が得られる。 □

内積空間の不等式は、ほとんどがピタゴラスの定理で解釈できる…

おまけ: 一般の周期関数の Fourier 級数

第 1 回スライドの 12 ページに結果の式を書いておいた。再録しておくと

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

「信号処理とフーリエ変換 練習問題」の問 11 も参考になる。特に解答の解法 2 を見ると、$\cos \frac{2n\pi x}{T}$, $\sin \frac{2n\pi x}{T}$ で展開できることが理解できる。

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。(2014〜).